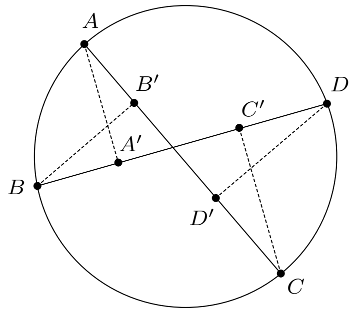
OFM 2013-2014 : solution de l'envoi no. 1

Exercices groupe B

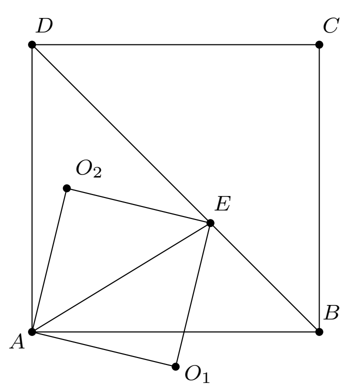
Exercice 1. Soient A, B, C, D quatre points sur un même cercle. Notons A' et C' les projetés orthogonaux de A et C sur (BD), et B' et D' les projetés orthogonaux de B et D sur (AC). Montrer que A', B', C', D' sont cocycliques.

Solution.



Comme A, B, A', B' sont cocycliques (sur le cercle de diamètre $[AB]$), les angles orientés de droites (BA', BA) et $(B'A', B'A)$ sont égaux, donc $(BD, BA) = (B'A', B'D')$. De même, $(CD, CA) = (C'A', C'D')$. Or, $(CD, CA) = (BD, BA)$ puisque A, B, C, D sont cocycliques, donc $(B'A', B'D') = (C'A', C'D')$, ce qui prouve que A', B', C', D' sont cocycliques.

Exercice 2. Sur la diagonale $[BD]$ d'un carré $ABCD$ on a choisi un point E. Soient O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits aux triangles ABE et ADE respectivement. Montrer que AO_1EO_2 est un carré.

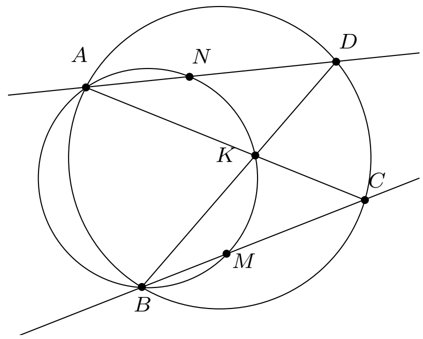


Solution.

$\widehat{AO_1E} = 2\widehat{ABE} = 90°$ et $O_1A = O_1E$ donc AO_1E est un triangle isocèle rectangle en O_1. De même, AO_2E est un triangle isocèle rectangle en O_2.

Comme O_1 et O_2 ne sont pas dans le même demi-plan délimité par (AE), on en déduit que AO_1EO_2 est un carré.

Exercice 3. Un quadrilatère $ABCD$ est inscrit dans un cercle. Ses diagonales se coupent au point K. Le cercle passant par A, B, K croise les droites (BC) et (AD) aux points M et N respectivement. Montrer que $KM = KN$.

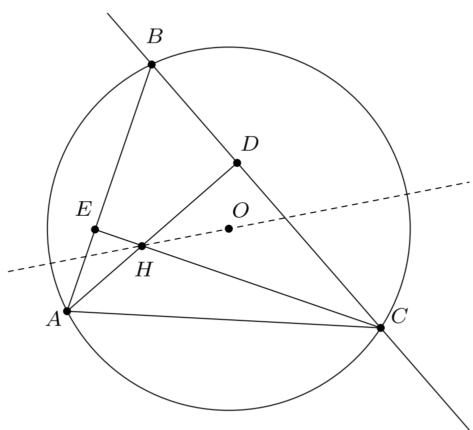


Solution.

On a $(NM, NK) = (BM, BK) = (BC, BD) = (AC, AD) = (AK, AN) = (MK, MN)$ donc MKN est isocèle en K.

