Olympiades Françaises de Mathématiques

2012-2013

Test d'entraînement du weekend du 24-25 novembre

Durée : 4h30

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le sujet « junior » n'est à faire que par les élèves qui sont né(e)s **en 1998 ou après**.
- le sujet « olympique » n'est à faire que par les élèves qui sont né(e)s en **1997 ou avant**.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.**

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit x un réel strictement positif vérifiant $x + \frac{1}{x} = 3$. Déterminer la valeur de

$$x^7 + \frac{1}{x^7}.$$

Exercice 2. Combien d'entiers relatifs peuvent être écrits sous la forme

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \ldots \pm 2012$$

pour des choix de signes $+$ et $-$?

Exercice 3. Déterminer le plus grand entier n tel que l'on puisse trouver des entiers distincts tels que $a_1, \ldots, a_n \in [1, 100]$ et qui vérifient les deux conditions

a) aucun des nombres $a_1, \ldots, a_n$ n'est un nombre premier ;

b) les nombres $a_1, \ldots, a_n$ sont deux à deux premiers entre eux.

Exercice 4. Soit ABC un triangle d'aire 1. Déterminer l'aire maximale d'un parallélogramme dont les quatre sommets sont à l'intérieur ou sur le bord de ABC.

Sujet Olympique

Exercice 5. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que

$$f(x + f(y + f(z))) = y + f(x + z),$$

pour tous rationnels x, y, z.

Exercice 6. Un octogone régulier convexe est pavé par des parallélogrammes. Prouver que parmi ces parallélogrammes, il y a au moins deux rectangles.

Exercice 7. Soit p un nombre premier. Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ qui possèdent la propriété suivante :

"Pour tout entier $k \geqslant 1$, si $k^n - 1$ est divisible par p, alors $k^n - 1$ est aussi divisible par p^2."

Exercice 8. Soit Γ et Γ' deux cercles du plan qui se coupent en A et B, et soit Δ une droite qui passe par B et qui recoupe Γ en M et Γ' en N. On suppose que B est entre M et N. Soit I le milieu de l'arc AM du cercle Γ qui ne contient pas B, et soit J le milieu de l'arc AN du cercle Γ' qui ne contient pas B. Enfin, on note K le milieu de $[MN]$.

Prouver que le triangle IKJ est rectangle en K.

Fin