OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES 2016-2017

ENVOI NO. 5

CORRIGÉ

Exercices du groupe B

Exercice 1. On considère un échiquier 3×3. Au début, on écrit le chiffre 0 dans chacune des 9 cases. Ensuite, à chaque étape, on effectue l'opération suivante : on choisit deux cases ayant un côté commun, puis on rajoute 1 au nombre écrit dans ces deux cases, ou bien on retranche 1 au nombre écrit dans ces deux cases. Est-il possible d'obtenir une configuration où le nombre 2017 est écrit dans les 9 cases ?

Solution de l'exercice 1 Ce n'est pas possible. On colorie l'échiquier 3×3 en noir et blanc de manière usuelle (de sorte qu'une case noire n'ait que des cases blanches comme voisins et qu'une case blanche n'ait que des cases noires comme voisins). On vérifie que la somme des nombres sur les cases noires est toujours égale à la somme des nombres sur les cases blanches. En effet, c'est le cas au début, et si la somme des nombres sur les cases noires est égale à la somme des nombres sur les cases blanches, alors c'est toujours le cas après avoir effectué l'opération de l'énoncé.

Lorsque le nombre 2017 est écrit dans les 9 cases, ces deux sommes ne sont pas égales, d'où le résultat.

Exercice 2. Soit ABC un triangle acutangle. On note O le centre de son cercle circonscrit. On considère le cercle Γ_B passant par A et B et qui est tangent à (AC), ainsi que le cercle Γ_C passant par A et C qui est tangent à (AB). Une droite Δ passant par A recoupe Γ_B en X et Γ_C en Y. Montrer que $OX = OY$.

Solution de l'exercice 2

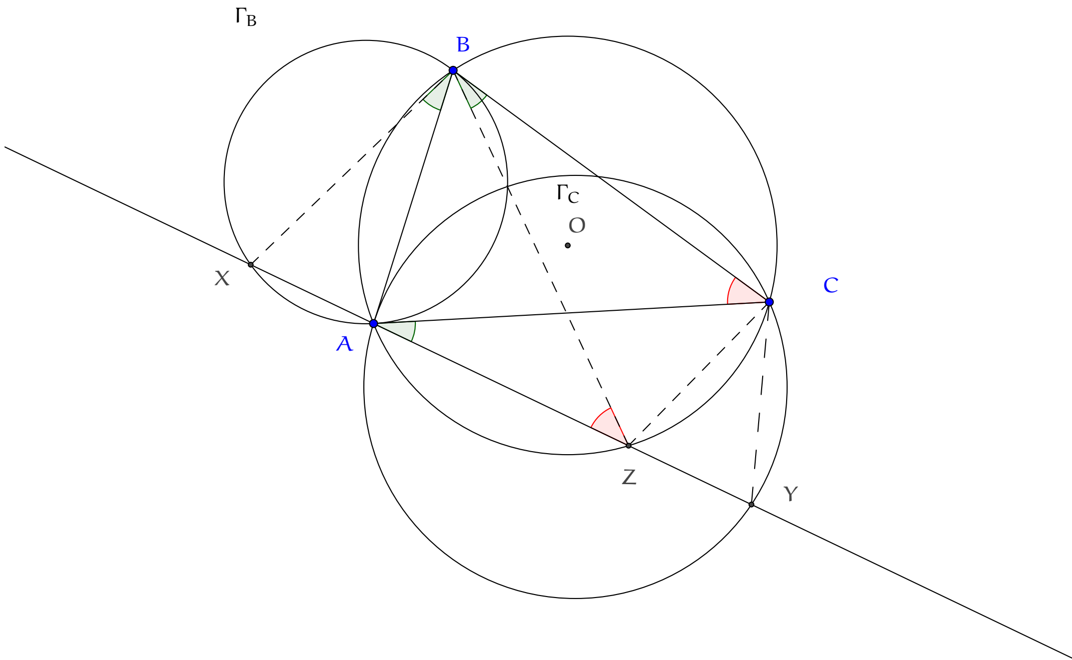
Soit Z le point d'intersection du cercle circonscrit de ABC avec Δ. En faisant une chasse aux angles, on trouve que $\widehat{XBA} = \widehat{ZAC} = \widehat{ZBC}$. On en déduit que $\widehat{XBZ} = \widehat{ABC}$. Or, comme $\widehat{BCA} = \widehat{BZA}$, on en déduit que les triangles ABC et XBZ sont semblables. Donc

