Test EGMO : corrigé

Exercice 1.

Soit $k \geqslant 2$ un entier.

1) Soit $n > k$ un entier.
Existe-t-il n entiers strictement positifs tels que k quelconques ne sont jamais premiers entre eux dans leur ensemble, mais $k+1$ quelconques sont toujours premiers entre eux dans leur ensemble?

2) Existe-t-il une suite infinie d'entiers strictement positifs vérifiant les deux conditions ci-dessus?

Solution. 1) Soit A l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal k. Comme l'ensemble des nombres premiers est infini, il existe une famille $(p_I)_{I \in A}$ de nombres premiers deux à deux distincts indexée par A. Pour tout i, notons $A(i)$ l'ensemble des parties I de $\{1, \ldots, n\}$ de cardinal k telles que $i \in I$. On définit

$$a_i = \prod_{I \in A(i)} p_I.$$

Si J est une partie de $\{1, \ldots, n\}$, alors
les a_j $(j \in J)$ ne sont pas premiers entre eux dans leur ensemble
$\iff$ ils ont un facteur premier commun
$\iff$ il existe $I \in A$ tel que $p_I \mid a_j$ pour tout $j \in J$
$\iff$ il existe $I \in A$ tel que $j \in I$ pour tout $j \in J$
$\iff$ il existe $I \in A$ tel que $J \subset I$
$\iff$ $\mathrm{Card}(J) \leqslant k$.
Ceci montre que la famille $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ convient.

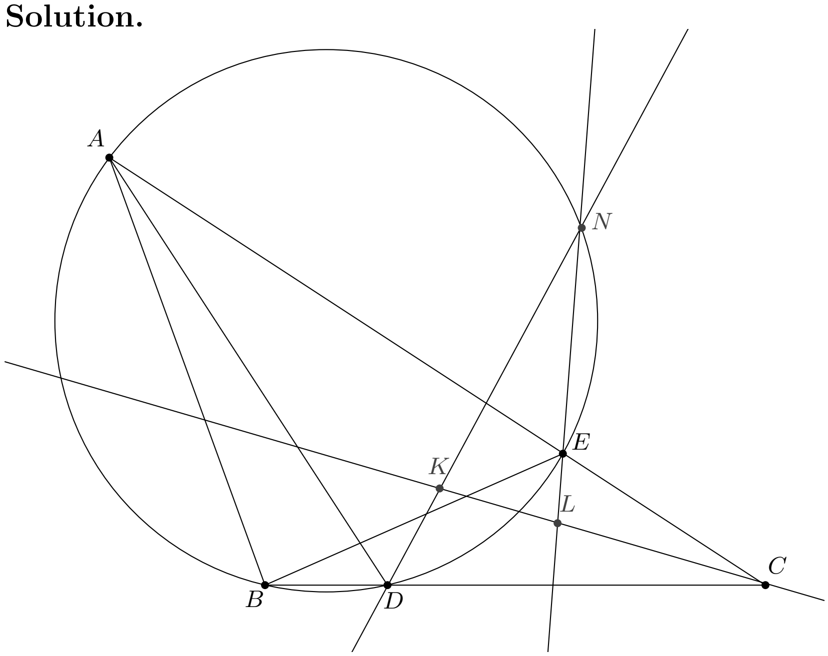
2) Supposons par l'absurde qu'il y a une famille $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs telle que k quelconques ne sont jamais premiers entre eux dans leur ensemble.
Notons $p_1, \ldots, p_m$ les diviseurs premiers de a_0. Comme $k \geqslant 2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, a_n possède un diviseur parmi $p_1, \ldots, p_m$. Notons $p_{i(n)}$ l'un d'eux. Comme la suite $(p_{i(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, au moins une de ses valeurs (que nous noterons p_ℓ) est atteinte une infinité de fois. Il existe donc $i_1 < \cdots < i_{k+1}$ tels que p_ℓ divise $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k+1}}$, ce qui montre que $a_{i_1}, \ldots, a_{i_{k+1}}$ ne sont pas premiers entre eux dans leur ensemble.

Exercice 2.

