Association pour l'animation mathématique

COUPE ANIMATH D'AUTOMNE

Mercredi 4 octobre 2017

Corrigé

Exercice 1. On peut écrire 225 comme la somme de 3 nombres entiers consécutifs : $225 = 74 + 75 + 76$.
a) Peut-on l'écrire comme la somme de 5 nombres entiers consécutifs ?
b) Peut-on l'écrire comme la somme de 4 nombres entiers consécutifs ?

Solution de l'exercice 1 a) Oui : $225 = 43+44+45+46+47$ (il est naturel de chercher autour de $225/5 = 45$).
b) Non : parmi quatre nombres consécutifs, deux sont pairs et deux impairs, donc la somme totale est paire, ce qui n'est pas le cas de 225. On peut aussi voir que $54 + 55 + 56 + 57 < 225 < 55 + 56 + 57 + 58$.

Exercice 2. Pour tout entier n strictement positif, on définit a_n comme étant le dernier chiffre de la somme des chiffres du nombre 20052005...2005, (on écrit n fois "2005" d'affilée). Par exemple, $a_1 = 7$ et $a_2 = 4$.
a) Quels sont les entiers strictement positifs n tels que $a_n = 0$?
b) Calculer $a_1 + a_2 + \cdots + a_{2005}$.

Solution de l'exercice 2 a) Soit s_n la somme des chiffres de $20052005\ldots2005$. On a $s_n = (2+0+0+5)\times n = 7n$. On remarque que si $m - n$ est multiple de 10, $s_m - s_n$ l'est aussi, donc s_m et s_n ont le même dernier chiffre, soit $a_n = a_m$. Ainsi, la suite (a_n) est périodique de période 10. Si r est le reste de la division euclidienne de n par 10, alors $a_n = a_r$. On calcule les premiers termes de la suite : $a_1 = 7$, $a_2 = 4$, $a_3 = 1$, $a_4 = 8$, $a_5 = 5$, $a_6 = 2$, $a_7 = 9$, $a_8 = 6$, $a_9 = 3$ et $a_{10} = 0$. Pour n un entier strictement positif, si $r \neq 0$, $r \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ donc $a_r \neq 0$ donc $a_n \neq 0$. Réciproquement, si $r = 0$, n est multiple de 10 donc $n - 10$ aussi, donc $a_n = a_{10} = 0$.
Ainsi, les entiers $n > 0$ tels que $a_n = 0$ sont les multiples de 10 strictement positifs.
b) De a_1 jusqu'à a_{2000}, on répète 200 périodes de longueur 10. Puis $a_{2001} = a_1 = 7$, $a_{2002} = a_2 = 4$, etc. Donc la somme cherchée vaut $200\times(7+4+1+8+5+2+9+6+3+0)+7+4+1+8+5 = 9000+25 = 9025$.

Exercice 3. Le foot à trois personnes se joue en phases successives : un joueur est gardien pendant que les deux autres, appelés "joueurs de champ", tentent de marquer un but. Dès qu'un joueur marque, la phase se termine et il devient gardien pour la phase suivante. Amandine, Bobby et Charles jouent à ce jeu. La partie terminée, ils se souviennent qu'Amandine était 12 fois joueuse de champ, Bobby 21 fois joueur de champ, et Charles 8 fois gardien.
a) Combien y a-t-il eu de phases au total ?
b) Qui a marqué le sixième but ?

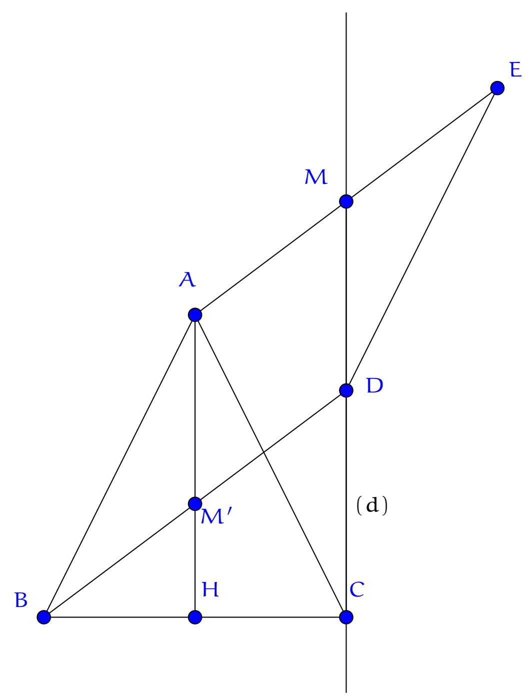
Solution de l'exercice 3 a) Soit p le nombre de phases : Amandine a été $p - 12$ fois gardienne, Bobby $p - 21$ fois et Charles a été $p - 8$ fois joueur de champ. Il y a exactement un gardien par phase, donc la somme des nombres de fois où chacun a été à ce poste vaut p, soit $(p - 12) + (p - 21) + 8 = p$, soit $2p - 25 = p$, donc $p = 25$.
b) Sur 25 phases, Amandine a été treize fois gardienne, soit plus de la moitié des fois. Or, on ne peut rester aux buts deux fois d'affilée. Elle a donc été gardienne lors des phases impaires, soit les phases $1, 3, \ldots, 23, 25$. Ainsi, elle était gardienne lors de la septième phase, donc c'est elle qui a marqué le sixième but.

