STAGE OLYMPIQUE JUNIOR 2015

Animath

Cachan, 19 au 23 octobre 2015

Avant-propos

Le stage olympique junior de toussaint a été organisé à Cachan par l'association Animath.

Son objet a été de rassembler des élèves de seconde, voire première, et de collège,
repérés entre autres par leur participation à diverses compétitions,
notamment la coupe Animath du 2 juin 2015,
et pour certains le test de l'OFM du 7 octobre 2015,
et de leur donner les bases nécessaires
pour participer aux compétitions internationales.
La moitié des participants ont été dès cette année
intégrés au groupe que l'Olympiade Française de Mathématiques
prépare à plusieurs compétitions internationales de 2015 :
Olympiade Internationale de Mathématiques,
Olympiade Balkanique Junior de Mathématiques,
Olympiade Européenne de Mathématiques pour Filles
notamment.

Nous tenons à remercier l'internat d'excellence de Cachan pour son excellent accueil.

Les Animatheux


Martin Andler

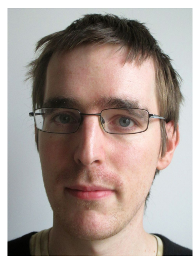

Pierre Bornsztein


Vincent Bouis


Thomas Budzinski

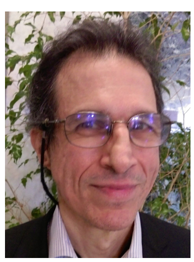

Guillaume Conchon-Kerjan


Colin Davalo


Vincent Jugé


Nathalie Kesler

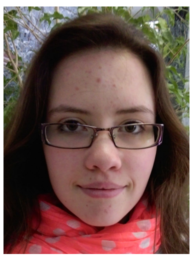

Matthieu Lequesne

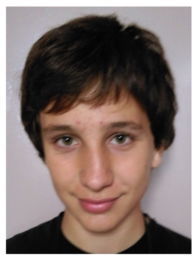

François Lo Jacomo

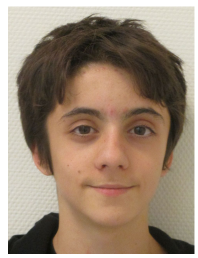

Roger Mansuy

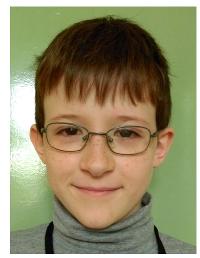

Jean-Louis Tu

Les élèves

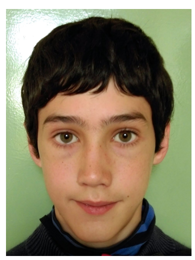

Nina Arimont

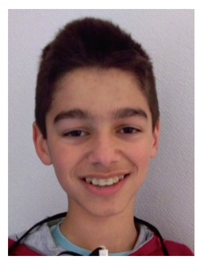

Théo Auvray


Pierre Ayanidès

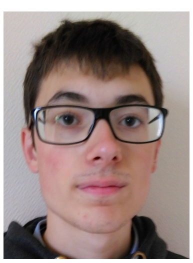

Dominique Bazin


Paul Cahen

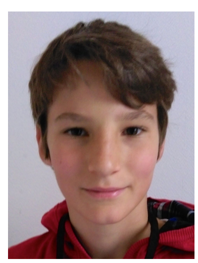

Justin Cahuzac


Mathis Degryse

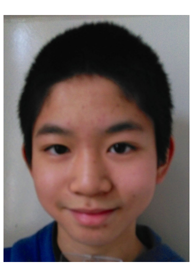

Aymeric Ducatez

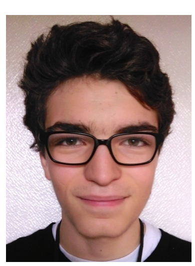

Pierre-Marie Esmenjaud


Lucas Fournier

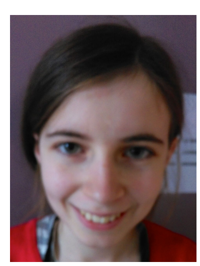

Mathis Girault


Linda Gutsche


Lucien Hua

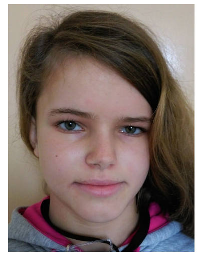

Julien Jampsin

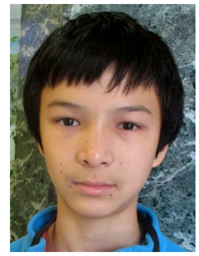

Alexandra Kortchemski


Evelyne Le Bezvoet


Victor Lu

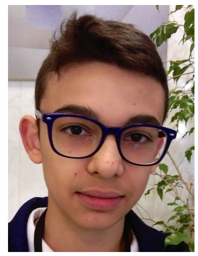

Anna Luchnikova

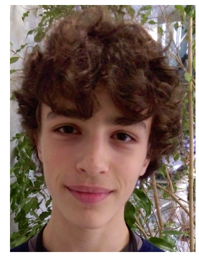

Marie Maignant


Etienne Massart

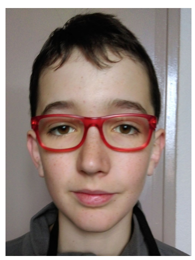

Alexander Monteith-Pistor


Marie Montéro


Tom Nahon


Victor Nélaton


Richard Pholvichith


Xavier Pigé

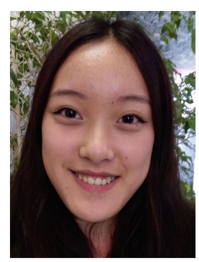

Eugénie Roger

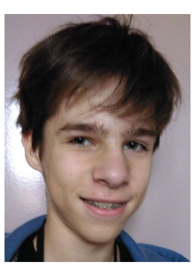

Juraj Rosinsky


Baptiste Serraille


Eglantine Vialaneix


Mathis Wetterwald


Emilie Ying


Jean Zablocki

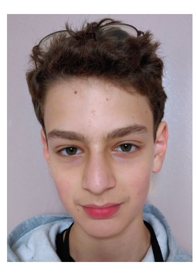

Ilan Zysman

Table des matières

I. Déroulement du stage

Pour ce septième stage olympique junior, nous avons décidé d'accepter les élèves de quatrième à seconde quel que soit leur âge, et même une élève de première de treize ans, susceptible d'être candidate aux EGMO et aux JBMO. Parmi plus de soixante candidatures, nous avons ainsi admis 34 stagiaires, 1 de première, 11 de seconde, 16 de troisième, 6 de quatrième (âge moyen 14,05 ans), venus de 11 Académies (soit 16 départements) - dont les Académies de Paris (4 élèves), Versailles (6 élèves), Grenoble (7 élèves) et Lyon (5 élèves) - et trois élèves de l'étranger (Canada, Allemagne frontalière, Suisse frontalière). La diversification géographique est donc en progression, avec moins de Paris / Versailles (29%), mais plus de Lyon / Grenoble (35%), et pour la première fois, nous avions 10 filles, soit plus de 29% (3 de quatrième, 3 de troisième, 3 de seconde et 1 de première).

