

# *Olympiades Françaises de Mathématiques*

*2012-2013*

*Test d'entraînement du weekend du 24-25 novembre*

*Durée : 4h30*



Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le sujet « junior » n'est à faire que par les élèves qui sont né(e)s **en 1998 ou après**.
- le sujet « olympique » n'est à faire que par les élèves qui sont né(e)s **en 1997 ou avant**.

- 
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
  - Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
  - Respecter la numérotation des exercices.

- 
- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.**

- 
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.  
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

# Exercices Juniors

*Exercice 1.* Soit  $x$  un réel strictement positif vérifiant  $x + \frac{1}{x} = 3$ . Déterminer la valeur de

$$x^7 + \frac{1}{x^7}.$$



*Exercice 2.* Combien d'entiers relatifs peuvent être écrits sous la forme

$$\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \dots \pm 2012$$

pour des choix de signes  $+$  et  $-$ ?



*Exercice 3.* Déterminer le plus grand entier  $n$  tel que l'on puisse trouver des entiers distincts tels que  $a_1, \dots, a_n \in [1, 100]$  et qui vérifient les deux conditions

- aucun des nombres  $a_1, \dots, a_n$  n'est un nombre premier ;
- les nombres  $a_1, \dots, a_n$  sont deux à deux premiers entre eux.



*Exercice 4.* Soit  $ABC$  un triangle d'aire 1. Déterminer l'aire maximale d'un parallélogramme dont les quatre sommets sont à l'intérieur ou sur le bord de  $ABC$ .

# Sujet Olympique

*Exercice 5.* Déterminer toutes les fonctions  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$  telles que

$$f(x + f(y + f(z))) = y + f(x + z),$$

pour tous rationnels  $x, y, z$ .



*Exercice 6.* Un octogone régulier convexe est pavé par des parallélogrammes. Prouver que parmi ces parallélogrammes, il y a au moins deux rectangles.



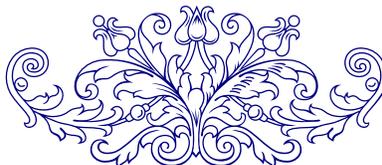
*Exercice 7.* Soit  $p$  un nombre premier. Trouver tous les entiers  $n \geq 1$  qui possèdent la propriété suivante :

“Pour tout entier  $k \geq 1$ , si  $k^n - 1$  est divisible par  $p$ , alors  $k^n - 1$  est aussi divisible par  $p^2$ .”



*Exercice 8.* Soit  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  deux cercles du plan qui se coupent en  $A$  et  $B$ , et soit  $\Delta$  une droite qui passe par  $B$  et qui recoupe  $\Gamma$  en  $M$  et  $\Gamma'$  en  $N$ . On suppose que  $B$  est entre  $M$  et  $N$ . Soit  $I$  le milieu de l'arc  $AM$  du cercle  $\Gamma$  qui ne contient pas  $B$ , et soit  $J$  le milieu de l'arc  $AN$  du cercle  $\Gamma'$  qui ne contient pas  $B$ . Enfin, on note  $K$  le milieu de  $[MN]$ .

Prouver que le triangle  $IKJ$  est rectangle en  $K$ .



*Fin*