Soit ABC un triangle et ω un cercle qui passe par A et B et recoupe les côtés $[BC]$ et $[AC]$ respectivement en D et E. Les points K et L sont respectivement les centres du cercle inscrit dans DAC et du cercle inscrit dans BEC. Soit N l'intersection des droites (EL) et (DK).

Prouver que le triangle KNL est isocèle.

Solution.



Solution 1. On va montrer l'égalité entre les angles de droites (KL, KN) et (LN, KL). Notons d'abord que C, K, L sont alignés (sur la bissectrice intérieure en C du triangle ABC).

$$\begin{aligned}(KL, KN) &= (CK, CD) + (DC, DN) = \frac{1}{2}((\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})) \\ &= \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + \Pi + (\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})\right]\end{aligned}$$

où Π est l'angle plat, et

$$\begin{aligned}(LN, KL) &= (EL, EC) + (EC, CK) = \frac{1}{2}((\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EC}) + (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CB})) \\ &= \frac{1}{2}\left[(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}) + \Pi + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})\right].\end{aligned}$$

Or, les angles de vecteurs $(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DA})$ et $(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA})$ sont égaux puisque E et D sont sur le même arc délimité par A et B, ce qui conclut.

Solution 2. Comme A, B, D, E sont cocycliques, on a les égalités d'angles orientés de droites

$$(DA, DC) = (DA, DB) = (EA, EB) = (EC, EB)$$

$$(AD, AC) = (AD, AE) = (BD, BE) = (BC, BE)$$

donc les angles orientés de CAD et CBE sont deux à deux opposés, par conséquent les triangles CAD et CBE sont indirectement semblables. Soit f la similitude indirecte qui envoie C, A, D sur C, B, E respectivement. Alors f envoie le centre du cercle inscrit de CAD sur celui de CBE : autrement dit, $f(K) = L$.

On a $(LK, LN) = (LK, EL) = (CL, EL)$ car C, K, L sont alignés (sur la bissectrice intérieure en C du triangle ABC). De plus, f envoie C, D, K sur C, E, L respectivement, donc $(CL, EL) = -(CK, DK) = (KD, KC) = (KN, KL)$. Finalement, $(LK, LN) = (KN, KL)$ donc LKN est isocèle en N.

Exercice 3.

Prouver que, pour tous réels $a, b, c > 0$ et tout réel $t \geqslant 0$, on a

$$\frac{a}{b+tc} + \frac{b}{c+ta} + \frac{c}{a+tb} \geqslant \frac{3}{1+t}.$$

Solution 1. Posons $x = b + tc$, $y = c + ta$, $z = a + tb$. On vérifie que

$$\begin{array}{rcl} (1+t^3)a & = & z - tx + t^2 y \\ (1+t^3)b & = & x - ty + t^2 z \\ (1+t^3)c & = & y - tz + t^2 x \end{array}$$

donc, d'après l'inégalité arithmético-géométrique,

$$\begin{array}{rcl} (1+t^3)\Big(\dfrac{a}{b+tc} + \dfrac{b}{c+ta} + \dfrac{c}{a+tb}\Big) & = & \dfrac{z - tx + t^2 y}{x} + \dfrac{x - ty + t^2 z}{y} + \dfrac{y - tz + t^2 x}{z} \\ & = & \Big(\dfrac{z}{x} + \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{z}\Big) + t^2\Big(\dfrac{y}{x} + \dfrac{z}{y} + \dfrac{x}{z}\Big) - 3t \\ & \geqslant & 3\sqrt[3]{\dfrac{z}{x}\dfrac{x}{y}\dfrac{y}{z}} + 3t^2\sqrt[3]{\dfrac{y}{x}\dfrac{z}{y}\dfrac{x}{z}} - 3t \\ & = & 3(1 - t + t^2) = 3\dfrac{1+t^3}{1+t} \end{array}$$

d'où la conclusion.