$$\frac{XZ}{AC} = \frac{BZ}{BC}.$$

On montre de même que les triangles CAY et CBZ sont semblables, de sorte que

$$\frac{AY}{BZ} = \frac{AC}{BC}.$$

On en déduit que $AY = XZ$, puis que $AX = ZY$. Ceci implique que les médiatrices des segments $[XY]$ et $[AZ]$ sont les mêmes. Donc O appartient à la médiatrice de $[XY]$. Donc $OX = OY$.



Exercice 3. Trouver tous les entiers strictement positifs a, b et c tels que $\mathrm{PGCD}(a,b,c)=1$,

$$a \mid (b-c)^2, \quad b \mid (a-c)^2, \quad c \mid (a-b)^2.$$

et tels qu'il est possible de construire un triangle non aplati dont les côtés ont pour longueurs a, b et c.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

Tout d'abord, vérifions que $\mathrm{PGCD}(a,b)=1$. Raisonnons par l'absurde en supposant que p est un nombre premier qui divise à la fois a et b. Alors p divise a, qui lui même divise

$$(b-c)^2 = b(b-2c)+c^2,$$

donc p divise c^2 et donc p divise c. Ceci contredit le fait que $\mathrm{PGCD}(a,b,c)=1$.

Supposons tout d'abord que deux des nombres sont égaux, par exemple $a=b$ par symétrie. Comme a et b sont premiers entre eux, on a $a=b=1$. La seule possibilité pour construire un triangle non-aplati est de prendre $c=1$.

Supposons maintenant que a,b,c sont deux à deux différents. Raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il est possible de construire un triangle non aplati dont les côtés ont pour longueur a, b et c. Par symétrie, supposons que $c>b>a$.

Montrons que a divise $(a+b-c)^2$ et que b divise $(a+b-c)^2$. On a $(a+b-c)^2 = a^2+2a(b-c)+(b-c)^2$, donc a divise $(a+b-c)^2$. De même b divise $(a+b-c)^2$.

Comme a et b sont premiers entre eux, on en déduit que ab divise $(a+b-c)^2$. Or $0 < a+b-c < a$, donc

$$ab > a^2 > (a+b-c)^2,$$

ce qui est absurde.

Ainsi, la seule solution est $a = b = c = 1$.

Exercices communs

Exercice 4. Soient a, b et c trois nombres strictement positifs tels que $a+b+c+abc = 4$. Montrer que

$$\left(1+\frac{a}{b}+ca\right)\left(1+\frac{b}{c}+ab\right)\left(1+\frac{c}{a}+bc\right) \geqslant 27.$$

Solution de l'exercice 4 En utilisant l'inégalité arithmético-géométrique, on trouve que

$$4 = a+b+c+abc \geqslant 4((abc)^2)^{\frac{1}{4}},$$

et donc $abc \leqslant 1$. Ensuite, en utilisant encore l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\left(1+\frac{a}{b}+ca\right)\left(1+\frac{b}{c}+ab\right)\left(1+\frac{c}{a}+bc\right) = \frac{(4-a)(4-b)(4-c)}{abc} = 15+4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right),$$

et en utilisant encore l'inégalité arithmético-géométrique on en déduit que

$$\left(1+\frac{a}{b}+ca\right)\left(1+\frac{b}{c}+ab\right)\left(1+\frac{c}{a}+bc\right) \geqslant 15+12\left(\frac{1}{abc}\right)^{1/3} \geqslant 27.$$

Exercice 5. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous nombres réels $x, y \in \mathbb{R}$ on ait

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + f(x) + f(y).$$

Solution de l'exercice 5 En prenant $y = 0$, on trouve que $f(0)(f(x)-2) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $f(0) \neq 0$, on en déduit que $f(x) = 2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Supposons donc dans la suite que $f(0) = 0$ et notons $a = f(1)$.