Exercice 4. a) Trouver un entier n strictement positif tel que si on écrit n^2 et on en retire les deux derniers chiffres, le nombre obtenu est encore le carré d'un nombre entier.
b) Trouver tous les entiers n strictement positifs et non multiples de 10 tels qu'en écrivant n^2 et en

supprimant les deux derniers chiffres, on obtienne encore le carré d'un nombre entier (on considère qu'un nombre à zéro chiffres vaut zéro).

Solution de l'exercice 4 a) Tout multiple de 10 convient. En effet, un multiple de 10 strictement positif peut s'écrire $10k$, $k \in \mathbb{N}^*$. Alors son carré vaut $100k^2$, et si on retire les deux derniers chiffres de son écriture, qui sont des zéros, on obtient k^2, qui est bien un carré parfait.
b) Si n est strictement inférieur à 10, son carré a au plus deux chiffres, donc en les retirant, on obtient zéro d'après la convention de l'énoncé. Si n vérifie la propriété sans être multiple de 10, n^2 n'est pas multiple de 100. Soit d le nombre tel que d^2 soit égal à n^2 privé de ses deux derniers chiffres. Alors n^2 et $(10d)^2$ sont des carrés parfaits distincts dont la différence vaut au plus 99, car l'écriture $(10d)^2$ s'obtient en remplaçant les deux derniers chiffres de celle de n^2 par des zéros. Comme $(10d)^2 < n^2$, on a $10d < n$. Or $10d$ et n sont entiers, donc $n \geqslant 10d + 1$, donc $n^2 \geqslant (10d)^2 + 2 \times 10d + 1$. Or $n^2 \leqslant (10d)^2 + 99$ donc $10d \leqslant 48$. Comme d est entier, $d \leqslant 4$, ainsi $10d \leqslant 40$ et $(10d)^2 \leqslant 1600$. Ainsi, $n^2 \leqslant 1699$, soit $n \leqslant 41$ comme n est entier. Si le dernier chiffre de n n'est pas 1, $n \geqslant 10d + 2$ donc $n^2 \geqslant (10d)^2 + 40d + 4$ et on trouve $d \leqslant 2$. Si le dernier chiffre de n n'est ni 1 ni 2, $n \geqslant 10d + 3$ et on trouve de même $d \leqslant 1$. Si ce n'est ni 1, ni 2, ni 3, ni 4, $n \geqslant 10d + 5$ et on trouve $d = 0$. Ainsi, il faut encore tester $11, 12, 13, 14, 21, 22, 31$ et 41 dont on vérifie rapidement qu'ils sont solutions, en plus de $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ et 9.

Exercice 5. On construit la figure suivante : on trace un triangle ABC isocèle en A, puis la droite (d) perpendiculaire à (BC) passant par C. On choisit un point D sur (d). On place E de sorte que $AEDB$ soit un parallélogramme. Enfin, M est le point d'intersection de (AE) et (d). Prouver que M est le milieu de $[AE]$.



Solution de l'exercice 5 On introduit M' le milieu de $[BD]$: si (AH) est la hauteur issue de A dans ABC, H est le milieu de $[BC]$. Donc par le théorème de la droite des milieux dans le triangle BDC, M' est sur (AH). Or $(AH)//(d)$ et (d) et (DM) sont confondues. Donc $(AM')//(DM)$. Comme (AM) et $(M'D)$ sont parallèles (car (AE) et (BD) le sont), $AMDM'$ a ses côtés opposés parallèles, donc c'est un parallélogramme. Donc $AM = M'D = BD/2 = AE/2$. Ainsi, M est le milieu de $[AE]$.

Exercice 6. Les entiers strictement positifs x, y et z vérifient les deux équations suivantes : $x + 2y = z$ et $x^2 - 4y^2 + z^2 = 310$. Trouver toutes les valeurs que peut prendre le produit xyz.