Exercices communs

Exercice 4. Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus, et dont l'angle $\widehat{B}$ est de 60 degrés ($=\pi/3$ radian). Les hauteurs $[AD]$ et $[CE]$ se coupent au point H. Prouver que le centre du cercle circonscrit au triangle ABC est situé sur la bissectrice commune des angles $\widehat{AHE}$ et $\widehat{CHD}$.



Solution.

Puisque B, E, H, D sont sur le cercle de diamètre $[BH]$, on a $\widehat{DHE} = 180° - \widehat{EBD} = 120°$, donc $\widehat{AHC} = 120°$. Comme $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 120°$, on en déduit que A, C, O, H sont cocycliques.

Par conséquent, $\widehat{CHO} = \widehat{CAO} = \frac{1}{2}(\widehat{CAO} + \widehat{OCA}) = \frac{1}{2}(180° - \widehat{AOC}) = 90° - \widehat{ABC} = 30°$.

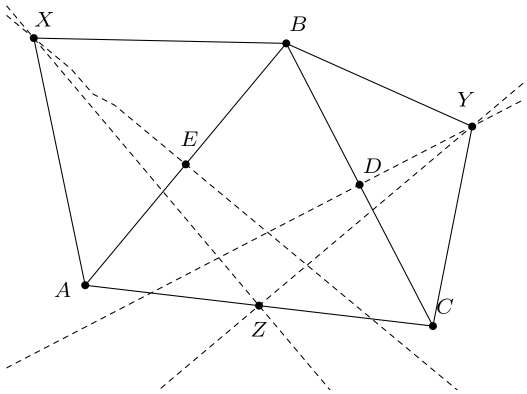
De plus, comme $(CH) \perp (AB)$ et $(AH) \perp (BC)$, on a $\widehat{CHD} = \widehat{ABC} = 60°$, donc O est sur la bissectrice de $\widehat{CHD}$.

Exercice 5. A l'extérieur du triangle ABC on construit les deux points X et Y vérifiant :

– le triangle AXB est isocèle de base $[AB]$;
– le triangle BYC est isocèle de base $[BC]$;
– $\widehat{AXB} + \widehat{BYC} = 180°$.

Soit Z le milieu de $[AC]$. Montrer que les droites (XZ) et (YZ) sont perpendiculaires.

Solution. Notons D et E les milieux de $[BC]$ et $[AB]$.



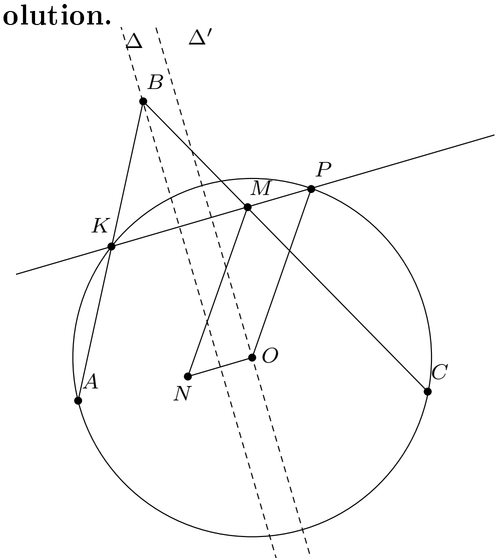
On a

- $(XE) \perp (DZ)$ car $(DZ) \parallel (AB)$
- $(EZ) \perp (DY)$ car $(EZ) \parallel (BC)$
- $\dfrac{XE}{DZ} = \dfrac{XE}{EA} = \dfrac{CD}{DY} = \dfrac{EZ}{DY}$ (la deuxième égalité provient du fait que les triangles rectangles XEA et CDY sont semblables)

donc XEZ et ZDY sont semblables. Comme $(XE) \perp (DZ)$, on en déduit que $(XZ) \perp (ZY)$.

Exercice 6. Le sommet B d'un angle $\widehat{ABC}$ se trouve à l'extérieur d'un cercle ω tandis que les demi-droites $[BA)$ et $[BC)$ le traversent. Soit K un point d'intersection du cercle ω avec $[BA)$. La perpendiculaire à la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$ passant par K recoupe le cercle au point P, et la droite (BC) au point M. Montrer que le segment $[PM]$ est deux fois plus long que la distance entre le centre de ω et la bissectrice de $\widehat{ABC}$.

