OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

Envoi no. 5
Pour le 15 avril 2014

Exercices du groupe B

Exercice 1. Déterminer tous les entiers a et b tels que $(a+1)(b-1) = a^2b^2$.

Exercice 2. Prouver que tout ensemble de 90 nombres choisis dans $\{1, 2, \cdots, 100\}$ en contient 10 qui forment une progression arithmétique.

Exercice 3. Les diagonales du quadrilatère convexe $ABCD$ sont perpendiculaires et se rencontrent en O. La perpendiculaire à (AB) passant par O rencontre (AB) en M et (CD) en M'. La perpendiculaire à (BC) passant par O rencontre (BC) en N et (DA) en N'. La perpendiculaire à (CD) passant par O rencontre (CD) en P et (AB) en P'. La perpendiculaire à (DA) passant par O rencontre (DA) en Q et (BC) en Q'.

Prouver que les points $M, N, P, Q, M', N', P', Q'$ sont cocycliques.

Exercices communs

Exercice 4. A l'intérieur du cercle Γ se trouvent trois cercles γ_1, γ_2 et γ_3, et tangents à Γ respectivement en A, B et C, tous distincts. Les cercles γ_2 et γ_3 ont un point commun K qui appartient à $[BC]$, les cercles γ_3 et γ_1 ont un point commun L qui appartient à $[CA]$, et les cercles γ_1 et γ_2 ont un point commun M qui appartient à $[AB]$.

Prouver que le centre de Γ appartient à γ_1, γ_2 et γ_3.

Exercice 5. Soit $n, m \geqslant 1$ des entiers, avec m impair.
Prouver que $2^m - 1$ et $2^n + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 6. On désigne par K la valeur maximale de

$$|x_1 - x_2| \cdot |x_1 - x_3| \cdot |x_1 - x_4| \cdot |x_2 - x_3| \cdot |x_2 - x_4| \cdot |x_3 - x_4|$$

où $x_1, x_2, x_3, x_4 \in [0; 1]$.

a) Prouver que $\frac{4}{243} < K < \frac{1}{27}$.

b) Déterminer K.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Si $n > 0$ est un entier, on désigne par $d(n)$ le nombre de diviseurs strictement positifs de n.

a) Existe-t-il une suite $(a_i)_{i \geqslant 1}$ strictement croissante d'entiers strictement positifs tels que, pour tout i suffisamment grand, le nombre a_i soit divisible par exactement $d(i) - 1$ termes de la suite (y compris lui-même) ?

b) Existe-t-il une suite $(a_i)_{i \geqslant 1}$ strictement croissante d'entiers strictement positifs tels que, pour tout i suffisamment grand, le nombre a_i soit divisible par exactement $d(i) + 1$ termes de la suite (y compris lui-même) ?

Exercice 8. Soit ABC un triangle. On désigne par D le pied de la bissectrice de $\widehat{BAC}$, et par E le pied de la hauteur issue de A. La médiatrice de $[AD]$ rencontre les demi-cercles de diamètres respectifs $[AB]$ et $[AC]$ construits extérieurement à ABC, en X et Y.

Prouver que les points X, Y, D, E sont cocycliques.

Exercice 9. On considère une rangée de cases numérotées $0, 1, ..., k$ de gauche à droite où, pour chaque $i \geqslant 1$, la case numéro i contient x_i jetons. Il n'y a initialement aucun jeton sur la case numéro 0. A tour de rôle, Alice et Bob jouent alors selon les règles suivantes :
- Bob choisit un ensemble S de jetons, pas forcément tous sur la même case.
- Alice peut ensuite soit éliminer tous les jetons qui ne sont pas dans S mais alors déplacer chaque jeton de S de la case qu'il occupe à la case voisine à sa gauche (un tel jeton passe donc d'une case numéro i à la case numéro $i - 1$, soit éliminer tous les jetons qui sont dans S mais alors déplacer chaque jeton qui n'est pas dans S de la case qu'il occupe à la case voisine à sa gauche.

Bob gagne la partie s'il arrive à amener un jeton sur la case numéro 0, et Alice gagne si elle arrive à éliminer tous les jetons.

1) Prouver qu'Alice possède une stratégie gagnante si $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} 2^{-i} x_i < 1$.

2) Est-il vrai que si $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} 2^{-i} x_i \geqslant 1$ alors Bob possède une stratégie gagnante ?