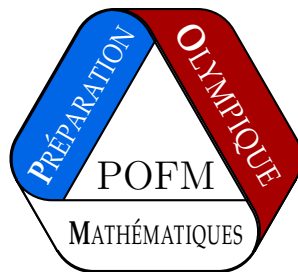


PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 20 FEVRIER 2018
DURÉE : 4 HEURES (14H-18H)

Instructions

- ▷ Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Préparation Olympique Française de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Exercice 1. Déterminer la valeur maximale de $\sqrt{x} + \sqrt{2y+2} + \sqrt{3z+6}$ lorsque x, y, z sont des nombres réels strictement positifs vérifiant $x + y + z = 3$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle acutangle, et soit P un point situé à l'intérieur du triangle ABC . Soit D le milieu du segment $[PC]$, E le point d'intersection des droites (AP) et (BC) , et Q le point d'intersection des droites (BP) et (DE) . Montrer que, si les angles \widehat{PAC} et \widehat{PCB} sont égaux, alors $\sin(\widehat{BCQ}) = \sin(\widehat{BAP})$.

Exercice 3. Trouver toutes les valeurs possibles pour $f(2018)$ où f est une fonction de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}_+ vérifiant les trois conditions suivantes :

- ▷ $f(2) = 1/2$;
- ▷ pour tout rationnel x , si $f(x) \leq 1$, alors $f(x+1) \leq 1$;
- ▷ $f(xy) = f(x)f(y)$ pour tous rationnels x et y .