Solution.



Soit O le centre du cercle ω. Notons Δ la bissectrice de $\widehat{ABC}$, Δ' la parallèle à Δ passant par O et N le symétrique de O par rapport à Δ.

La symétrie $s_{\Delta'}$ par rapport à Δ' envoie O sur O et P sur K (car $(PK) \perp \Delta'$ et Δ' passe par O).

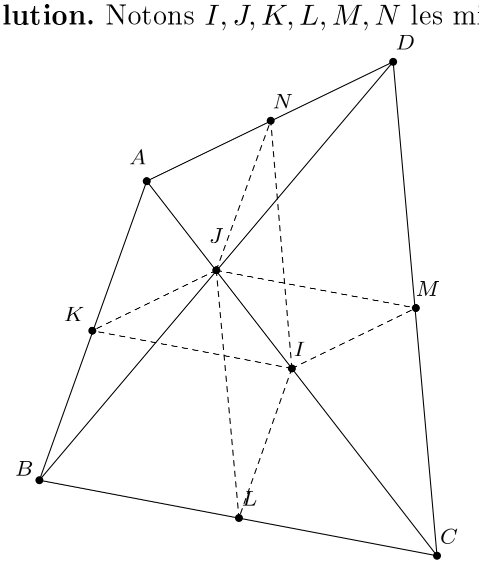
La symétrie s_Δ par rapport à Δ envoie O sur N et K sur M.

Par conséquent, la composée $s_\Delta \circ s_{\Delta'}$ envoie O sur N et P sur M. Or, $s_\Delta \circ s'_\Delta$ est une translation, donc $MNOP$ est un parallélogramme. Il s'ensuit que $PM = ON = 2d(O, \Delta)$.

Exercices groupe A

Exercice 7. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On considère les deux quadrilatères convexes F_1 et F_2, dont chacun a deux sommets opposés qui sont les milieux des diagonales $[AC]$ et $[BD]$, et dont les deux autres sommets sont les milieux des côtés opposés du quadrilatère $ABCD$. Montrer que les aires de F_1 et de F_2 sont égales si et seulement si au moins l'une des diagonales du quadrilatère $ABCD$ le divise en triangles d'aires égales.

Solution. Notons I, J, K, L, M, N les milieux de $[AC], [BD], [AB], [BC], [CD]$ et $[DA]$.



On remarque que (IK) et (JM) sont parallèles, puisqu'ils sont parallèles à (BC). De même, $(IM) \mathbin{/\!\!/} (JK)$. On en déduit que $IMJK$ est un parallélogramme, et de même $INJL$ est un parallélogramme.

Notons $[\vec{u}, \vec{v}]$ le produit mixte des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. C'est l'aire d'un parallélogramme $XYZT$ tel que $\overrightarrow{XY} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{YZ} = \vec{v}$, affectée d'un signe $+$ si $XYZT$ est parcouru dans le sens direct et d'un signe $-$ sinon.

On vérifie facilement les propriétés suivantes :

- $[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$
- $[\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}] = [\vec{u}, \vec{v}] + [\vec{u}, \vec{w}]$
- $[\vec{v} + \vec{w}, \vec{u}] = [\vec{v}, \vec{u}] + [\vec{w}, \vec{u}]$.

(La deuxième propriété dit que si un parallélogramme P est la réunion de deux parallélogrammes P_1 et P_2 alors l'aire de P est la somme des aires de P_1 et de P_2 ; la troisième propriété découle des deux précédentes.)