Le premier jour, les stagiaires sont arrivés entre 10 h et 12 h 45 : les deux derniers ont raté la séance de présentation du stage. Treize d'entre eux arrivaient Gare de Lyon, entre 9 h 05 et 10 h 55, dont six sont venus ensemble avec une mère d'élève. Après les formalités d'accueil par Matthieu Lequesne, Nathalie Kesler et François Lo Jacomo, présentation du stage à 12 h. Mais c'est l'après-midi que les choses sérieuses ont commencé, avec, de 14 h à 16 h, un test initial pour aider à répartir les élèves en deux groupes (débutants et avancés), indépendamment de la classe. Comme nous l'avions expérimenté lors du stage d'été, nous commencions par demander aux élèves dans quel groupe ils souhaitaient être et s'ils connaissaient les notions que nous comptions enseigner aux débutants, avant de vérifier leur acquis au moyen de deux exercices difficiles de géométrie et deux plus faciles de stratégies de base. Nous avions également sous la main les performances des stagiaires à la coupe Animath de juin 2015, au test de l'OFM eu 7 octobre 2015 ainsi qu'aux stages olympiques de Valbonne (août 2015) et Cachan (octobre 2014). La répartition dans les groupes fut terminée rapidement, vers 17 h 30, et c'est après le dîner, à 20 h 30, que Colin Davalo a présenté aux élèves la correction des exercices du test.

Les horaires étaient ceux de l'an passé : petit déjeuner à 8 h, cours en parallèle de 9 h à 10 h 30 et de 11 h à 12 h 30, déjeuner à 12 h 30, cours de 14 h à 16 h et de 16 h 30 à 17 h 30 avec un goûter à 16 h, dîner à 19 h suivi généralement d'une soirée à 20 h 30. Puis les stagiaires pouvaient encore jouer, mais à 23 h, extinction des feux. Nous étions regroupés dans l'aile des filles, les filles dans deux chambres (7 lits et 3 lits pour les trois filles de quatrième) avec leurs douches, et les garçons dans le reste du couloir (groupés en principe par classe puis date de naissance, avec les trois Mathis dans la même chambre).

Mardi soir, Matthieu Lequesne a proposé trois thèmes de conférence aux élèves qui ont voté majoritairement pour la cryptographie. François Lo Jacomo a présenté, le mercredi soir, les Olympiades de Mathématiques. Et la dernière soirée, jeudi était traditionnellement libre. Comme le stage commençait par un test (non noté), nous n'avons organisé qu'un second test le vendredi matin (9 h à 12 h) portant sur les trois journées de cours : géométrie le mardi et mercredi matin, stratégies de base (débutants) et algèbre (avancés) le mercredi après-midi et jeudi. Les énoncés n'étaient bien sûr pas les mêmes pour les avancés et les débutants. Vendredi après-midi, outre les formalités de départ, il restait à présenter la correction du test et rendre les copies, distribuer le polycopié : la fin du stage était prévue vers 16 h.

		Débutants	Avancés
Lundi	10h-12h	Arrivée et installation	
	12h-12h30	Présentation du stage	
	14h-16h	**Test initial**	
	20h30	Correction du test initial	
Mardi	Matin	Géométrie (Vincent Bouis)	Géométrie (François Lo Jacomo)
	Après-midi	Géométrie (Colin Davalo)	Géométrie (Vincent Jugé)
	20h30	**La cryptographie (Matthieu Lequesne)**	
Mercredi	Matin	Géométrie (Jean-Louis Tu)	Géométrie (Guillaume Conchon-Kerjan)
	Après-midi	Stratégies de base (Roger Mansuy)	Algèbre (Jean-Louis Tu)
	20h30	**Les Olympiades Internationales (François Lo Jacomo)**	
Jeudi	Matin	Stratégies de base (Thomas Budzinski)	Algèbre (Matthieu Lequesne)
	Après-midi	Stratégies de base (Martin Andler)	Algèbre (Pierre Bornsztein)
Vendredi	9h-12h	**Test final**	
	14h30	Correction du test final - clôture du stage	

Quelques liens utiles pour poursuivre le travail réalisé pendant ce stage :

— Le site d'Animath : `www.animath.fr`

— Le site MathLinks : `www.mathlinks.ro`

II. Exercices d'échauffement

1 Enoncés

Exercice 1

Soit $ABCD$ un rectangle, E et F les milieux des côtés $[AD]$ et $[DC]$. On appelle G l'intersection des droites (AF) et (EC). Montrer que les angles $\widehat{CGF}$ et $\widehat{FBE}$ sont égaux.

Exercice 2

Soit ABC un triangle, I le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Montrer que $\frac{IB}{IC} = \frac{AB}{AC}$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle, D un point du segment $[AB]$ distinct de A et B. La parallèle à (BC) passant par D coupe $[AC]$ en E. Les droites (CD) et (BE) se coupent en J. La droite (AJ) coupe $[BC]$ et $[DE]$ en M et N respectivement. Montrer que M et N sont les milieux de $[BC]$ et $[DE]$.

Exercice 4

Soit $ABCD$ un parallélogramme, M un point du segment $[AD]$ distinct de A, N le milieu de $[AM]$. Les droites (BM) et (CN) se coupent en P. Montrer que la droite (AP) passe par le milieu de $[CD]$.

Exercice 5

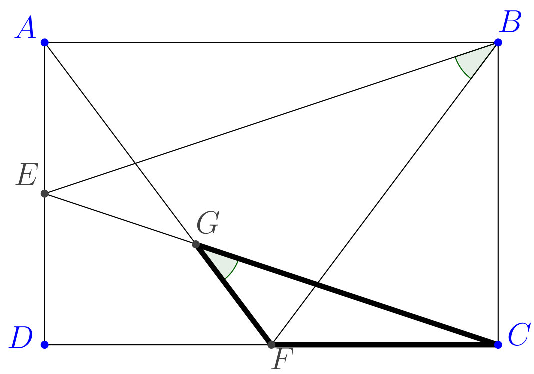
On considère 100 points du plan, tels qu'il n'y en ait jamais trois alignés. On trace toutes les droites passant par deux de ces points, et on suppose que si A, B, C, D sont quatre de ces points, alors (AB) et (CD) ne sont pas parallèles, et leur point d'intersection ne se trouve pas sur un autre droite. Combien de régions du plan sont ainsi formées par ces droites ?