En prenant $y = 1$, on obtient

$$f(x+1) = (2-a)f(x) + a$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En prenant $y+1$ à la place de y dans l'équation fonctionnelle, on obtient

$$\begin{aligned}(2-a)f(x+y)+a+f(x)((2-a)f(y)+a) &= f(x+y+1)+f(x)f(y+1)\\ &= f(xy+x)+f(x)+f(y+1)\\ &= f(xy+x)+f(x)+(2-a)f(y)+x.\end{aligned}$$

En retranchant $(2-a)f(x+y)+(2-a)f(x)f(y)=(2-a)f(xy)+(2-a)f(x)+(2-a)f(y)$ à cette égalité, on obtient

$$f(x)+(2-a)f(xy)=f(xy+x).$$

En prenant $y=-1$, on en déduit que $f(x)=-(2-a)f(-x)$, et donc $f(x)=(2-a)^2f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. Si f n'est pas la fonction nulle, en choisissant x tel que $f(x)\neq 0$, on obtient que $a=1$ ou $a=3$.

Premier cas. On suppose que $a=1$. Alors $f(xy+x)=f(xy)+f(x)$ pour tous $x,y\in\mathbb{R}$. On en déduit que

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad (1)$$

pour tout $x,y\in\mathbb{R}$. En injectant ceci dans l'équation fonctionnelle, on obtient que $f(xy)=f(x)f(y)$. En prenant $x=y$, on en déduit que $f(x)\geqslant 0$ pour $x\geqslant 0$, et avec (1) on en déduit que f est croissante. Il est alors classique que (1) et la croissance de f entraînent que f est de la forme $f(x)=ax$ avec $x\in\mathbb{R}$, et donc $f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Deuxième cas. On suppose que $a=3$. Partant de $f(x+1)=(2-a)f(x)+a$, on en déduit que $f(x+2)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$. En prenant $y+2$ à la place de y dans l'équation fonctionnelle, on en déduit que

$$f(x+y)+f(x)f(y)=f(x+y+2)+f(x)f(y+2)=f(xy+2x)+f(x)+f(y+2)=f(xy+2x)+f(x)+f(y)$$

pour tous $x,y\in\mathbb{R}$. En comparant avec l'équation fonctionnelle initiale, on en déduit que $f(xy+2x)=f(xy)$ pour tous $x,y\in\mathbb{R}$, et donc que f est constante, ce qui contredit le fait que $f(0)=0$ et $f(1)=3$.