Comme $IK = BC/2$ et $KJ = AD/2$, l'aire de $IMJK$ est égale à $\pm\frac{1}{4}[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}]$ et de même l'aire de $INJM$ est égale à $\pm\frac{1}{4}[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]$. On en déduit que les aires de F_1 et de F_2 sont égales si et seulement si

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = \pm[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}].$$

On a

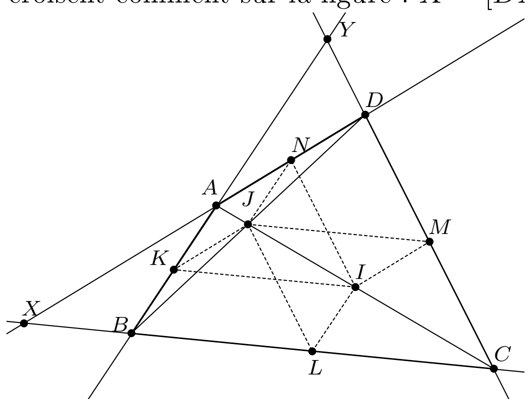
$$\begin{aligned}
&[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}] \\
&\iff \quad [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}] - [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}] - [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}] \\
&\iff \quad [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}] \\
&\iff \quad (AC) \text{ partage le quadrilatère en deux parties d'aires égales.}
\end{aligned}$$

De même, $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = -[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}]$ si et seulement si (BD) partage le quadrilatère en deux parties d'aires égales.

Autre solution. Comme ci-dessus, on remarque que $IMJK$ et que $INJL$ sont des parallélogrammes.

Si $(AD) \parallel (BC)$ on obtient que l'aire de $IMJK$ est égale à 0. Alors l'aire de $INJL$ est égale à 0 si et seulement si $(AB) \parallel (CD)$, ce qui équivaut à ce que les diagonales du quadrilatère $ABCD$ le divisent en triangles d'aires égales.

On se ramène donc à traiter le cas où (AD) et (BC) se croisent. De même, on peut supposer que (AB) et (CD) se croisent. Sans perte de généralité, on peut supposer qu'ils se croisent comment sur la figure : $X = [DA) \cap [CB)$, $Y = [BA) \cap [CD)$.



L'aire de $IMJK$ est égale à

$$KJ \cdot KI \sin \widehat{IKJ} = \frac{1}{4} BC \cdot AD \sin \widehat{AXB}. \tag{1}$$

L'aire de $INJL$ est égale à

$$NJ \cdot NI \sin \widehat{JNI} = \frac{1}{4} AB \cdot CD \sin \widehat{AYD}. \tag{2}$$

D'après la loi des sinus pour les triangles AXB et AYD, on a

$$\frac{\sin \widehat{AXB}}{\sin \widehat{AYD}} = \frac{AB \sin \widehat{XAB}}{BX} \frac{DY}{AD \sin \widehat{YAD}} = \frac{AB \cdot DY}{BX \cdot AD}. \tag{3}$$

En combinant (1), (2) et (3), on obtient que l'aire de $IMJK$ est égale à l'aire de $INJL$ si et seulement si

$$\frac{CB}{BX} = \frac{CD}{DY}.$$

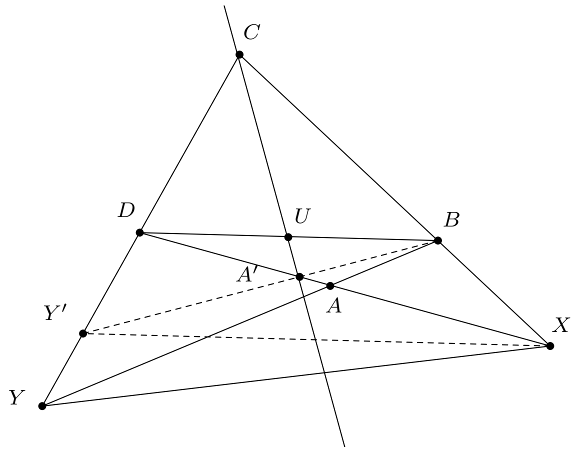
Cette dernière égalité équivaut à dire que $(XY) \parallel (BD)$.

On a que (AC) divise $ABCD$ en triangles d'aires égales si et seulement si J se trouve qur (AC) (puisque l'aire de AJB est égale à celle de AJD et l'aire de CJB est égale à celle de CJD).

Il ne reste plus qu'à noter que dans un quadrilatère $XBDY$, la droite joignant $C = (XB) \cap (DY)$ et $A = (XD) \cap (BY)$ passe par le milieu de $[BD]$ si et seulement si (XY) et (BD) sont parallèles.

