Olympiades Françaises de Mathématiques

2012-2013

Envoi Numéro 6

À renvoyer au plus tard le lundi 15 avril

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Les exercices classés « juniors » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s **en 1998 ou après**.
- Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés « olympiques » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s en **1997 ou avant**.

- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.

- **Bien préciser votre nom sur CHAQUE copie.**

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit ABC un triangle rectangle isocèle en B. Soit M un point de l'arc AC du cercle de centre B passant par$A$ et C, H son projeté orthogonal sur (AB). On note I le centre du cercle inscrit à BHM et J le centre du cercle exinscrit dans l'angle B (J est donc l'intersection de la bissectrice intérieure en B avec les bissectrices extérieures en H et M). Montrer que $MIAJ$ est un carré.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Soit M l'intersection entre les bissectrices intérieures des angles B et C, et N l'intersection entre les bissectrices intérieures des angles A et D. Montrer que les droites AB, CD et MN sont concourantes.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible, $L = (AC) \cap (BD)$, J et K les pieds des perpendiculaires à (AD) et (BC) passant par L et I le milieu de $[C, D]$. Montrer que $IJ = IK$.

Exercices Communs

Exercice 4. Soit ABC un triangle. On note O le centre de son cercle circonscrit. Soient D, E, F des points situés sur $[B, C]$, $[C, A]$ et $[A, B]$ respectivement. On suppose que $FB = FD$ et $ED = EC$. Le cercle de centre F et de rayon FB et le cercle de centre E et de rayon EC se recoupent en G. Montrer que A, F, O, E, G sont cocycliques.

Exercice 5. Soient A, B, C, D, E des points dans cet ordre sur un demi-cercle de rayon 1. Démontrer que

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2 + AB \cdot BC \cdot CD + BC \cdot CD \cdot DE \leqslant 4.$$

Exercice 6. Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier et $M \in [A, C]$, $N \in [C, E]$. On suppose que $\frac{AM}{AC}$ et $\frac{CN}{CE}$ sont égaux à un nombre $r > 0$, et que B, M, N sont colinéaires. Déterminer la valeur de r.

Exercices Olympiques

Exercice 7. Soit ABC un triangle et M un point de $[B, C]$. Soit ω un cercle tangent à (AB) en T et à (BC) en K et tangent au cercle circonscrit à AMC en P. Montrer que si $(KT)//(AM)$ alors les cercles circonscrits à KPC et APT sont tangents en P.

Exercice 8. Soient ω_1 et ω_2 deux cercles sécants en deux points X et Y. Un cercle ω est tangent intérieurement à ω_1 et ω_2 en P et Q respectivement. Le segment $[X, Y]$ coupe ω en M et N. Les demi-droites $[P, M)$ et $[P, N)$ coupent ω_1 en A et D ; les demi-droites $[Q, M)$ et $[Q, N)$ coupent ω_2 en B et C. Montrer que $AB = CD$.

Exercice 9. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible. On note K le point d'intersection des diagonales. Soient M et N les milieux de $[A, C]$ et $[B, D]$. Les cercles circonscrits à ADM et BCM se recoupent un un point L. Montrer que K, L, M, N sont cocycliques.

Fin