OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE MAI

MERCREDI 11 MAI 2016

DURÉE : 4 HEURES

Ne pas diffuser sur internet

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**

- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Les élèves qui se présentent au test de sélection pour la compétition JBMO sont dans le groupe B. Les élèves qui se présentent au test de sélection pour les compétitions OIM et MYMC sont dans le groupe A.

- Les exercices classés Groupe B ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- L'exercice classé commun est à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés Groupe A ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Exercices du groupe B (sélection pour la compétition JBMO)

Exercice 1. Sur une même ligne, on a écrit 23 entiers strictement positifs. Prouver qu'en ajoutant judicieusement des parenthèses, des signes $+$ et des signes $\times$, il est possible d'obtenir une expression divisible par 2000.

Exercice 2. Soit a, b, c des réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Prouver que

$$\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b} \geq 3.$$

Exercice 3. Existe-t-il deux entiers naturels non nuls a et b et un nombre premier p tels que $a^3 - b^3 = 4p^2$?

Exercice commun

Exercice 4. Soit ABC un triangle acutangle et H son orthocentre. Soit G le point tel que $ABGH$ soit un parallélogramme. Soit I le point de la droite (GH) tel que (AC) passe par le milieu de $[HI]$. On suppose que (AC) coupe le cercle circonscrit à GCI en C et J. Montrer que $IJ = AH$.

Exercices du groupe A (sélection pour les compétitions OIM et MYMC)

Exercice 5. On suppose qu'une suite $a_1, a_2, \ldots$ de nombres réels strictement positifs satisfait

$$a_{k+1} \geqslant \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

pour tout entier strictement positif k. Montrer que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geqslant n$ pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 6. Soit S un ensemble non vide d'entiers strictement positifs. On dit qu'un entier strictement positif n est *propre* s'il peut s'écrire d'une manière et une seule comme somme d'un nombre impair (éventuellement égal à 1) d'éléments distincts de S. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs qui ne sont pas propres.