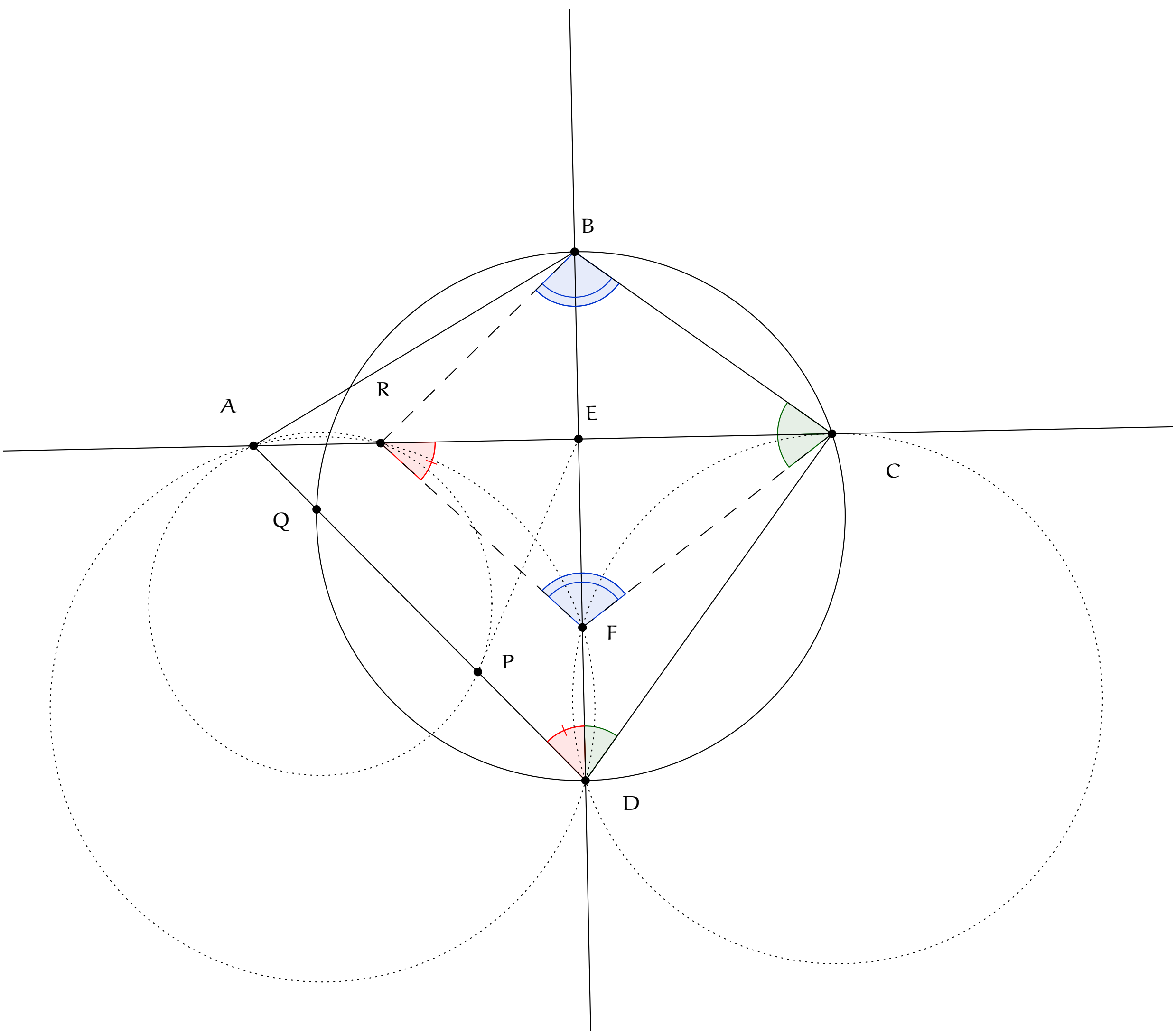
Réciproquement, on vérifie que les trois solutions $f(x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=2$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $f(x)=x$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ conviennent.

Exercice 6. On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en E. Soit $P\in[AD]$ un point tel que $P\neq A$ et $PE=EC$. On suppose que le cercle circonscrit du triangle BCD recoupe $[AD]$ en un point Q différent de A. On note R le deuxième point d'intersection de $[AC]$ avec le cercle passant par A et tangent à (EP) en P. On suppose que les points B,R,Q sont alignés. Montrer que $\widehat{BCD}=90°$.

Solution de l'exercice 6 Introduisons F, le point d'intersection du cercle circonscrit du triangle ARD et du segment $[DE]$. La puissance de E par rapport au cercle passant par A,R,F,D est $ER\cdot EA=EF\cdot ED$. Par ailleurs, la puissance de E par rapport au cercle passant par A,R,P est

$ER \cdot EA = EP^2 = EC^2$. On en déduit que $ED \cdot EF = EC^2$, ce qui montre que le cercle passant par F, C, D est tangent à (CE).

