Olympiades Françaises de Mathématiques 2016-2017

Envoi Numéro 3

À renvoyer au plus tard le 15 Janvier

Les consignes suivantes sont à lire attentivement:

Le groupe B est constitué des élèves nés en 2002 ou après, avec les exceptions suivantes :
* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2015-2016 sont dans le groupe A.
Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés Groupe Bne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés communs sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés Groupe A ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe (c'est-à-dire que ses diagonales sont à l'intérieur de $ABCD$), et P l'intersection de ses diagonales $[AC]$ et $[BD]$. On note O_1, O_2, O_3 et O_4 les centres des cercles circonscrits à ABP, BCP, CDP et DAP.
Montrer que $O_1O_2O_3O_4$ est un parallélogramme.

Exercice 2. Soit ABC un triangle. H son orthocentre et P, Q et R les pieds des hauteurs issues de A, B et C.
Montrer que H est le centre du cercle inscrit à PQR.

Exercice 3. Les points D et E divisent le côté $[AB]$ d'un triangle équilatéral en trois parties égales, de telle manière que D est situé entre A et E. Le point F est situé sur $[BC]$ de sorte que $CF = AD$.
Calculer la somme des angles $\widehat{CDF} + \widehat{CEF}$.

Exercices communs

Exercice 4. Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ de centres O et O' sont tangents extérieurement en B. Une tangente commune extérieure touche $\mathcal{C}$ en M et $\mathcal{C}'$ en N. La tangente commune à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ en B coupe (MN) en A. On note C l'intersection de (OA) et (BM), et D l'intersection de $(O'A)$ et (BN).
Montrer que (CD) est parallèle à (MN).

Exercice 5. Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus et Γ son cercle circonscrit. La tangente à Γ en A recoupe (BC) en P. On note M le milieu de $[AP]$. La droite (BM) recoupe Γ en R et la droite (PR) recoupe Γ en S.
Montrer que (AP) et (CS) sont parallèles.

Exercice 6. Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. La droite (AI) recoupe $[BC]$ en D. La médiatrice de $[AD]$ recoupe (BI) en M et (CI) en N.
Montrer que A, M, N et I sont cocycliques.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit ABC un triangle dont l'orthocentre H est distinct des sommets ainsi que du centre du cercle circonscrit O. On désigne par M, N, P les centres des cercles circonscrits aux triangles HBC, HCA et HAB.
Montrer que les droites $(AM), (BN), (CP)$ et (OH) sont concourantes.

Exercice 8. Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. Soit $D \in [BC]$ tel que $\widehat{BAC} = \widehat{ADB}$. Soit H le pied de la hauteur issue de B dans ABC. La perpendiculaire à (BC) passant par H coupe (AD) en K. On suppose que K est à l'intérieur du triangle ABC. Soit M le milieu de $[AC]$.
Montrer que $MH = MK$.

Exercice 9. Soit ABC un triangle d'orthocentre H. Soient (d_1) et (d_2) deux droites perpendiculaires se coupant en H. Soit A_1 (respectivement B_1, C_1) l'intersection de (d_1) avec (BC) (respectivement (CA), (AB)). Soit A_2 (respectivement B_2, C_2) l'intersection de (d_2) avec (BC) (respectivement (CA), (AB)). Soient A_3, B_3, C_3 des points dans le plan tels que $A_1A_2A_3$, $B_1B_2B_3$, $C_1C_2C_3$ soient des triangles directement semblables.

Montrer que A_3, B_3, C_3 sont alignés.

Fin