En effet, si (XY) et (BD) sont parallèles, il existe une homothétie de centre C qui envoie B et D sur X et Y respectivement. Cette homothétie envoie le milieu de $[BD]$ sur le milieu de $[XY]$ donc ces deux milieux sont alignés avec C, et de même ils sont alignés avec A.

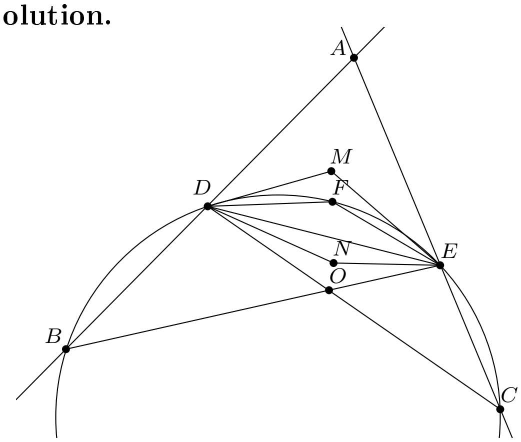
Réciproquement, supposons que (AC) passe par le milieu U de $[BD]$. Soit Y' le point d'intersection de (CY) avec la parallèle à (BD) passant par X. Soit $A' = (BY') \cap (DX)$.



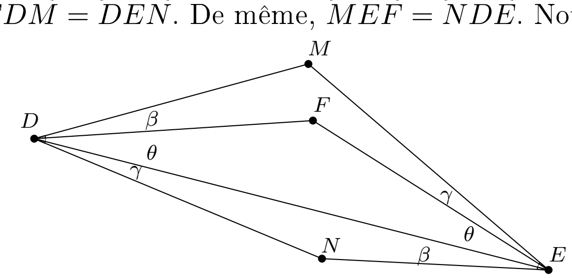
D'après le paragraphe précédent, C, A' et U sont alignés, donc A appartient à la droite (CA'). De plus, A appartient à (DX), donc $A = (CA') \cap (DX) = A'$. On en déduit que $Y = Y'$, et que $XBDY$ est un parallélogramme.

Exercice 8. Le cercle ω passe par les sommets B et C du triangle ABC et coupe les côtés $[AB]$ et $[AC]$ aux points D et E respectivement. Les segments $[CD]$ et $[BE]$ se coupent en un point O. Soient M et N les centres des cercles inscrits dans les triangles ADE et ODE respectivement. Montrer que le milieu de l'arc DE (le plus petit des deux arcs) du cercle ω se trouve sur la droite (MN).

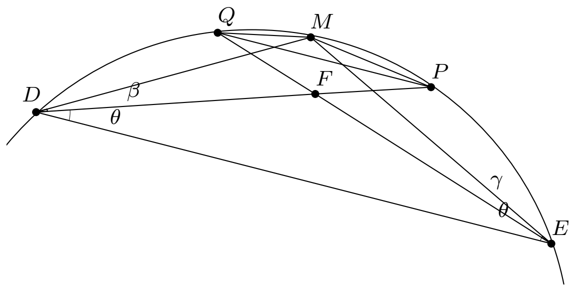
Solution.



Notons $\theta = (DE, DF) = (EF, ED)$. On a $2(DF, DM) + 2\theta = 2(DE, DM) = (DE, DA) = \theta + (DF, DA) = \theta + (DF, DB) = \theta + (EF, EB) = 2\theta + (ED, EO) = \theta + 2(ED, EN)$, donc $\widehat{FDM} = \widehat{DEN}$. De même, $\widehat{MEF} = \widehat{NDE}$. Notons β et γ ces angles.



Soient P et Q les seconds points d'intersection des droites (DF) et (EF) avec le cercle circonscrit au triangle DME. On a



$$\widehat{MQP} = \beta, \quad \widehat{MPQ} = \gamma. \tag{4}$$

Comme $DF = DE$, on a $(PQ) \mathbin{/\!/} (DE)$. Avec (4), cela implique que les triangles DEN et QMP sont homothétiques. De plus, F est le centre de l'homothétie (puisque c'est le point d'intersection des droites (QE) et (PD)). Donc la droite (MN) traverse F.

