Olympiades Françaises de Mathématiques 2013-2014

Envoi Numéro 1

À renvoyer au plus tard le vendredi 15 novembre

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

Le groupe B est constitué des élèves nés en 1999 ou après, avec les exceptions suivantes :
* les élèves de Terminale sont dans le groupe A,
* les élèves de Seconde et Première qui étaient à l'OFM en 2012-2013 sont dans le groupe A.
Les autres élèves sont dans le groupe A.

- Les exercices classés « Groupe B »ne sont à chercher que par les élèves du groupe B.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « Groupe A » ne sont à chercher que par les élèves du groupe A.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.

- Bien préciser votre nom sur chaque copie.

Exercices du groupe B

Exercice 1. Soient A, B, C, D quatre points sur un même cercle. Notons A' et C' les projetés orthogonaux de A et C sur (BD), et B' et D' les projetés orthogonaux de B et D sur (AC). Montrer que A', B', C', D' sont cocycliques.

Exercice 2. Sur la diagonale $[BD]$ d'un carré $ABCD$ on a choisi un point E. Soient O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits aux triangles ABE et ADE respectivement. Montrer que AO_1EO_2 est un carré.

Exercice 3. Un quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle. Ses diagonales se coupent au point K. Le cercle passant par A, B, K croise les droites (BC) et (AD) aux points M et N respectivement. Montrer que $KM = KN$.

Exercices Communs

Exercice 4. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus, et dont l'angle $\widehat{B}$ est de 60 degrés (=$\pi/3$ radian). Les hauteurs $[AD]$ et $[CE]$ se coupent au point H. Prouver que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est situé sur la bissectrice commune des angles $\widehat{AHE}$ et $\widehat{CHD}$.

Exercice 5. A l'extérieur du triangle ABC on construit les deux points X et Y vérifiant :

— le triangle AXB est isocèle de base $[AB]$;
— le triangle BYC est isocèle de base $[BC]$;
— $\widehat{AXB} + \widehat{BYC} = 180°$.

Soit Z le milieu de $[AC]$. Montrer que les droites (XZ) et (YZ) sont perpendiculaires.

Exercice 6. Le sommet B d'un angle $\widehat{ABC}$ se trouve à l'extérieur d'un cercle ω tandis que les demi-droites $[BA)$ et $[BC)$ le traversent. Soit K un point d'intersection du cercle ω avec $[BA)$. La perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ passant par K recoupe le cercle au point P, et la droite (BC) au point M. Montrer que le segment $[PM]$ est deux fois plus long que la distance entre le centre de ω et la bissectrice de $\widehat{ABC}$.

Exercices du groupe A

Exercice 7. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On considère les deux quadrilatères convexes F_1 et F_2, dont chacun a deux sommets opposés qui sont les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$, et dont les deux autres sommets sont les milieux des côtés opposés du quadrilatère $ABCD$. Montrer que les aires de F_1 et de F_2 sont égales si et seulement si au moins l'une des diagonales du quadrilatère $ABCD$ le divise en triangles d'aires égales.

Exercice 8. Le cercle ω passe par les sommets B et C du triangle ABC et coupe les côtés $[AB]$ et $[AC]$ aux points D et E respectivement. Les segments $[CD]$ et $[BE]$ se coupent en un point O. Soient M et N les centres des cercles inscrits dans les triangles ADE et ODE respectivement. Montrer que le milieu de l'arc DE (le plus petit des deux arcs) du cercle ω se trouve sur la droite (MN).

Exercice 9. Un cercle de centre O est inscrit dans un quadrilatère $ABCD$ dont les côtés ne sont pas parallèles. Montrer que le point O coïncide avec le point d'intersection des lignes médianes du quadrilatère si et seulement si $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. (Une ligne médiane du quadrilatère est une droite reliant les milieux des côtés opposés.)

Fin