Exercice 6

2014 arbres forment un cercle. Il y a un merle sur chaque arbre. A chaque étape, deux merles quittent l'arbre où ils sont pour se poser sur un arbre voisin. Est-ce possible qu'à un moment, tous les merles soient sur le même arbre ?

2 Solutions

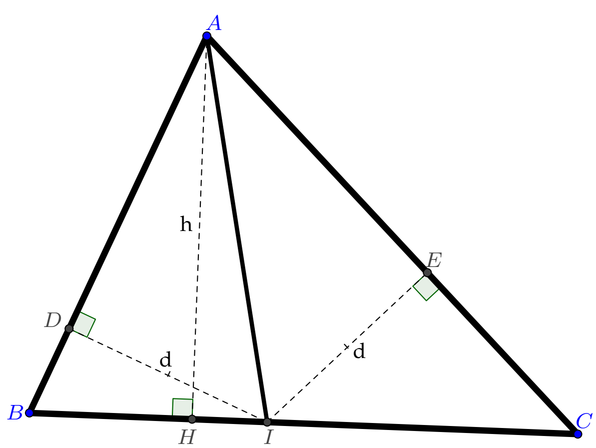
Solution de l'exercice 1



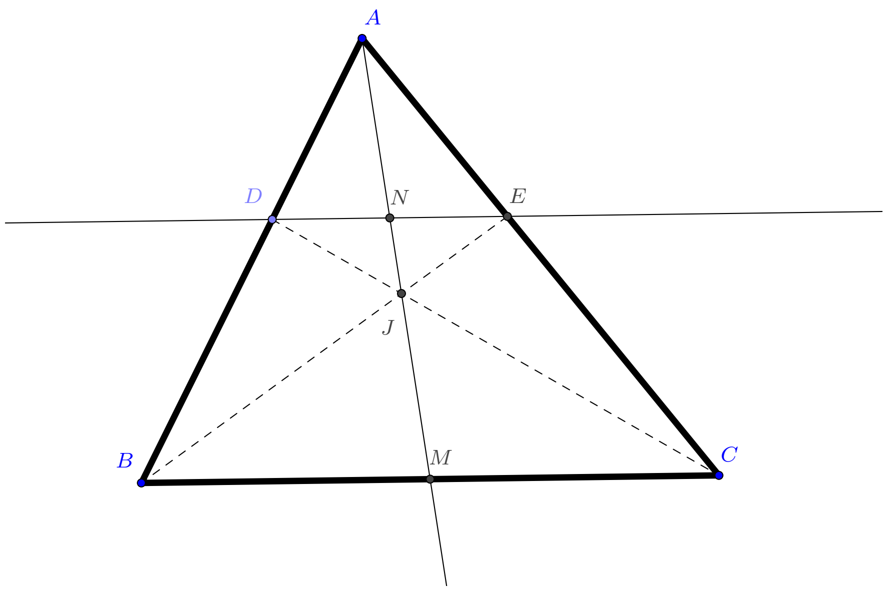
Dans le triangle FCG, les angles à la base $\widehat{CGF}$ et $\widehat{FCG}$ ont pour somme le supplémentaire $\widehat{AFD}$ du troisième angle. Or $\widehat{FCG} = \widehat{DCE} = \widehat{ABE}$ par symétrie, et $\widehat{AFD} = \widehat{BFC}$ (par symétrie), ce qui est égal à $\widehat{ABF}$ (angles alternes internes). Comme $\widehat{ABE} + \widehat{FBE} = \widehat{ABF}$, $\widehat{FBE} = \widehat{CGF}$.

Solution de l'exercice 2

Comme tout point de la bissectrice, I est à égale distance d des deux côtés (AB) et (AC) de l'angle $\widehat{BAC}$. Donc l'aire de ABI vaut, en considérant la hauteur de ce triangle issue de I : $\frac{1}{2} \times AB \times d$ et celle de ACI vaut de même : $\frac{1}{2} \times AC \times d$, d'où : $\frac{aire(ABI)}{aire(ACI)} = \frac{AB}{AC}$. Par ailleurs, en considérant la hauteur $[AH]$ issue de A, de longueur h, commune aux deux triangles ABI et ACI, l'aire de ABI vaut $\frac{1}{2} \times IB \times h$ et celle de ACI $\frac{1}{2} \times IC \times h$, d'où : $\frac{aire(ABI)}{aire(ACI)} = \frac{IB}{IC}$, ce qui achève la démonstration.



