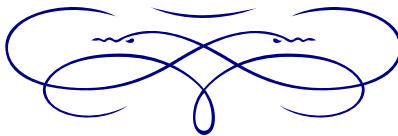


Olympiades Françaises de Mathématiques

2012-2013

Test du mercredi 9 janvier

Durée : 4h30



Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le sujet « junior » n'est à faire que par les élèves qui sont né(e)s **en 1998 ou après**.
- le sujet « olympique » n'est à faire que par les élèves qui sont né(e)s **en 1997 ou avant**.

-
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
 - Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
 - Respecter la numérotation des exercices.

-
- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche, et le numéro du problème en haut à droite.**

-
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

Exercices Juniors

Exercice 1. Si k est un entier strictement positif, on désigne par $S(k)$ la somme des chiffres de son écriture décimale.

- 1) Existe-t-il deux entiers a et b strictement positifs tels que $S(a) = S(b) = S(a + b) = 2013$?
- 2) Existe-t-il deux entiers a et b strictement positifs tels que $S(a) = S(b) = S(a + b) = 2016$?



Exercice 2. Les réels a, b, c sont distincts et non nuls, et on suppose qu'il existe deux réels x et y tels que $a^3 + ax + y = 0$, $b^3 + bx + y = 0$ et $c^3 + cx + y = 0$.

Prouver que $a + b + c = 0$.



Exercice 3. Sur le cercle Γ , on choisit les points A, B, C de sorte que $AC = BC$. Soit P un point de l'arc AB de Γ qui ne contient pas C . La droite passant par C et perpendiculaire à la droite (PB) rencontre (PA) en D .

Prouver que $PA + PB = 2PD$.



Exercice 4. Sur un terrain, 2013×2013 chaises sont placées sur les sommets d'un quadrillage. Chaque chaise est occupée par une personne. Certaines personnes décident alors de changer de place : certaines se décalent d'un cran vers la droite, d'autres de 2 crans vers l'avant, d'autres de 3 crans vers la gauche, et d'autres de 6 crans vers l'arrière. A la fin, chaque chaise est toujours occupée par une seule personne.

Prouver qu'au moins une personne n'a pas changé de place.

Sujet Olympique

Exercice 5. Soit $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq 1$ et $0 \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_n \leq 1$ des réels. On pose $x_{n+1} = 1$.

Prouver que

$$\sum_{i=1}^n (x_i - y_i) + n \sum_{i=1}^n (x_{i+1} - x_i) y_i \geq 0.$$



Exercice 6. Trouver le plus grand entier $n \geq 3$, vérifiant :
"pour tout entier $k \in \{2, 3, \dots, n\}$ si k et n sont premiers entre eux alors k est un nombre premier."



Exercice 7. A, B, C, D, E sont cinq points d'un même cercle, de sorte que ABCDE soit convexe et que l'on ait $AB = BC$ et $CD = DE$. On suppose que les droites (AD) et (BE) se coupent en P, et que la droite (BD) rencontre la droite (CA) en Q et la droite (CE) en T.

Prouver que le triangle PQT est isocèle.



Exercice 8. Soit $n > 0$ un entier. Anne écrit au tableau n entiers strictement positifs distincts. Bernard efface alors certains de ces nombres (éventuellement aucun, mais pas tous). Devant chacun des nombres restants, il écrit un + ou un -, et effectue l'addition correspondante. Si le résultat est divisible par 2013, c'est Bernard qui gagne, sinon c'est Anne.

Déterminer, selon la valeur de n , lequel des deux possède une stratégie gagnante.



Fin