

Eliminatoires de la coupe Animath de printemps 2018

Questionnaire lycéens

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté. Il suffit de trouver 7 bonnes réponses sur 12 pour se qualifier. Plusieurs essais sont possibles. Pour le premier essai, il faut s'inscrire sur le site, et pour les fois suivantes il suffit de se reconnecter au moyen du code qui s'affiche lors de la première connexion.

N.B. L'inscription à la coupe Animath de printemps 2018 est indépendante de l'inscription aux coupes Animath passées.

Exercice 1. Soient x , y et z trois nombres tels que $x - y = 3$ et $y - z = 7$. Combien vaut $x - z$?

Exercice 2. Soit d le nombre de diviseurs positifs de 2018^{2018} . Combien vaut $\frac{d}{2019}$?

Exercice 3. On dit que les droites d'un plan sont dans une position générale s'il n'y a pas de droites parallèles, et s'il n'existe pas de triplets de droites concourantes. En combien de secteurs 100 droites en position générale partagent-elles le plan ?

Exercice 4. Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux cercles disjoints (c'est-à-dire sans point en commun) de rayon 3 et 9 respectivement. Soit A le centre de \mathcal{C}_1 et B celui de \mathcal{C}_2 . Une tangente intérieure commune aux deux cercles coupe \mathcal{C}_1 en C et \mathcal{C}_2 en D . On note E l'intersection de (AB) et (CD) . Supposons que $AE = 5$. Combien vaut CD ?

Exercice 5. Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2, avec a , b et c des entiers. On suppose que $f(1) = 0$, $50 < f(7) < 60$ et $70 < f(8) < 80$. Déterminer l'entier k qui vérifie $5000k < f(100) < 5000(k + 1)$.

Exercice 6. Soit S un sous-ensemble de $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$ ayant la propriété suivante : la somme de deux éléments distincts de S n'est jamais divisible par 5. Combien d'éléments un tel ensemble S peut-il avoir au maximum ?

Exercice 7. Une urne contient 4 boules vertes et 6 boules bleues. Une seconde urne contient 16 boules vertes et N boules bleues. On tire aléatoirement une boule dans chaque urne. La probabilité que les deux boules tirées soient de la même couleur vaut $0,58$. Déterminer N .

Exercice 8. Soient a , b , c , d et e des entiers relatifs distincts tels que $(6 - a)(6 - b)(6 - c)(6 - d)(6 - e) = 45$. Combien vaut $a + b + c + d + e$?

Exercice 9. Une sauterelle se trouve au pied d'un escalier comportant 10 marches. En un saut, elle est capable de monter une ou deux marches. De combien de façons différentes peut-elle monter l'escalier ?

Exercice 10. Soit $ABCD$ un carré de côté 2. On construit un demi-cercle de diamètre $[AB]$ à l'intérieur du carré. La droite tangente à ce demi-cercle et passant par C recoupe $[AD]$ en E . Que vaut le double de la longueur CE ?

Exercice 11. Les nombres de 1 à 100 sont écrits au tableau. On choisit 2 nombres quelconques a et b , on les efface et on les remplace par $ab + a + b$, puis on recommence ce processus. Soit N le dernier nombre écrit au tableau. Combien vaut $\frac{N + 1}{100!}$? On rappelle que $100! = 1 \times 2 \times \dots \times 100$.

Exercice 12. Déterminer le nombre de rationnels $0 < r < 1$ tels que lorsqu'on écrit r sous forme irréductible, la somme du numérateur et du dénominateur vaille 100.