Autre solution. Si on ne pense pas à introduire les points P et Q, on peut terminer la démonstration moyennant des calculs trigonométriques un peu pénibles.

Notons φ l'angle $(\overrightarrow{FM}, \overrightarrow{ED})$. D'après la loi des sinus dans les triangles MDF et MEF, on a

$$\begin{aligned} \frac{MF}{\sin\beta} &= \frac{DF}{\sin(\beta+\varphi+\theta)} \\ \frac{MF}{\sin\gamma} &= \frac{EF}{\sin(\varphi-\gamma-\theta)}. \end{aligned}$$

Comme $DF = EF$, en divisant ces deux égalités on obtient

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\sin(\varphi-\gamma-\theta)}{\sin(\beta+\varphi+\theta)}.$$

En utilisant la formule $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$, on en déduit

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{\sin(\varphi)\cos(\gamma+\theta) - \cos\varphi \sin(\gamma+\theta)}{\sin(\varphi)\cos(\beta+\theta) + \cos\varphi\sin(\beta+\theta)}.$$

On chasse les dénominateurs et on rassemble les termes en $\sin\varphi$ et en $\cos\varphi$:

$$\cos\varphi(\sin\gamma\sin(\beta+\theta) + \sin\beta\sin(\gamma+\theta))) = \sin\varphi(-\sin\gamma\cos(\beta+\theta) + \sin\beta\cos(\gamma+\theta))$$

Comme

$$\begin{aligned} &-\sin\gamma\cos(\beta+\theta) + \sin\beta\cos(\gamma+\theta) \\ &= -\sin\gamma(\cos\beta\cos\theta - \sin\beta\sin\theta) + \sin\beta(\cos\gamma\cos\theta - \sin\gamma\sin\theta) \\ &= \cos\theta\sin(\beta-\gamma), \end{aligned}$$

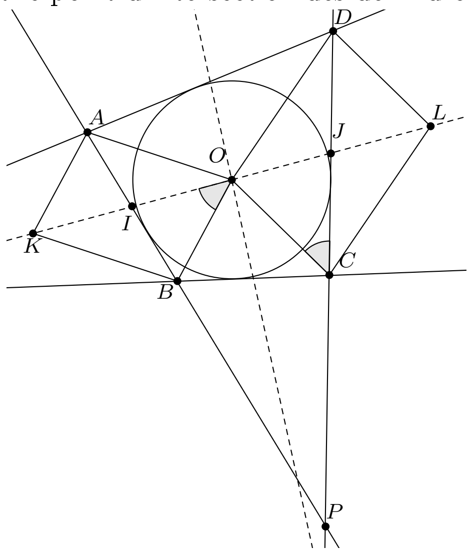
on obtient

$$\tan\varphi = \frac{\sin\gamma\sin(\beta+\theta) + \sin\beta\sin(\gamma+\theta)}{\cos\theta\sin(\beta-\gamma)}.$$

Soit $\varphi' = (FN, DE)$. Le calcul de $\tan\varphi'$ est identique, en remplaçant (β,γ,θ) par $(\beta+\theta, \gamma+\theta, -\theta)$. Or, l'expression de $\tan\varphi$ est invariante par cette transformation, donc $\tan\varphi' = \tan\varphi$, d'où F, M, N sont alignés.

Exercice 9. Un cercle de centre O est inscrit dans un quadrilatère $ABCD$ dont les côtés ne sont pas parallèles. Montrer que le point O coïncide avec le point d'intersection des lignes médianes du quadrilatère si et seulement si $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. (Une ligne médiane du quadrilatère est une droite reliant les milieux des côtés opposés.)

Solution. Soient I et J les milieux des côtés $[AB]$ et $[CD]$ respectivement. Les droites (AB) et (CD) se coupent au point P. Sans perte de généralité, on peut supposer que P est le point d'intersection des demi-droites $[AB)$ et $[CD)$.