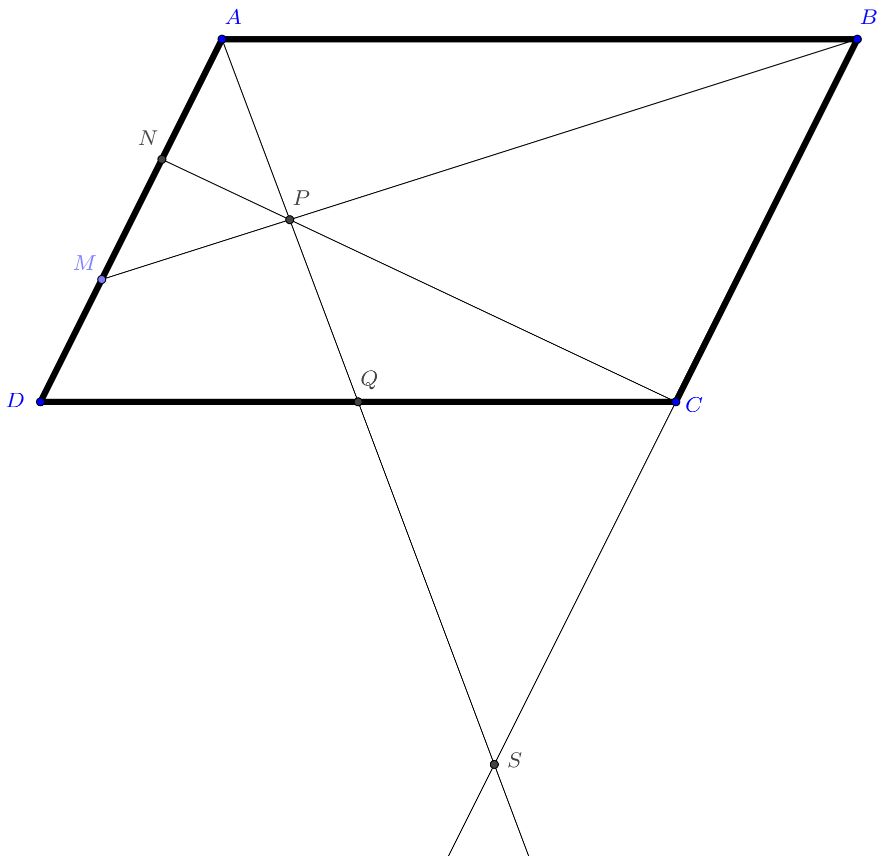
Solution de l'exercice 3



D'après le théorème de Thalès, appliqué aux droites (AB), (AM), (AC), $\frac{DN}{BM} = \frac{AN}{AM} = \frac{EN}{CN}$, donc $\frac{DN}{EN} = \frac{BM}{CM}$. Posons $k = \frac{DN}{EN} = \frac{BM}{CM}$. D'après le même théorème de Thalès, mais appliqué cette fois aux droites (JB), (JM) et (JC), $\frac{DN}{CM} = \frac{JN}{JM} = \frac{EN}{BM}$. donc $\frac{DN}{EN} = \frac{CM}{BM}$. Or $\frac{DN}{EN} = k$ et $\frac{CM}{BM} = \frac{1}{k}$. Donc $k = \frac{1}{k}$. Comme k est positif (rapport de longueurs), $k = 1$, d'où $DN = EN$ et $BM = CM$.

Solution de l'exercice 4

Appelons Q l'intersection de (AP) et (CD), et S l'intersection de (AP) et (BC). D'après le théorème de Thalès, $\frac{NP}{CP} = \frac{MN}{BC}$. Mais le même théorème de Thalès entraine : $\frac{NP}{CP} = \frac{AN}{SC}$. Comme par hypothèse $AM = MN$, on a : $SC = BC$. Dans le triangle SAB, CQ est la parallèle à la base passant par le milieu d'un côté, donc la droite des milieux des côtés SA et SB. Dès lors, $SQ = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$ car $AB = CD$, ce qui achève la démonstration.



<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

On part d'une région (le plan tout entier). Chaque fois que l'on trace une droite, on rajoute $1 + m$ régions, où m est le nombre de points d'intersections de la nouvelle droite avec les droites déjà tracées.

Notons $n = 100$. Le nombre de régions est donc égal à la somme des nombres suivants :

$A = 1$ (le nombre de régions de départ) ;

$B = \binom{n}{2}$ (le nombre de droites tracées) ;

$C = n(n-2)$ (pour chacun des n points, après avoir tracé une droite passant par ce point on trace encore $n-2$ droites passant par ce point) ;

$D = 3\binom{n}{4}$ (si A, B, C, D sont quatre points distincts parmi les 100, alors on forme les nouveaux points d'intersection $(AB)\cap(CD)$, $(AC)\cap(BD)$, $(AD)\cap(BC)$).

Le nombre total de régions est donc

$$1 + \frac{n(n-1)}{2} + n(n-2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8} = 11778426.$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>

Numérotons les arbres dans l'ordre où ils se suivent sur le cercle, et distinguons les arbres de numéro pair et les arbres de numéro impair. Lorsqu'un merle quitte un arbre pour se poser sur un arbre voisin, soit il quitte un arbre de numéro pair pour se poser sur un arbre de numéro impair, soit il quitte un arbre de numéro impair pour se poser sur un arbre de numéro pair. Si deux merles, simultanément, quittent leurs arbres pour se poser sur un arbre voisin, soit les deux étaient sur des arbres de numéros pairs, et à la suite du mouvement, il y aura deux merles de moins sur l'ensemble de tous les arbres de numéro pair, soit l'un était sur un arbre de numéro pair et l'autre sur un arbre de numéro impair, et à la suite du mouvement il y aura autant de merles qu'avant sur l'ensemble de tous les arbres de numéro pair, soit tous deux étaient sur des arbres de numéros impairs, et à la suite du mouvement il y aura deux merles de plus sur l'ensemble de tous les arbres de numéros pairs. Quoi qu'il en soit, le nombre de merles sur l'ensemble de tous les arbres de numéros pairs va augmenter de -2, 0 ou 2, et il sera de même parité : puisqu'il était impair au départ (il y avait 1007 merles sur les arbres de numéros pairs), il sera toujours impair quelle que soit la suite de déplacements d'oiseaux, donc à aucun moment il ne peut être égal à 0 ni à 2014. Il n'est donc pas possible qu'à un moment, tous les merles soient sur le même arbre.

III. Lundi : Test initial

1 Enoncé

Vous allez être répartis en deux groupes : débutants et avancés. La répartition prendra en compte des informations que nous connaissons déjà (comme le test du 7 octobre, la coupe Animath du 2 juin), les informations que tu nous as données dans la "fiche récapitulative", mais aussi les réponses au questionnaire ci-dessous.

Durant la première moitié du stage, mardi et mercredi matin, les deux groupes travailleront la géométrie, mais le groupe débutant essentiellement la "chasse aux angles" (comme les exercices ci-dessous). Puis, mercredi après-midi et jeudi, le groupe des débutants travaillera sur les stratégies de base : principe des tiroirs, récurrence, ... pendant que le groupe avancé étudiera l'algèbre : manipulations algébriques, inégalités... Les questions ci-dessous visent à vérifier si les questions qui seront étudiées dans le groupe des débutants te sont déjà familières.

N'oublie pas d'écrire ton nom et ton prénom sur chacune des feuilles que tu rends. Utilise de préférence une feuille différente pour chaque exercice.

Souhaites-tu être dans le groupe des avancés ? $\boxed{\text{OUI}}$ $\boxed{\text{NON}}$

Géométrie

Connais-tu le théorème de l'angle inscrit ? $\boxed{\text{OUI}}$ $\boxed{\text{NON}}$

Essaie de résoudre (sur une feuille à part) les exercices suivants :

Exercice 1

Soit ABC un triangle, admettant O pour centre du cercle circonscrit. On construit un point P sur la demi-droite $[AC)$ et un point Q sur la demi-droite $[BA)$ de sorte que les triangles BPQ et ABC soient semblables, c'est-à-dire que l'on ait les égalités d'angles (non orientés) : $\widehat{BPQ} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{PQB} = \widehat{BCA}$. Montrer que O est l'orthocentre (intersection des hauteurs) du triangle BPQ.

