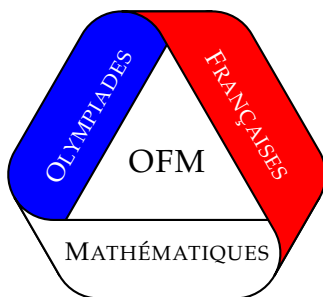


# OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES



TEST DE SÉLECTION POUR LA JBMO 2014 ET DEUXIÈME JOUR DE TEST POUR  
L'OIM 2014

MERCREDI 14 MAI 2014

DURÉE : 4 HEURES

## Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.  
Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.  
Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.  
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

**Les élèves qui candidatent pour participer à la JBMO traitent les exercices J1, J2, J3 et 4.  
Les élèves qui candidatent pour participer à l'OIM, et qui ont composé la veille, traitent les exercices 4, 5 et 6.**

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

## Exercices spécifiques au test de sélection pour la JBMO

*Exercice J1.* Déterminer le plus grand nombre d'entiers que l'on peut extraire de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, 2014\}$  de sorte que la différence de deux quelconques de ces entiers soit différente de 17.

*Exercice J2.* Soit  $P$  un point à l'extérieur d'un cercle  $\mathcal{C}$ . Les tangentes à  $\mathcal{C}$  passant par  $P$  touchent  $\mathcal{C}$  en  $A$  et  $B$ . Une droite passant par  $P$  intersecte  $\mathcal{C}$  aux points  $Q$  et  $R$ . Soit  $S$  un point de  $\mathcal{C}$  tel que  $(BS) \parallel (QR)$ . Montrer que  $(SA)$  passe par le milieu de  $[QR]$ .

*Exercice J3.* Soit  $n$  un entier strictement positif, et  $a_1, a_2, \dots, a_n$  des réels tels que  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0$  et  $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1$ . Montrer que

$$a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \dots + (2n - 1)a_n^2 \leq 1.$$

## Exercice commun

*Exercice 4.* On note  $\mathbb{N}^*$  l'ensemble des entiers naturels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  telles que

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

pour tous entiers strictement positifs  $m$  et  $n$ .

## Exercices spécifiques au test de sélection pour l'OIM

*Exercice 5.* Soit  $n$  un entier strictement positif et  $x_1, \dots, x_n$  des réels strictement positifs. Montrer qu'il existe des nombres  $a_1, \dots, a_n \in \{-1, 1\}$  tels que :

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_n^2 \geq (a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n)^2.$$

*Exercice 6.* Soit  $\omega$  le cercle circonscrit à un triangle  $ABC$ . On désigne par  $M$  et  $N$  les milieux des côtés  $[AB]$  et  $[AC]$  respectivement, et par  $T$  le milieu de l'arc  $BC$  de  $\omega$  ne contenant pas  $A$ . Les cercles circonscrits aux triangles  $AMT$  et  $ANT$  rencontrent les médiatrices de  $[AC]$  et  $[AB]$  aux points  $X$  et  $Y$  respectivement ; on suppose que  $X$  et  $Y$  sont à l'intérieur du triangle  $ABC$ . Les droites  $(MN)$  et  $(XY)$  se coupent en  $K$ . Montrer que  $KA = KT$ .