1) Supposons que O est le point d'intersection des lignes médianes du quadrilatère $ABCD$. Alors O est le milieu du segment $[IJ]$, parce que les milieux des côtés d'un quadrilatère sont les sommets d'un parallélogramme. Puis, $[PO]$ est la bissectrice et la médiane issus de P du triangle IPJ, donc IPJ est isocèle en P et $\widehat{BIO} = \widehat{CJO}$. En outre,

$$\widehat{IBO} + \widehat{JCO} = \frac{1}{2}\Big(\widehat{ABC} + \widehat{BCD}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\pi + \widehat{BPC}\Big) = \pi - \widehat{PIJ} = \widehat{IBO} + \widehat{IOB}.$$

Alors $\widehat{JCO} = \widehat{IOB}$ et les triangles OIB et CJO sont semblables. On obtient que $\dfrac{OB}{OC} = \dfrac{IB}{JO}$. De même, on a $\dfrac{OA}{OD} = \dfrac{IA}{JO}$. Comme $IB = IA$, on obtient $OA \cdot OC = OB \cdot OD$.

2) On suppose maintenant que $OA \cdot OC = OB \cdot OD$. On note que

$$\begin{aligned}\widehat{AOB} + \widehat{COD} &= \Big(\pi - \widehat{OAB} - \widehat{OBA}\Big) + \Big(\pi - \widehat{OCD} - \widehat{ODC}\Big) \\ &= \pi - \frac{1}{2}\Big(\widehat{DAB} + \widehat{ABC} + \widehat{BCD} + \widehat{CDA}\Big) = \pi.\end{aligned}$$

Par conséquent, si on construit les parallélogrammes $OAKB$ et $CODL$ à partir des triangles OAB et OCD, ces parallélogrammes seront semblables, parce que $\dfrac{OA}{AK} = \dfrac{OA}{OB} = \dfrac{DO}{OC} = \dfrac{DO}{DL}$. En particulier, les triangles OIB et CJO sont également semblables, parce qu'ils se correspondent mutuellement dans les parallélogrammes semblables $OAKB$ et $CODL$. Il vient

$$\widehat{IOB} = \widehat{OCJ} = \widehat{OCB}, \quad \widehat{COJ} = \widehat{IBO} = \widehat{OBC}.$$

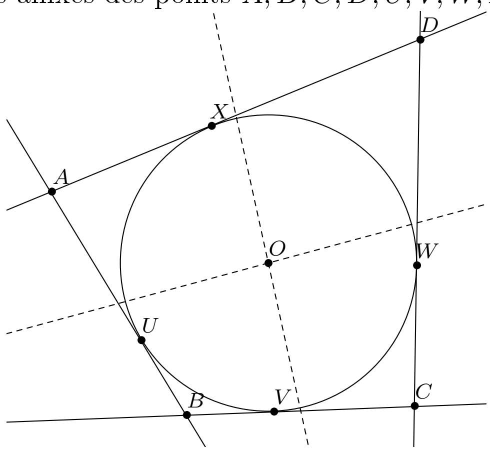
On obtient que

$$\widehat{IOB} + \widehat{BOC} + \widehat{COJ} = \widehat{OCB} + \widehat{BOC} + \widehat{OBC} = \pi,$$

donc O se trouve sur (IJ). De même, O se trouve sur l'autre ligne médiane du quadrilatère $ABCD$.

Autre solution. On peut résoudre l'exercice par une méthode analytique utilisant les nombres complexes. Les calculs sont longs mais pas impraticables.

Notons U, V, W, X les points de contact des droites $(AB), (BC), (CD)$ et (DA) avec le cercle. On peut supposer que le cercle est de centre 0 et de rayon 1. Notons a, b, c, d, u, v, w, x les affixes des points A, B, C, D, U, V, W, X.



Un point d'affixe z appartient à (AB) si et seulement si $z - u$ est perpendiculaire à u, ce qui s'écrit $0 = \bar{u}(z-u) + u(\bar{z} - \bar{u})$, ou encore $\bar{u}z + u\bar{z} = 2$. Comme $\bar{u} = 1/u$, ceci s'écrit encore $z + u^2\bar{z} = 2u$. De même, l'équation de la droite (AD) est $z + x^2\bar{z} = 2x$. En combinant ces deux équations, on trouve que

$$a = \frac{2ux}{u+x}.$$

De même, on a $b = \dfrac{2uv}{u+v}$, $c = \dfrac{2vw}{v+w}$ et $d = \dfrac{2wx}{w+x}$.

