Olympiades Françaises de Mathématiques 2015-2016

Envoi Numéro 3 – Algèbre

À renvoyer au plus tard le vendredi 15 janvier

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué :

* des collégiens ;

* des élèves de Seconde qui n'étaient pas à l'OFM en 2014-2015.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B » ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x)f(y) - f(xy) = x + y$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $n \geqslant 3$ un nombre entier et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels.

(a) On suppose que $a_i < \max(a_{i-1}, a_{i+1})$ pour tout $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$. Montrer que $a_i < \max(a_1, a_n)$ pour tout $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$.

(b) On suppose que $a_i \leqslant \max(a_{i-1}, a_{i+1})$ pour tout $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$. Est-il vrai que $a_i \leqslant \max(a_1, a_n)$ pour tout $i \in \{2, 3, \dots, n-1\}$?

N.B. Si x et y sont deux nombres réels, on note $\max(x, y)$ le plus grand des deux.

Exercice 3. Soient $0 \leqslant a, b, c, d, e \leqslant 1$ des nombres réels. Montrer que

$$(1 + a + b + c + d + e)^2 \geqslant 4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2).$$

Exercices communs

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(f(x) + 3y) = 12x + f(f(y) - x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\sqrt{\frac{a}{b+c}} + \sqrt{\frac{b}{c+a}} + \sqrt{\frac{c}{a+b}} > 2.$$

Exercice 6. Soit $n > 1$ un entier. Trouver tous les polynômes P non constants à coefficients réels tels que

$$P(x)\, P\left(x^2\right) P\left(x^3\right) \cdots P\left(x^n\right) = P\left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)$$

pour tout nombre réel x.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit $n \geqslant 2$ un nombre entier et soient $x_1, \dots, x_n$ des nombres réels positifs tels que $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$. Montrer que

$$\frac{1}{n-1+x_1} + \frac{1}{n-1+x_2} + \cdots + \frac{1}{n-1+x_n} \leqslant 1.$$

Exercice 8. On note $S(k)$ la somme des chiffres d'un nombre entier k. On dit qu'un entier a est d'ordre n s'il existe une suite d'entiers $a_0, a_1, \dots, a_n$ tels que $a_n = a$ et $a_{i+1} = a_i - S(a_i)$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n-1$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ il existe un entier b qui soit d'ordre n mais qui ne soit pas d'ordre $n+1$.

Exercice 9. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x)f\left(yf(x) - 1\right) = x^2 f(y) - f(x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.