On en déduit que $\widehat{ECF} = \widehat{EDC}$. Par ailleurs, comme A, R, F, D sont cocycliques, on a $\widehat{ADE} = \widehat{ERF}$. On en déduit que $\widehat{QDB} + \widehat{BDC} = \widehat{FRC} + \widehat{RCF}$, ce qui implique que $\widehat{RBC} = \widehat{RFC}$. Comme (BF) et (CR) sont perpendiculaires, ceci implique que F est le symétrique de B par rapport à la droite (AC). Il en découle que $\widehat{BCR} = \widehat{RCF} = \widehat{BDC}$. Comme $\widehat{BEC} = 90°$, on a $\widehat{ECD} = 90° - \widehat{BCE}$ et conclut que $\widehat{BCD} = 90°$.



Exercice 7. Trouver tous les entiers strictement positifs a, b et c tels que $(a^3+b)(b^3+a) = 2^c$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Soit (a, b, c) un triplet solution. Si $a = b$, on a $a^2(a^2+1)^2 = 2^c$, ce qui implique $a = b = 1$ et $c = 2$.

Si $a \neq b$, supposons par symétrie que $a > b$. On voit aisément que a et b sont impairs et premiers entre eux. Il existe deux entiers $x, y \geqslant 1$ tels que $2^x = a^3 + b$ et $2^y = b^3 + a$. Par croissance stricte de la fonction $f(x) = x^3 - x$ sur $[1, \infty[$, on $a^3 + b > b^3 + a$, de sorte que $x > y$.

Si $b=1$, on a $2^x=(2^y-1)^3+1$, et donc $2^{x-y}=3-3\cdot 2^y+2^{2y}$, ce qui est absurde.

Si $b>1$, comme b^3+a divise $(b^3)^3+a^3=b^9+a^3$, b^3+a divise $b^9+a^3-(a^3+b)=b^9-b$. Comme a et b sont premiers entre eux, on en déduit que b^3+a divise

$$b^8-1=(b^4+1)(b^2+1)(b^2-1).$$

Comme b^4+1 et b^2+1 sont congrus à 2 modulo 4, on en déduit que 2^{y-2} divise b^2-1, ce qui implique que $b^2-1\geqslant 2^{y-2}$. Or $2^y>b^3$. Ceci implique que $4(b^2-1)>b^3$, ce qui force $b=3$. Alors 2^{y-2} divise 8, donc $y=3,4$ ou 5. On vérifie aisément que cela implique $(a,b)=(5,3)$.

Réciproquement, on vérifie que les seules solutions sont $(a,b,c)=(1,1,2)$, $(a,b,c)=(3,5,12)$ et $(a,b,c)=(5,3,12)$.

Exercices du groupe A

Exercice 8. Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P(P(n)+n)$ est un nombre premier pour une infinité d'entiers n.

Solution de l'exercice 8 Soit P un polynôme solution qui n'est pas constant. On peut écrire $P(X+P(X))=P(X)Q(X)$, avec Q un polynôme à coefficients entiers. En effet, si $P(X)=\sum_{i=0}^k a_iX^i$, avec $a_i\in\mathbb{Z}$, on a

$$P(P(X)+X)=\sum_{i=0}^k a_i(P(X)+X)^i=a_0+\sum_{i=1}^k a_i(P(X)Q_i(X)+X^i)=P(X)+P(X)\sum_{i=1}^k a_iQ_i(X)=P(X)Q(X),$$

où les Q_i sont des polynômes à coefficients entiers, et donc Q également.

Comme $P(X)+1$ et $P(X)-1$ ont un nombre fini de racines et que $P(n+P(n))$ est premier pour une infinité de nombres entiers n, on en déduit que $Q(n)=1$ ou $Q(n)=-1$ pour une infinité d'entiers n, ce qui implique que Q est constant. En notant k le degré de P, on a $\deg(P(P(X)+X))=k^2$, ce qui implique $k=k^2$ et donc $k=1$. Si $P(X)=aX+b$ avec $a\neq 0$, on a $P(P(n)+n)=(a+1)(an+b)$. Comme $a\neq 0$, pour que ce nombre soit premier pour une infinité d'entiers n, on doit avoir $|a+1|=1$, ce qui implique que $a=-2$. Pour que $2n-b$ soit un nombre premier pour une infinité de nombres entiers n, il faut et il suffit que b soit impair.