On calcule que $4OA^{-2} = |u+x|^2 = 2 + u\bar{x} + \bar{u}x$. On a des expressions analogues pour $4OB^{-2}$, etc. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
&OA \cdot OC = OB \cdot OD \\
&\quad\iff (2 + u\bar{x} + \bar{u}x)(2 + v\bar{w} + \bar{v}w) = (2 + u\bar{v} + \bar{u}v)(2 + w\bar{x} + \bar{w}x) \\
&\quad\iff ux(2 + u\bar{x} + \bar{u}x)vw(2 + v\bar{w} + \bar{v}w) = uv(2 + u\bar{v} + \bar{u}v)wx(2 + w\bar{x} + \bar{w}x) \\
&\quad\iff (2ux + u^2 + x^2)(2vw + v^2 + w^2) = (2uv + u^2 + v^2)(2wx + x^2 + w^2) \\
&\quad\iff 2uv^2x + 2uw^2x + 2u^2vw + u^2v^2 + 2vwx^2 + w^2x^2 \\
&\qquad\qquad = 2uvx^2 + 2uvw^2 + 2u^2wx + u^2x^2 + 2v^2wx + v^2w^2 \\
&\quad\iff 2(u-w)v^2x - 2(u-w)uwx + 2(u-w)uvw \\
&\qquad\qquad -2(u-w)vx^2 + (u-w)(u+w)v^2 - (u-w)(u+w)x^2 = 0 \\
&\quad\iff 2v^2x - 2uwx + 2uvw - 2vx^2 + uv^2 + v^2w - ux^2 - wx^2 = 0 \\
&\quad\iff 2vx(v-x) + (v-x)w(v+x) + 2uw(v-x) + u(v+x)(v-x) = 0 \\
&\quad\iff 2vx + vw + vx + 2uw + uv + ux = 0 \\
&\quad\iff 2(uw + xv) + (x+v)(u+w) = 0.
\end{aligned}$$

D'autre part, O appartient à la droite passant par les milieux de $[AD]$ et de $[BC]$ si et seulement si 0, $\dfrac{a+d}{2}$ et $\dfrac{b+c}{2}$ sont alignés, ce qui se traduit par le fait que $\dfrac{a+d}{b+c}$ est réel, c'est-à-dire

$$\frac{\frac{ux}{u+x} + \frac{xw}{x+w}}{\frac{uv}{u+v} + \frac{vw}{v+w}} = \frac{\frac{1}{u+x} + \frac{1}{w+x}}{\frac{1}{u+v} + \frac{1}{v+w}}.$$

On multiplie les numérateurs de chaque membre par $(u+x)(x+w)$ et les dénominateurs par $(u+v)(v+w)$, ce qui donne successivement

$$\begin{aligned}
&\frac{x[u(x+w)+w(u+x)]}{v[u(v+w)+w(u+v)]} = \frac{2x+(u+w)}{2v+(u+w)} \\
&\quad\iff \quad x[2uw+u(u+w)][2v+(u+w)] = v[2uw+v(u+w)][2x+(u+w)] \\
&\quad\iff \quad 2xuw(u+w)+2x^2v(u+w)+x^2(u+w)^2 \\
&\qquad\qquad\qquad = 2vuw(u+w)+2xv^2(u+w)+v^2(u+w)^2 \\
&\quad\iff \quad 2(x-v)uw(u+w)+2(x-v)xv(u+w)+(x-v)(x+v)(u+w)^2 = 0.
\end{aligned}$$

Comme les côtés opposés ne sont pas parallèles, on a $u+w \neq 0$. En simplifiant par $(x-v)(u+w)$, on obtient la condition $2uw+2xv+(x+v)(u+w)=0$ qui est la même que la précédente.

On en conclut que $OA \cdot OC = OB \cdot OD$ si et seulement si O appartient à la droite passant par les milieux de $[AD]$ et de $[BC]$. De même, on montre que $OA \cdot OC = OB \cdot OD$ si et seulement si O appartient à la droite passant par les milieux de $[AB]$ et de $[CD]$.