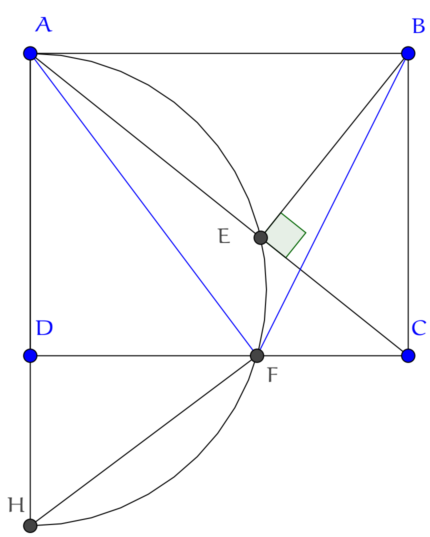
Solution de l'exercice 6 On a $310 = x^2 + z^2 - (2y)^2 = x^2 + z^2 - (x - z)^2 = 2zx$ donc $zx = 15 = 5 \times 31$. Par conséquent, z est l'une des valeurs $155, 31, 5, 1$ et x prend respectivement l'une des valeurs $1, 5, 31, 155$. Comme $z = x + 2y > x$, les deux derniers cas sont impossibles. Dans les deux premiers cas, on a

$y = \frac{z-x}{2}$, et les valeurs de xyz que l'on obtient sont respectivement $xyz = 1 \times 77 \times 155 = 11935$ et $xyz = 5 \times 13 \times 31 = 2015$.

Exercice 7. Sur un cercle, on écrit 2012 nombres. Chacun d'entre eux vaut 1 ou -1. Soit S leur somme. On suppose qu'il n'existe pas 10 nombres consécutifs sur le cercle tels que leur somme fasse 0. Quelles sont les valeurs que peut prendre S à cette condition ?

Solution de l'exercice 7 La somme de 10 nombres consécutifs peut valoir $10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10$. Entre deux paquets successifs, qui ont donc neuf éléments sur dix en commun, la différence de la somme vaut soit soit 0 (si le dernier élément est le même dans chaque) soit 2 (si le dernier élément diffère). Ainsi, si on a une somme de dix nombres strictement positive, et une strictement négative, en se déplaçant de proche en proche sur le cercle, on passe de l'une à l'autre en ajoutant ou soustrayant 2 à chaque fois. Comme les sommes sont des entiers pairs, et qu'on change de signe, on passe nécessairement par 0, contradiction. Donc toutes les sommes de 10 nombres consécutifs sont de même signe.
Si elles sont toutes positives, elles valent au moins 2. Sur 10 nombres consécutifs, il y a donc au moins six 1, donc deux 1 consécutifs. Prenons donc deux 1 consécutifs sur le cercle. En considérant les 201 sommes consécutives disjointes formées par les 2010 autres nombres, on voit que $S \geqslant 402 + 2 = 404$. On peut trouver une configuration où $S = 404$: on dispose sur le cercle six 1 puis quatre -1, puis de nouveau six 1 et quatre -1, jusqu'à avoir 2010 nombres. Puis on rajoute deux 1 pour conclure. La somme totale vaut $6 \times 201 - 4 \times 201 + 2 = 404$, et on ne peut avoir plus de quatre -1 sur dix nombres consécutifs, donc toutes les sommes de dix tels nombres sont strictement positives. En changeant un à un les -1 en 1, S prend successivement toutes les valeurs paires entre 404 et 2012 (sans diminuer les sommes de dix entiers consécutifs). Ainsi, on peut réaliser toute somme paire entre 404 et 2012 au sens large, et c'est tout (S vaut 2012 moins deux fois le nombre de -1, donc S est paire et majorée par 2012).
De même les sommes négatives réalisables sont les entiers pairs entre -404 et -2012.

Exercice 8. Soit $ABCD$ un rectangle tel que $AB > BC$. Soit E le projeté orthogonal de B sur (AC), Γ le cercle passant par A et E et dont le centre se trouve sur (AD). Soit F le point d'intersection de Γ et $[CD]$. Prouver que (BF) est la bissectrice de $\widehat{AFC}$.



Solution de l'exercice 8 Soit $H \in (AD)$ tel que le cercle de diamètre $[AH]$ passe par E. Comme AFH est rectangle en F (car F point d'un cercle de diamètre $[AH]$) et ADF est rectangle en D, en exprimant le cosinus de l'angle $\widehat{A}$ de deux manières on voit que $\frac{AF}{AD} = \frac{AH}{AF}$. De même, en regardant d'une part AEH et ADC, on constate que $\frac{AE}{AH} = \frac{AD}{AC}$. Enfin, en considérant AEB et ABC, on trouve $\frac{AE}{AB} = \frac{AB}{AC}$.

Il vient alors $AF^2 = AD \cdot AH = AE \cdot AC = AB^2$, donc BAF est isocèle en A. On a donc $\widehat{AFB} = \widehat{ABF} = 90° - \widehat{CBF} = \widehat{CFB}$, donc (BF) est la bissectrice de $\widehat{CFA}$.