OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE MARS

MERCREDI 23 MARS 2016

DURÉE : 4 HEURES

Ne pas diffuser sur internet

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**

- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Les collégiens sont dans le groupe B. Les élèves de seconde qui n'étaient pas à l'OFM en 2014-2015, qui sont nés en 2001 ou après et qui n'ont pas passé le test du groupe A le 23 février sont dans le groupe B. Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés Groupe B ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- L'exercice classé commun est à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés Groupe A ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Déterminer tous les entiers strictement positifs n qui sont la somme de deux diviseurs de $n+6$.

Exercice 2. Un point P est situé à l'extérieur d'un cercle Ω. On note A et B les points de contact des deux tangentes à Ω passant par P. Soit M le milieu de $[BP]$. La droite (AM) recoupe le cercle en C, et la droite (PC) recoupe le cercle au point D. Montrer que (AD) et (BP) sont parallèles.

Exercice 3. Soient a, b, c des nombres réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a}{b} + \sqrt{\frac{b}{c}} + \sqrt[3]{\frac{c}{a}} > 2.$$

Exercice commun

Exercice 4. Sur une route horizontale qui borde un ravin, se trouvent n temples. Chacun de ces temples est gardé par deux éléphants qui lui tournent le dos, l'un immédiatement à la gauche du temple et l'autre immédiatement à sa droite. Ces $2n$ éléphants sont de tailles distinctes.
Lorsqu'un éléphant se déplace le long de la route, il piétine tout éléphant qui lui tourne le dos. Par contre, dans un face à face, le plus petit des deux éléphants est toujours piétiné par le plus gros. Un éléphant se déplace toujours dans la même direction jusqu'à ce qu'il soit éventuellement piétiné par un autre (et, dans ce cas, tombe dans le ravin sans espoir de retour).
Montrer qu'il existe un unique temple t tel que, pour tout éléphant e, si e se met à avancer et si tous les autres éléphants restent immobiles, e ne pourra pas atteindre t.

Exercices du groupe A

Exercice 5. Soient a et b des entiers strictement positifs tels que $a!b!$ est un multiple de $a!+b!$. Montrer que $3a \geqslant 2b+2$.

Exercice 6. Soit ABC un triangle rectangle en C, et soit H le pied de la hauteur issue de C. On choisit un point D à l'intérieur du triangle CBH tel que le milieu de $[AD]$ se situe sur (CH). Soit P le point d'intersection entre (BD) et (CH). Soit ω le demi-cercle de diamètre $[BD]$ qui rencontre le segment $[CB]$ en un point intérieur. Une droite passant par P est tangente à ω en Q. Montrer que les droites (CQ) et (AD) se rencontrent sur ω.