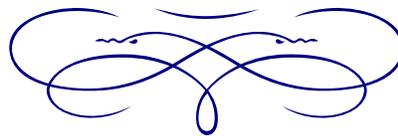


# *Olympiades Françaises de Mathématiques*

*2012-2013*

## *Envoi Numéro 6*

*À renvoyer au plus tard le lundi 15 avril*



Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Les exercices classés « juniors » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s **en 1998 ou après.**
  - Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
  - Les exercices classés « olympiques » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s **en 1997 ou avant.**
- 
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
  - Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
  - Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
  - Respecter la numérotation des exercices.
- 
- **Bien préciser votre nom sur CHAQUE copie.**

## Exercices Juniors

*Exercice 1.* Soit  $ABC$  un triangle rectangle isocèle en  $B$ . Soit  $M$  un point de l'arc  $AC$  du cercle de centre  $B$  passant par  $A$  et  $C$ ,  $H$  son projeté orthogonal sur  $(AB)$ . On note  $I$  le centre du cercle inscrit à  $BHM$  et  $J$  le centre du cercle exinscrit dans l'angle  $B$  ( $J$  est donc l'intersection de la bissectrice intérieure en  $B$  avec les bissectrices extérieures en  $H$  et  $M$ ). Montrer que  $MIAJ$  est un carré.



*Exercice 2.* Soit  $ABCD$  un quadrilatère convexe. Soit  $M$  l'intersection entre les bissectrices intérieures des angles  $B$  et  $C$ , et  $N$  l'intersection entre les bissectrices intérieures des angles  $A$  et  $D$ . Montrer que les droites  $AB$ ,  $CD$  et  $MN$  sont concourantes.



*Exercice 3.* Soit  $ABCD$  un quadrilatère inscriptible,  $L = (AC) \cap (BD)$ ,  $J$  et  $K$  les pieds des perpendiculaires à  $(AD)$  et  $(BC)$  passant par  $L$  et  $I$  le milieu de  $[C, D]$ . Montrer que  $IJ = IK$ .

## Exercices Communs

*Exercice 4.* Soit  $ABC$  un triangle. On note  $O$  le centre de son cercle circonscrit. Soient  $D, E, F$  des points situés sur  $[B, C]$ ,  $[C, A]$  et  $[A, B]$  respectivement. On suppose que  $FB = FD$  et  $ED = EC$ . Le cercle de centre  $F$  et de rayon  $FB$  et le cercle de centre  $E$  et de rayon  $EC$  se recoupent en  $G$ . Montrer que  $A, F, O, E, G$  sont cocycliques.



*Exercice 5.* Soient  $A, B, C, D, E$  des points dans cet ordre sur un demi-cercle de rayon 1. Démontrer que

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + AB \cdot BC \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DE \leq 4.$$



*Exercice 6.* Soit  $ABCDEF$  un hexagone régulier et  $M \in [A, C]$ ,  $N \in [C, E]$ . On suppose que  $\frac{AM}{AC}$  et  $\frac{CN}{CE}$  sont égaux à un nombre  $r > 0$ , et que  $B, M, N$  sont colinéaires. Déterminer la valeur de  $r$ .

## Exercices Olympiques

*Exercice 7.* Soit  $ABC$  un triangle et  $M$  un point de  $[B, C]$ . Soit  $\omega$  un cercle tangent à  $(AB)$  en  $T$  et à  $(BC)$  en  $K$  et tangent au cercle circonscrit à  $AMC$  en  $P$ . Montrer que si  $(KT) \parallel (AM)$  alors les cercles circonscrits à  $KPC$  et  $APT$  sont tangents en  $P$ .



*Exercice 8.* Soient  $\omega_1$  et  $\omega_2$  deux cercles sécants en deux points  $X$  et  $Y$ . Un cercle  $\omega$  est tangent intérieurement à  $\omega_1$  et  $\omega_2$  en  $P$  et  $Q$  respectivement. Le segment  $[X, Y]$  coupe  $\omega$  en  $M$  et  $N$ . Les demi-droites  $[P, M)$  et  $[P, N)$  coupent  $\omega_1$  en  $A$  et  $D$  ; les demi-droites  $[Q, M)$  et  $[Q, N)$  coupent  $\omega_2$  en  $B$  et  $C$ . Montrer que  $AB = CD$ .



*Exercice 9.* Soit  $ABCD$  un quadrilatère inscriptible. On note  $K$  le point d'intersection des diagonales. Soient  $M$  et  $N$  les milieux de  $[A, C]$  et  $[B, D]$ . Les cercles circonscrits à  $ADM$  et  $BCM$  se recoupent un point  $L$ . Montrer que  $K, L, M, N$  sont cocycliques.



*Fin*