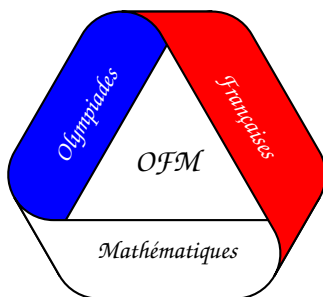


Olympiades Françaises de Mathématiques 2015-2016



Envoi Numéro 2

À renvoyer au plus tard le 12 décembre

Les consignes suivantes sont à lire attentivement:

Le groupe B est constitué:

- * des collégiens;
- * des élèves de Seconde qui n'étaient pas à l'OFM en 2014-2015.

Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés Groupe B ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés communs sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés Groupe A ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soit A un point extérieur à un cercle \mathcal{C} de centre O . Un point P se déplace sur \mathcal{C} . Soit M le point d'intersection entre (AP) et la bissectrice de \widehat{POA} . Montrer que M se déplace sur un cercle que l'on décrira.

Exercice 2. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{A} = 60^\circ$. On note O le centre du cercle circonscrit, I le centre du cercle inscrit et H l'orthocentre. Montrer que

- 1) B, C, O, I, H sont cocycliques
- 2) OIH est isocèle.

Exercice 3. Par un point A d'un cercle de centre O , on mène une tangente à ce cercle, et on prend deux points B et C sur cette tangente, avec C entre A et B . De B et C , on mène (BD) et (CE) tangentes au cercle. Démontrer que $\widehat{BOC} = \widehat{DAE}$.

Exercices communs

Exercice 4. Soit ABC un triangle. Soit P appartenant au cercle circonscrit. On sait que les projetés de P sur (BC) , (CA) et (AB) sont alignés sur la droite dite de Simson. On suppose que cette droite passe par le point diamétralement opposé à P . Montrer qu'elle passe également par le centre de gravité de ABC .

Exercice 5. Soit ABC un triangle. On suppose que la médiane (BM) et la bissectrice (CD) se coupent en un point J tel que $JB = JC$. Soit H le pied de la hauteur issue de A . Montrer que $JM = JH$.

Exercice 6. Soit ABC un triangle, et D, E, F les pieds des hauteurs de A, B, C respectivement. On définit aussi H l'orthocentre de ABC , O le centre de son cercle circonscrit, et X le point de la droite (EF) qui vérifie $XA = XD$. Montrer que les droites (AX) et (OH) sont perpendiculaires.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit ABC un triangle, et Γ son cercle circonscrit. Soit M le milieu de l'arc BC ne contenant pas A . Un cercle \mathcal{C} est tangent à $[AB)$, $[AC)$ en D et E respectivement, et tangent intérieurement à Γ en F . Montrer que (DE) , (BC) et (FM) sont concourantes.

Exercice 8. Soit ABC un triangle, D, E, F les points de tangence du cercle inscrit sur les côtés (BC) , (AC) et (AB) , M le milieu de $[BC]$, I le centre du cercle inscrit de ABC . G et H sont définis comme les symétriques de E et F par rapport à I . On note Q l'intersection entre les droites (BC) et (GH) . Montrer que les droites (IQ) et (IM) sont perpendiculaires.

Exercice 9. Soit ABC un triangle non-isocèle en A . On note D, E, F les points de tangence du cercle inscrit sur les côtés (BC) , (AC) et (AB) , I le centre du cercle inscrit de ABC . Soient P et Q les intersections de la droite (EF) avec le cercle Ω circonscrit à ABC . Soient enfin O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits à AIB et AIC . Montrer que le centre du cercle circonscrit à DPQ se situe sur la droite (O_1O_2) .