Exercice 2

Soient A, B, C, D quatre points situés dans cet ordre sur un cercle. Les droites (AB) et (CD) se coupent en M, et les droites (AD) et (BC) se coupent en N.

Montrer que les angles (non orientés) $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CND}$ sont égaux si et seulement si A et C sont diamétralement opposés ou bien B et D sont diamétralement opposés.

Stratégies de base

— Connais-tu le principe des tiroirs ? $\boxed{\text{OUI}}$ $\boxed{\text{NON}}$
— Sais-tu ce qu'est une démonstration par récurrence ? $\boxed{\text{OUI}}$ $\boxed{\text{NON}}$

Essaie de résoudre (sur une feuille à part) les exercices suivants :

Exercice 3

Montrer que pour tout n entier strictement positif : $\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2} \leq 2-\frac{1}{n}$

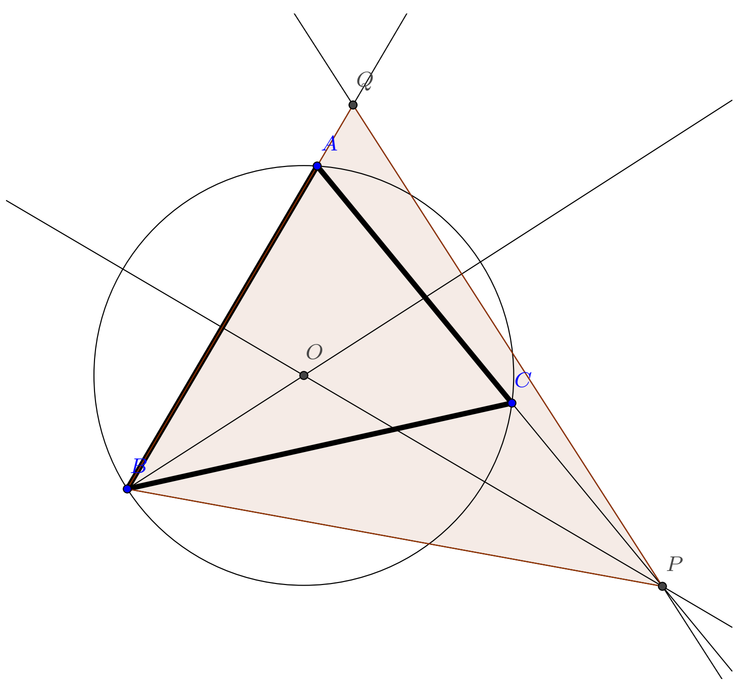
Exercice 4

Montrer que parmi 11 nombres entiers quelconques, mais distincts et compris entre 1 et 20, il y en a nécessairement deux dont la somme est 21.

2 Solution

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

La principale difficulté de ce problème est de bien faire la figure.

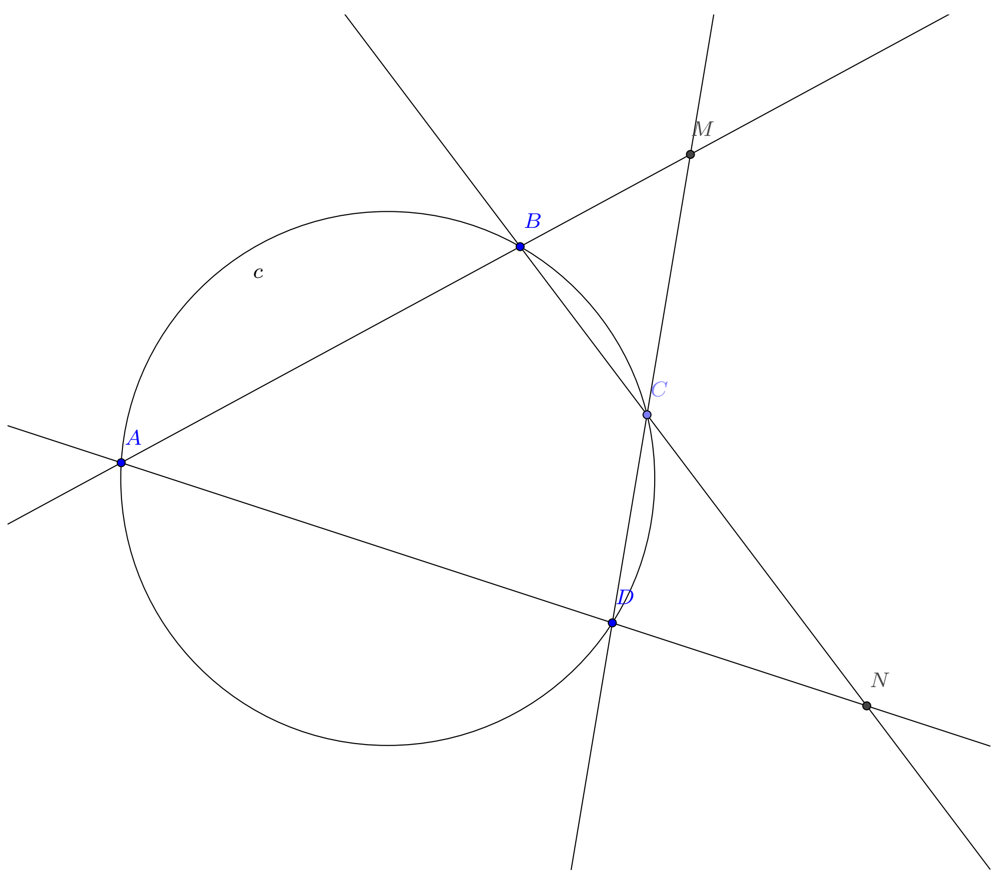


L'égalité d'angles $\widehat{BAC} = \widehat{PBQ}$, qui provient directement de l'hypothèse que les triangles ABC et BPQ sont semblables, entraîne que le triangle PAB est isocèle, donc que P appartient à la médiatrice de $[AB]$, qui passe par O : PO, perpendiculaire à (AB) donc à (BQ), est bien une hauteur du triangle BPQ. Il reste à prouver que O appartient à une autre hauteur de ce même triangle BPQ, à savoir BO. En effet, dans le triangle isocèle AOB, l'angle au centre $\widehat{AOB} = 2 \times \widehat{ACB}$, donc $\widehat{ABO} = 90^o - \widehat{ACB}$. Or par hypothèse, du fait que les triangles ABC et BPQ sont semblables, $\widehat{PQB} = \widehat{BCA}$. Si l'on appelle X l'intersection de (BO) et (PQ), le triangle XBQ a deux angles complémentaires : son troisième angle est droit, et BO est bien perpendiculaire à QP. C'est bien une hauteur du triangle BPQ, d'où O, intersection de deux hauteurs du triangle, est l'orthocentre dudit triangle.

