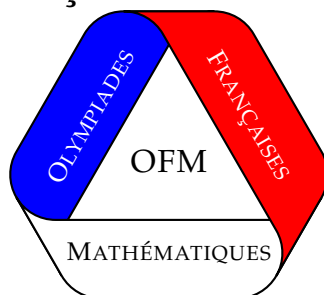


OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES



TEST DU 26 FÉVRIER

DURÉE : 4 HEURES

Instructions

- ▷ Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Exercice 1. Les cases d'une grille à 10 lignes et 10 colonnes sont coloriées en blanc et en noir. Un coloriage de ces cases est dit *homogène* s'il contient un carré 3×3 monochrome, et *inhomogène* sinon. Montrer qu'il existe plus de coloriages inhomogènes que de coloriages homogènes.

Exercice 2. Montrer que si a, b, c sont des nombres réels positifs vérifiant $a + b + c = 1$ alors

$$\frac{7 + 2b}{1 + a} + \frac{7 + 2c}{1 + b} + \frac{7 + 2a}{1 + c} \geq \frac{69}{4}.$$

Exercice 3. Soit ABC un triangle, et M le milieu de $[BC]$. On note I_b et I_c les centres des cercles inscrits à AMB et AMC . Montrer que le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABI_b et ACI_c se situe sur la droite (AM) .

Exercice 4. Soit $n \geq 1$ un entier. On suppose qu'il existe exactement 2005 couples (x, y) d'entiers naturels tels que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{n}$. Montrer que n est le carré d'un entier.
N.B. Si $x \neq y$ alors $(x, y) \neq (y, x)$.