Ainsi, les solutions sont les polynômes constants égaux à un nombre premier et les polynômes P de la forme $P(X)=-2X+b$ avec b un entier impair.

Exercice 9. Soient $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle. On note Δ_1 la droite parallèle à (BC) passant par A et Δ_2 la droite parallèle à (AD) passant par B. On note E le point d'intersection de Δ_1 avec (CD) et F le point d'intersection de Δ_2 avec (CD). La droite perpendiculaire à Δ_1 passant A coupe (BC) en P, et la droite perpendiculaire à Δ_2 passant par B coupe (AD) en Q. On note Γ_1 le cercle circonscrit du triangle ADE et Γ_2 le cercle circonscrit du triangle BFC. Montrer que Γ_1 et Γ_2 sont tangents si et seulement si (DP) et (CQ) sont perpendiculaires.

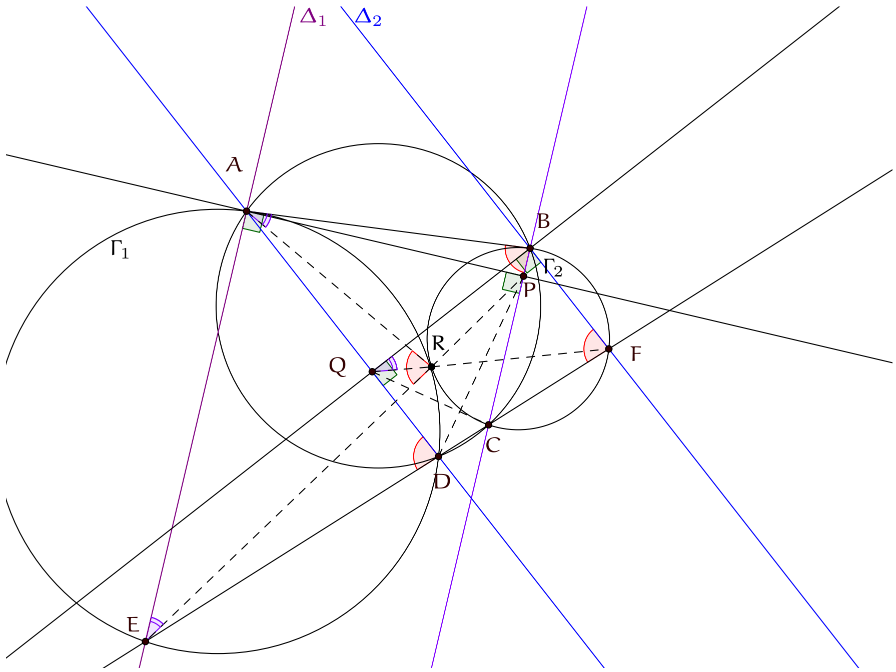


FIGURE 1 – Preuve de la première implication

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

On commence par quelques remarques préliminaires. On a $\widehat{EDA} = 180° - \widehat{ADC} = \widehat{ABC} = 180° - \widehat{EAB}$, donc (AB) et Γ_1 sont tangents. De même, Γ_2 et (AB) sont tangents. Ensuite, comme $(AP) \perp (BC)$ et $(AD) \perp (BQ)$, on a $(PD) \perp (CQ)$ si et seulement si les triangles APD et BCQ sont semblables, c'est-à-dire si et seulement si $\frac{AP}{AD} = \frac{BC}{CQ}$. Or les triangles ADE et BFC sont semblables, donc $\frac{AD}{AE} = \frac{BF}{BC}$. On en déduit que $\frac{AP}{AD} = \frac{BC}{CQ}$ si et seulement si $\frac{AP}{AE} = \frac{BF}{BQ}$ si et seulement si PAE et FBQ sont semblables (car $\widehat{PAE} = \widehat{FBQ} = 90°$).