Solution 2. Puisque l'inégalité est homogène en a, b, c, on peut supposer que $a + b + c = 1$. Comme le membre de gauche est égal à $af(x) + bf(y) + cf(z)$ où $x = b + tc$, $y = c + ta$, $z = a + tb$ et $f(x)$ est la fonction convexe $x \mapsto \frac{1}{x}$, d'après l'inégalité de Jensen le membre de gauche est supérieur ou égal à

$$f(ax + by + tz) = \frac{1}{ab + tac + bc + tba + ca + tab} = \frac{1}{(1+t)(ab + bc + ca)},$$

donc il suffit de prouver que $ab + bc + ca \leqslant \frac{1}{3}$.
Or, $1 = (a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$ donc il suffit de montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}$, ce qui découle de l'inégalité entre la moyenne arithmétique et la moyenne quadratique de a, b, c.

Solution 3. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\frac{a^2}{ab + tca} + \frac{b^2}{bc + tab} + \frac{c^2}{ca + tbc}\right) \cdot ((ab+tca) + (bc+tab) + (ca+tbc)) \geqslant (a+b+c)^2$$

ce qui s'écrit

$$\left(\frac{a}{b+tc} + \frac{b}{c+ta} + \frac{c}{a+tb}\right) \cdot (1+t)(ab+bc+ca) \geqslant a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+bc+ca).$$

Or, on a $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$ d'après l'inégalité de réordonnement (ou d'après celle de Cauchy-Schwarz), donc

$$\left(\frac{a}{b+tc} + \frac{b}{c+ta} + \frac{c}{a+tb}\right) \cdot (1+t)(ab + bc + ca) \geqslant 3(ab + bc + ca).$$

L'inégalité demandée en découle après division par $(1+t)(ab + bc + ca)$.

Exercice 4.

Déterminer tous les entiers naturels m, n et tous les nombres premiers p tels que

$$m(4m^2 + m + 12) = 3(p^n - 1).$$

Solution. On récrit l'équation sous la forme

$$3p^n = 4m^3 + m^2 + 12m + 3 = (4m + 1)(m^2 + 3).$$

On en déduit qu'il existe u, v, a, b entiers naturels tels que $4m + 1 = 3^u p^a$ et $m^2 + 3 = 3^v p^b$ avec $u + v = 1$ et $a + b = n$.
Si $m = 0$, l'équation devient $3p^n = 3$, donc $n = 0$ et tout nombre premier convient.
Supposons désormais $m \geqslant 1$. Alors $4m + 1 > 3$ et $m^2 + 3 > 3$, donc $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$.
On a

$$\begin{aligned} 16 \times 3^v p^b &= 16(m^2 + 3) = (4m)^2 + 48 = ((4m + 1) - 1)^2 + 48 \\ &= 3^{2u} p^{2a} - 2 \times 3^u p^a + 49. \end{aligned}$$

Comme p divise le membre de gauche, il divise le membre de droite, donc $p \mid 49$, ce qui donne $p = 7$. On remplace alors 49 par p^2 :

$$16 \times 3^v p^b = 3^{2u} p^{2a} - 2 \times 3^u p^a + p^2.$$

Si $a = 1$ alors $4m+1$ vaut 7 ou 21. Comme m est un entier, on a $4m+1 = 21$, ou encore $m = 5$, ce qui entraîne $3^v p^b = m^2+3 = 28$. Impossible. Donc $a \geqslant 2$. On en déduit que $3^{2u} p^{2a} - 2 \times 3^u p^a + p^2$ est divisible par p^2, donc $16 \times 3^v p^b$ est divisible par p^2, d'où $b \geqslant 2$.
Si $a \geqslant 3$, alors $16 \times 3^v p^b = 3^{2u} p^{2a} - 2 \times 3^u p^a + p^2$ est congru à p^2 modulo p^3, donc n'est pas divisible par p^3, par conséquent $b = 2$. En divisant par p^2, on obtient que $16 \times 3^v \equiv 1\,[p]$. Pour $v = 0$ cela donne $16 \equiv 1\,[7]$ et pour $v = 1$ cela donne $48 \equiv 1\,[7]$. Impossible.
Donc on a nécessairement $a = 2$ et $4m + 1 = 3^u \times 49$. Si $u = 0$ alors $m = 12$ et $n = 4$. Si $u = 1$ alors $4m + 1 = 147$, ce qui est impossible.

<u>Conclusion :</u> les seules solutions sont

- $m = 0$, $n = 0$, p premier quelconque, et
- $m = 12$, $n = 4$, $p = 7$.