Solution de l'exercice 2

Il faut bien démontrer l'équivalence, c'est-à-dire l'implication dans les deux sens.

Par ailleurs, il faut distinguer plusieurs cas de figures, qui conduiront soit à A et C diamétralement opposés, soit à B et D diamétralement opposés.



Dans le cas de figure ci-dessus, si A et C sont diamétralement opposés, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ sont droits, donc dans les triangles ABN et ADM les angles $\widehat{ANB}$ et $\widehat{AMB}$ valent tous deux $90^o - \widehat{BAD}$.

Réciproquement, si les angles $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CND}$ sont égaux, dans les triangles ABN et ADM, on en déduit que les angles $\widehat{ABN}$ et $\widehat{ADM}$ sont égaux. Or ils sont supplémentaires, car ils interceptent l'un l'arc $\widehat{ADC}$, l'autre l'arc $\widehat{ABC}$. Donc ils sont tous deux droits, ce qui équivaut au fait que les points A et C sont diamétralement opposés.

Solution de l'exercice 3

C'est un exercice classique de récurrence :

— *Initialisation* La propriété est vraie pour $n = 1$, car $1 \leq 2 - \frac{1}{1}$. Notons que le nombre 2 n'intervient que dans cette phase d'initialisation ; or il joue un rôle fondamental dans le résultat.

— *Hérédité* Si la propriété est vraie pour n, alors elle est vraie pour $n+1$ car :

$$\left(1 + \cdots + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{(n+1)^2} \leq \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{(n+1)^2}$$
$$\leq \left(2 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n(n+1)} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

Solution de l'exercice 4

Groupons deux par deux les nombres de 1 à 20 : $(1, 20)$, $(2, 19)$, $(3, 18)$, ... $(10, 11)$. Deux nombres appartenant au même groupe ont pour somme 21. Si je choisis onze nombres entre 1 et 20, ils ne peuvent pas appartenir tous à des groupes distincts, puisqu'il n'existe que dix groupes distincts. Nécessairement deux d'entre eux appartiendront au même groupe, et auront pour somme 21. C'est une application immédiate du principe des tiroirs.

IV. Débutants

1 Mardi et mercredi matin : Géométrie

1 mardi matin : Vincent Bouis

Le texte en question n'est pas arrivé à temps.

2 mardi après-midi : Colin Davalo

L'objet de ce cours est de présenter certaines techniques importantes pour résudre des problèmes de géométrie, tels que les triangles semblables, la puissance d'un point par rapport à un cercle, et les axes radicaux.

Triangles semblables et isométriques

Deux triangles sont semblables si ils ont la même forme. Les quatre conditions suivantes sont deux à deux équivalentes :

- les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables (ce qui est noté $ABC \sim A'B'C'$),
- $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, et $\widehat{C} = \widehat{C'}$,
- $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$ et $\frac{BC}{BA} = \frac{B'C'}{B'A'}$,
- $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\frac{AB}{AC} = \frac{A'B'}{A'C'}$.

Remarque 1. Attention, les longueurs dont on prend les rapports dans la troisième condition doivent être celles des segments adjacents aux angles égaux choisis.

Deux triangles sont isométriques lorsqu'ils ont les mêmes longeurs de coté.

Exercice 1

Soit $ABCEDF$ un hexagone aux côtés opposés parrallèles entre eux, et $AB = DE$.

Montrer que $BC = DE$ et $CD = FA$.

Exercice 2

Soient C_1 et C_2 s'intersectant en A et B. Soient C sur C_1 et D sur C_2 des points tels que (AB) bissecte $\widehat{CAD}$. Soient E l'intersection de $[AC]$ et C_2, et F l'intersection de $[AD]$ et C_1.

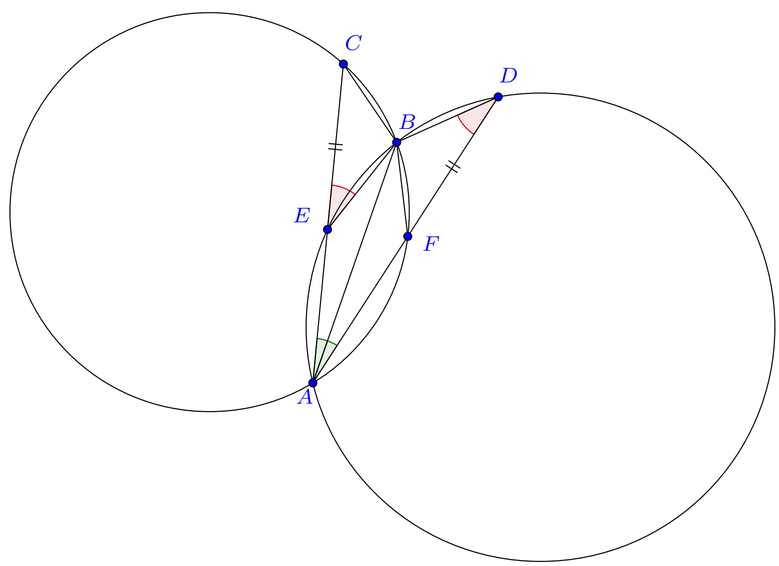
Montrer que $CE = DF$.

Solution de l'exercice 1

Comme AB est parrallèle à DE et $AB = DE$, le quadrilatère $ABDE$ est un parallélogramme. Donc BD est parrallèle à AE et $BD = AE$.

Donc les triangles BCD et EFA sont semblables, et même isométriques. Ainsi, $BC = EF$ et $CD = FA$.