Supposons maintenant que Γ_1 et Γ_2 sont tangents en R. On vois facilement que $\widehat{ARB} = 90°$, ce qui implique que les points A, Q, P, B, R appartiennent tous au cercle de diamètre $[AB]$. On en déduit que $\widehat{ARP} = 180° - \widehat{ABP} = 180° - \widehat{ABC} = 180° - \widehat{ADE} = 180° - \widehat{ARE}$. Donc E, R, P sont alignés. On montre de même que F, R, Q sont alignés. Ainsi, $\widehat{PEA} = \widehat{REA} = \widehat{RAB} = \widehat{RQB} = \widehat{FQB}$. On en déduit que PEA et FQB sont semblables.

Supposons maintenant que PEA et FQB sont semblables. Soit S le point d'intersection de (PE) et (QF). Nous allons montrer que Γ_1 et Γ_2 sont tangents en S. On a l'égalité des angles

$$\widehat{SQB} = \widehat{FQB} = \widehat{PEA} = \widehat{EPC} = 180° - \widehat{SPB}.$$

On en déduit que S, Q, B, P sont cocycliques. Ainsi, A, Q, P, B, S sont cocycliques. Il en découle que

$$\widehat{ASE} = 180° - \widehat{ASP} = \widehat{ABP} = \widehat{ABC} = 180° - \widehat{ADC} = \widehat{ADE}.$$

Donc $S \in \Gamma_1$. On montre de même que $S \in \Gamma_2$. Pour conclure, on écrit

$$\widehat{BSA} = 90° = \widehat{SAB} + \widehat{ABS} = \widehat{SDA} + \widehat{BCS}.$$

