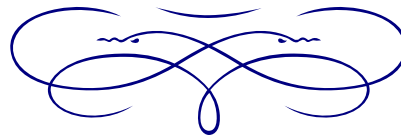


Olympiades Françaises de Mathématiques





2012-2013

Envoi Numéro 4

À renvoyer au plus tard le vendredi 15 février



Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

-  - Les exercices classés « juniors » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s **en 1998 ou après**. 
 - Les exercices classés « communs » sont à chercher par tout le monde.
 - Les exercices classés « olympiques » ne sont à chercher que par les élèves qui sont né(e)s **en 1997 ou avant**.
-
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
 - Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
 - Respecter la numérotation des exercices.
-
- Bien préciser votre nom sur chaque copie.
- 
- 

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient x_1, x_2, \dots, x_5 des réels tels que

$$|x_2 - x_1| = 2|x_3 - x_2| = 3|x_4 - x_3| = 4|x_5 - x_4| = 5|x_1 - x_5|.$$

Montrer que ces cinq réels sont égaux.



Exercice 2. Soit $(u_n)_n$ une suite de réels telle que, pour tout entier n ,

$$|u_{n+1} - u_n| \leq 1.$$

Montrer que la moyenne des n premiers termes de la suite et la moyenne des $n + 1$ premiers termes de la suite sont distantes d'au plus $\frac{1}{2}$.



Exercice 3. Soit E un ensemble fini de réels strictement positifs tels que, pour tout réel x strictement positif, E contient autant d'éléments strictement supérieurs à x que d'éléments strictement inférieurs à $\frac{1}{x}$. Déterminer le produit de tous les éléments de E .



Exercices Communs

Exercice 4. Soit $x, y, z > 0$ tels que $xyz = 8$. Montrer que

$$\frac{x-2}{x+1} + \frac{y-2}{y+1} + \frac{z-2}{z+1} \leq 0.$$



Exercice 5. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous x et y ,

$$f(xy) \leq xf(y).$$



Exercice 6. Soient un entier n et des réels $0 < u_1 < u_2 < \dots < u_n$ tels que

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{u_1^2} + \frac{1}{u_2^2} + \dots + \frac{1}{u_n^2}.$$

Montrer que, pour tout entier k inférieur ou égal à n , il existe k réels parmi u_1, u_2, \dots, u_n dont la somme est supérieure ou égale à k .

Exercices Olympiques

Exercice 7. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$



Exercice 8. Soient x, y et z des réels strictement positifs tels que

$$x + y + z \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}.$$

Montrer que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} \geq \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} + \frac{1}{zx}.$$



Exercice 9. Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que

$$a^2 + b^2 > c^2, \quad b^2 + c^2 > a^2, \quad c^2 + a^2 > b^2.$$

Montrer que

$$\frac{a^2 b^2 c^2}{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)(c^2 + a^2 - b^2)} + 2 \frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{abc} \geq 3.$$



Fin