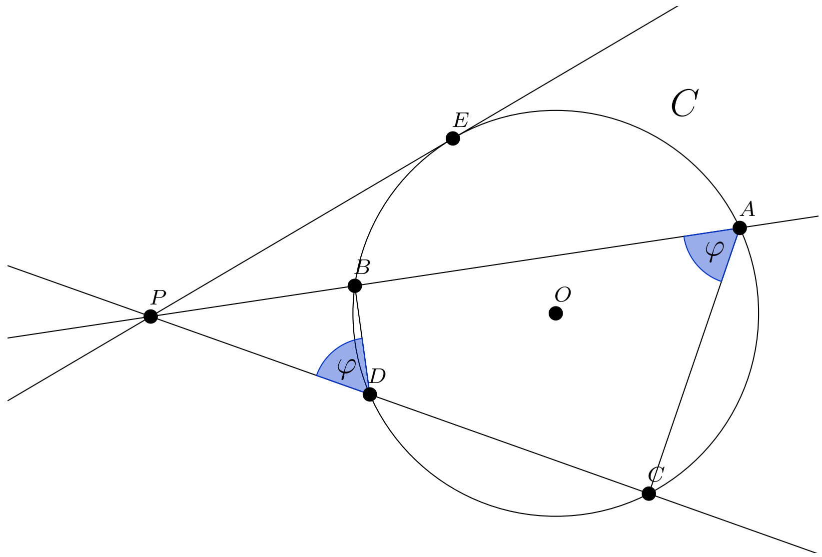
Solution de l'exercice 2



Par le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{BDF} = \widehat{BEC}$ et $\widehat{BFD} = \widehat{BCE}$, donc les triangles CBE et FBD sont semblables. De plus, puisque (AB) bissecte $\widehat{CAD}$, B est le milieu de l'arc entre D et E donc $DB = BE$,donc CBE et FBD sont isométriques. Ainsi on a bien $BC = EF$ et $CD = FA$.

Puissance d'un point et axes radicaux

Soient un cercle C de centre O et de rayon r et un point P. On considère trois droites passant par P et coupant le cercle C : la première le coupe en A et B, la deuxième en C et D, et la troisième est une tangente au cercle, qu'elle ne coupe donc qu'en un point, E.



On a alors : $PA \times PB = PC \times PD = PE^2 = PO^2 - r^2$.

Cette quantité ne dépend donc pas de la droite passant par P avec laquelle on intersecte C. Il s'agit de la puissance du point P par rapport au cercle C, notée $\mathcal{P}_C(P)$.

De plus si on prend A, B, C, D quatre points et M l'intersection de (AB) et (CD), A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si $AM \times BM = Cm \times DM$.

Définition 2. On appelle axe radical radical de deux cercles l'ensemble des points ayant la même puissance par rapport aux deux cercles.

Proposition 3. Si les deux cercles sont distincts, l'axe radical est une droite perpendiculaire à la droite passant par les centres des cercles, et si les deux cercles s'intersectent, l'axe radical passe par leurs points d'intersections.

Exercice 3

Soient C_1 et C_2 deux cercles qui s'intersectent en A et B. Soient C,D deux points de C_1 et E, F deux points de C_2.

Montrer que (EF), (CD) et (AB) sont concourantes si et seulement si E, F, C, D sont cocycliques

Exercice 4

Soient C_1, C_2 et C_3 trois cercles distincts, A_1 et B_1 les intersections de C_2 et C_3, A_2 et B_2 les intersections de C_1 et C_3 et A_3 et B_3 les intersections de C_1 et C_2.

Montrer que (A_1B_1), (A_2B_2) et (A_3B_3) sont concourantes ou parrallèles.

Exercice 5

Soit ABC un triangle. Soient M, N, O les milieux des segments $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$, et soient P, Q et R les pieds des hauteurs du triangle issues de A, B et C.

Montrer que M, N, O, P, Q, R sont cocycliques.

Exercice 6

Soit A, B, C, D quatre points alignés dans cet ordre, et soient C_1 et C_2 les cercles de diamètre $[AC]$ et $[BD]$. Soient X, Y les intersections de C_1 et C_2.Soit P un point quelquonque sur $[XY]$. Soit N la seconde intersection entre (BP) et C_2, et M la seconde intersection entre (CP) et (C_1).

(1) Montrer que M, N, B, C sont cocycliques.

(2) Montrer que (AM), (XY), et (ND) sont concourantes.

Exercice 7

Soient C_1 et C_2 deux cercles s'intersectant en A et B ayant pour tangeante commune (MN) avec M sur C_1 et N sur C_2. Soit I l'intersection de (MN) et (AB).

Montrer que I est le milieu de (AB).

Exercice 8

Soient deux cercles C_1 et C_2 s'intersectant en M et N. Soit AB La tangente à A et B, respectivement, afin que M soit plus près de AB que N. Soit CD la parralèle AB passant par M, avec C sur G_1 et D sur G_2. Les droites AC et BD s'intersectent en E, les droites AN et CD s'intersectent en P et les droites BN et CD s'intersectent en Q.

Montrer que $EP = EQ$.

Nous avons également mentionné une propriété sur le pied de la bissectrice.

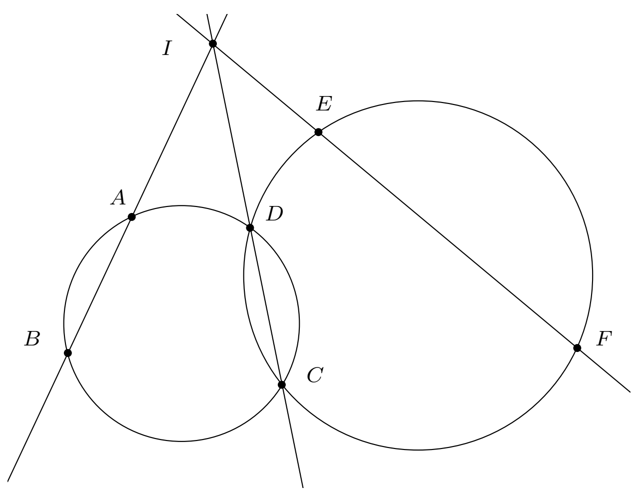
Proposition 4. Soit ABC un triangle, et D le pied de la bissectrice issue de B, alors $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$.

Exercice 9

Soit ABC un triangle, D le pied de la bissectrice issue de B, soit F la seconde intersection entre (BC) et le cercle circonscrit à ABD et E la seconde intersection entre (AB) et le cercle circonscrit à CBD.

Montrer que $AE = FC$.

Solution de l'exercice 3

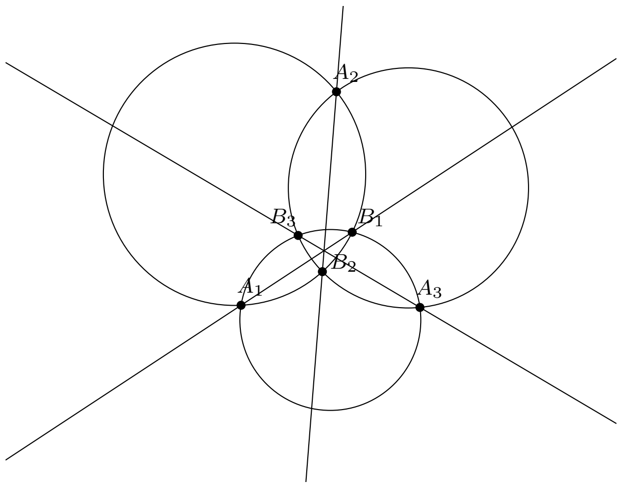


Supposons d'abord que les trois droites soient concourantes. Alors la puissance de I par rapport au cercle de gauche vaut $IA \cdot IB = ID \cdot IC$. La puissance de I par rapport au cercle de droite vaut $ID \cdot IC = IE \cdot IF$. On en déduit que $IA \cdot IB = IE \cdot IF$, et donc que A, B, F, E sont cocycliques.