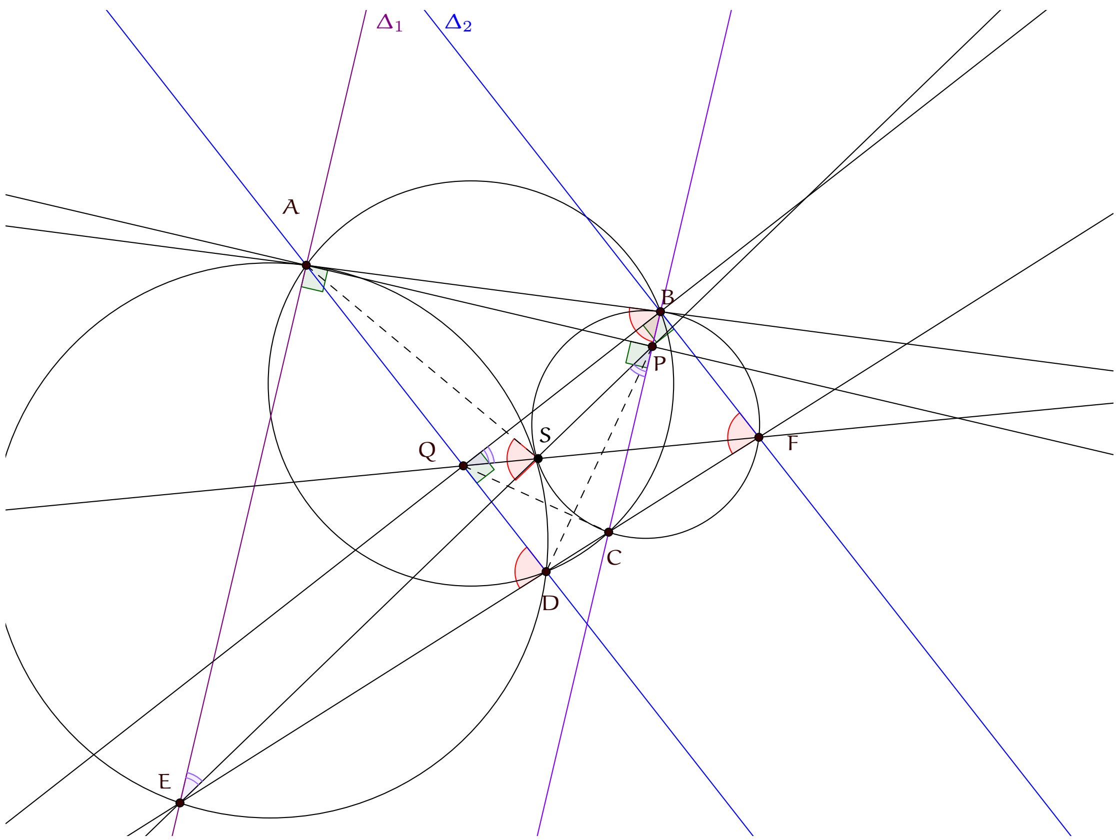


FIGURE 2 – Preuve de la deuxième implication.

Ceci entraîne aisément que la tangente à Γ_1 passant par S est tangente à Γ_2.

Exercice 10. Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier. On dispose les n^2 nombres entiers $1, 2, \ldots, n^2$ dans les n^2 cases d'un échiquier $n \times n$ comme suit : la première ligne contient les nombres $1, 2, \ldots, n$ (de gauche à droite), la deuxième ligne contient les nombres $n+1, n+2, \ldots, 2n$ et ainsi de suite. À chaque étape, on peut choisir deux cases ayant un côté commun, et ajouter ou soustraire un même entier aux deux nombres dans ces deux cases.

Trouver toutes les valeurs de n pour lesquelles il est possible d'obtenir la configuration où il n'y a que des 0, et dans ce cas trouver le nombre minimal d'étapes nécessaires pour y parvenir.

Solution de l'exercice 10 Tout d'abord, on vérifie que la parité de la somme des nombres écrits ne change pas lorsqu'on effectue une étape. La somme des n^2 premiers entiers vaut $n^2(n^2+1)/2$, qui est paire si et seulement n est pair. Comme on veut obtenir la configuration où il n'y a que des 0 (dont la somme des nombres est paire), on voit que n doit être pair.

Réciproquement, si n est pair, montrons qu'il est possible d'atteindre la configuration où il n'y a que des 0, et qu'il faut au moins $3n^2/4$ étapes pour y arriver. Supposons qu'on ait réussi à attendre cette configuration en un certain nombre d'étapes. Considérons alors le graphe G dont les sommets sont les cases et deux sommets sont adjacents si on a modifié leur contenu à une même étape. Soit C une composante connexe de G. Alors C possède au moins deux sommets (car tous les nombres sont non nuls au départ). De plus, C ne peut pas avoir exactement deux sommets (car tous les nombres sont différents au départ). Supposons que C a trois sommets. Dans ce cas, deux de ces sommets ont degré 1 et un a degré 2 (à cause de la géométrie de l'échiquier), et le nombre inscrit au départ dans la case correspondant à celle de degré 2 doit être la somme des nombres correspondant à celles de degré 1. On vérifie aisément que ce n'est possible. Ainsi, chaque composante connexe a au moins 4 sommets, ce qui montre que G a au plus $\frac{n^2}{4}$ composantes connexes.

Notons $C_1, C_2, \ldots, C_k$ les composantes connexes de G ainsi que s_i et a_i respectivement le nombre de sommets et d'arêtes de C_i. Comme $a_i \geqslant s_i - 1$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, on en déduit que le nombre total d'arêtes A de G vérifie

$$A \geqslant \sum_{i=1}^{k}(s_i - 1) = \left(\sum_{i=1}^{k} s_i\right) - k = n^2 - k \geqslant \frac{3n^2}{4},$$

ce qu'il montre qu'il faut au moins $3n^2/4$ étapes.

Lorsque n est pair, en subdivisant l'échiquier en petits carrés 2×2 (chacun contiendra les nombres $i, i+1, i+n, i+n+1$) on vérifie aisément qu'il est possible d'obtenir des 0 dans chacun de ces petits carrés en utilisant 3 opérations par petit carré (on enlève i aux deux de gauche, on enlève $i+1$ aux deux de gauche puis on enlève n aux deux du bas).
