OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 3 MAI 2017

DURÉE : 4 HEURES

NE PAS DIFFUSER SUR INTERNET

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**

- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Olympiades Françaises de Mathématiques
Animath
Institut Henri Poincaré
11-13 rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05

Exercices pour élèves nés en 2002 ou après

Exercice 1. On dispose de 100 cartes. Sur chacune sont écrits deux entiers consécutifs, de sorte que chacun des entiers $1, 2, ..., 200$ soit écrit sur une des cartes.

a) Alice a choisi 21 cartes au hasard. Elle fait la somme de tous les entiers écrits sur ses cartes et annonce à Bob que cette somme vaut 2004.
Prouver qu'Alice s'est trompée dans son calcul.

b) Alice recompte et annonce cette fois 2005.
Prouver qu'elle s'est à nouveau trompée dans son calcul.

c) En fait, le vrai total d'Alice est 2003. Pendant ce temps, Bob a choisi 20 cartes au hasard parmi celles qui restaient. Il fait la somme des nombres écrits sur ses cartes et annonce à Alice que cette somme vaut 1396.
Prouver que Bob s'est trompé dans son calcul.

Exercice 2. Soit $n \geq 2$ et $k \geq 2$ des entiers. Soit $a_1, a_2, ..., a_k$ des entiers tels que $n \geq a_1 > a_2 > ... > a_k > 0$ et $\text{ppcm}(a_i, a_j) \leq n$ pour tous i et j.
Prouver que $ia_i \leq n$ pour $i = 1, 2, ..., k$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle. Soient D et E des points de $[AC]$ tels que D se situe entre C et E. Soit F l'intersection du cercle circonscrit à ABD avec la parallèle à (BC) passant par E tel que E et F soient dans deux demi-plans différents délimités par (AB). Soit G l'intersection du cercle circonscrit à BCD avec la parallèle à (AB) passant par E tel que E et G soient dans deux demi-plans différents délimités par (BC). Montrer que D, E, F, G sont cocycliques.

Exercice commun

Exercice 4. Trouver le maximum de $(x^2 - yz)(y^2 - zx)(z^2 - xy)$ pour x, y, z réels vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Exercices pour élèves nés en 2001 ou avant

Exercice 5. Soit ABC un triangle. On note Γ le cercle circonscrit et I le centre du cercle inscrit. Soit M le milieu de $[BC]$. On désigne par D le point de $[BC]$ tel que $(ID) \perp (BC)$. La droite passant par I qui est perpendiculaire à (AI) rencontre (AB) et (AC) en F et E respectivement. On suppose que le cercle circonscrit à AEF coupe Γ en un point X différent de A. Montrer que les droites (XD) et (AM) se coupent sur Γ.

Exercice 6. Soit n un entier premier avec 6. On colorie les sommets d'un polygone régulier à n côtés en bleu, vert ou rouge de sorte qu'il y ait un nombre impair de sommets de chaque couleur. Montrer qu'il y a un triangle isocèle dont les trois sommets ont des couleurs différentes.