OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE SÉLECTION POUR LA JBMO 2014 ET DEUXIÈME JOUR DE TEST POUR L'OIM 2014

MERCREDI 14 MAI 2014

DURÉE : 4 HEURES

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Les élèves qui candidatent pour participer à la JBMO traitent les exercices J1, J2, J3 et 4. Les élèves qui candidatent pour participer à l'OIM, et qui ont composé la veille, traitent les exercices 4, 5 et 6.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Exercices spécifiques au test de sélection pour la JBMO

Exercice J1. Déterminer le plus grand nombre d'entiers que l'on peut extraire de l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2014\}$ de sorte que la différence de deux quelconques de ces entiers soit différente de 17.

Exercice J2. Soit P un point à l'extérieur d'un cercle $\mathcal{C}$. Les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par P touchent $\mathcal{C}$ en A et B. Une droite passant par P intersecte $\mathcal{C}$ aux points Q et R. Soit S un point de $\mathcal{C}$ tel que $(BS) \parallel (QR)$. Montrer que (SA) passe par le milieu de $[QR]$.

Exercice J3. Soit n un entier strictement positif, et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels tels que $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_n \geqslant 0$ et $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. Montrer que

$$a_1^2 + 3a_2^2 + 5a_3^2 + \cdots + (2n-1)a_n^2 \leqslant 1.$$

Exercice commun

Exercice 4. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels strictement positifs. Trouver toutes les fonctions $f \colon \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

pour tous entiers strictement positifs m et n.

Exercices spécifiques au test de sélection pour l'OIM

Exercice 5. Soit n un entier strictement positif et $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs. Montrer qu'il existe des nombres $a_1, \ldots, a_n \in \{-1, 1\}$ tels que :

$$a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + \cdots + a_nx_n^2 \geqslant (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n)^2.$$

Exercice 6. Soit ω le cercle circonscrit à un triangle ABC. On désigne par M et N les milieux des côtés $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, et par T le milieu de l'arc BC de ω ne contenant pas A. Les cercles circonscrits aux triangles AMT et ANT rencontrent les médiatrices de $[AC]$ et $[AB]$ aux points X et Y respectivement ; on suppose que X et Y sont à l'intérieur du triangle ABC. Les droites (MN) et (XY) se coupent en K. Montrer que $KA = KT$.