Réciproquement, si A, B, F, E sont cocycliques, notons I le point d'intersection des droites (AB) et (EF). La puissance de I par rapport au cercle circonscrit à

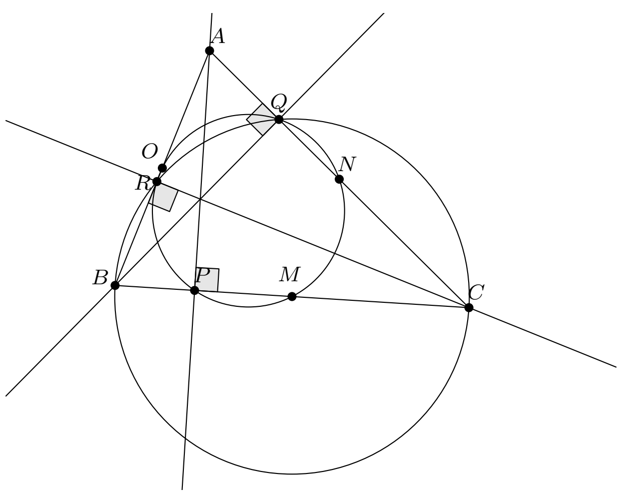
$ABFE$ vaut $IA \cdot IB = IE \cdot IF$. Donc I a même puissance par rapport aux deux cercles de la figure. I est donc sur leur axe radical, qui est (DC). Les trois droites (AB), (CD) et (EF) sont donc concourantes en I.

Solution de l'exercice 4



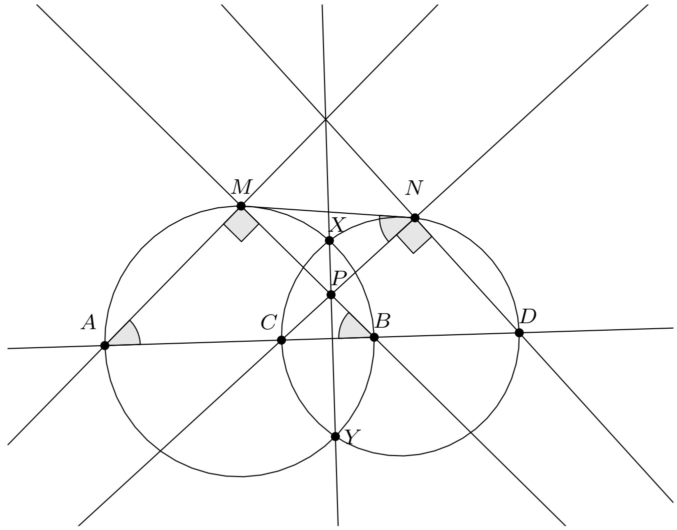
Soit nos droites sont parallèles, soit deux d'entre elles s'intersectent, disons (A_1B_1) et (A_2B_2), et notons alors M leur intersection. Ainsi la puissance de M par rapport à C_1 est la même que celle par rapport à C_3 car (A_2B_2) est l'axe radical de C_1 et C_3. De même la puissance de M par rapport à C_3 ets la même que sa puissance par rapport à C_2. Ainsi M a la même puissance par rapport à C_1 et C_2 donc M appartient à leur axe radical, donc à (A_3B_3).

Solution de l'exercice 5



On va montrer tout d'abord que N, O, Q, et R sont sur un même cercle. En effet, les angles droits nous montrent que B, C, Q, et R sont cocycliques. $AB \times AR = AC \times AQ$. Or N et O sont les milieux de $[BC]$ et $[AB]$ donc $2 \times AO \times AR = 2 \times AN \times AQ$, donc $AO \times AR = AN \times AQ$, ainsi N, O, Q, et R sont cocycliques.

Soit C_1 ce cercle, et de même C_2 le cercle qui passe par O, M, P, et R et C_3 celui qui passe par N, M, P, et Q. leurs axes radicaux ne sont pas concourants, ni parallèles car ce sont les droites (AB), (BC) et (CA) donc les 3 cercles ne sont pas tous distincts, et donc les trois sont confondus (si deux sont confondus, le troisième l'est aussi car il a 4 points en commun avec les deux autres). Ce cercle s'appelle le cercle d'Euler.



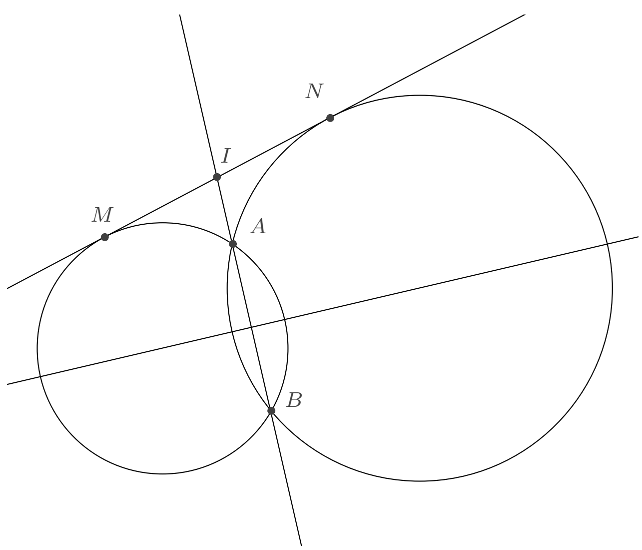
Solution de l'exercice 6

Pour la première question, il faut voir que $PM \times PB = PC \times PN$, puisque P est sur l'axe radical des deux cercles, et donc B, C, M, et N sont cocycliques.

Ensuite il faut faire une chasse aux angles pour montrer que A, D, M, et N sont cocycliques, en traduisant le fait que $[AC]$ et $[BD]$ soient des diamètres par des angles droits sur la figure, donc $\widehat{MBC} = \widehat{CNM}$ donc $\widehat{DNM} = 90^o + \widehat{CNM} = 90^o + \widehat{MBC} = 180^o - \widehat{MAC}$. Ainsi A, D, M, et N sont cocycliques.

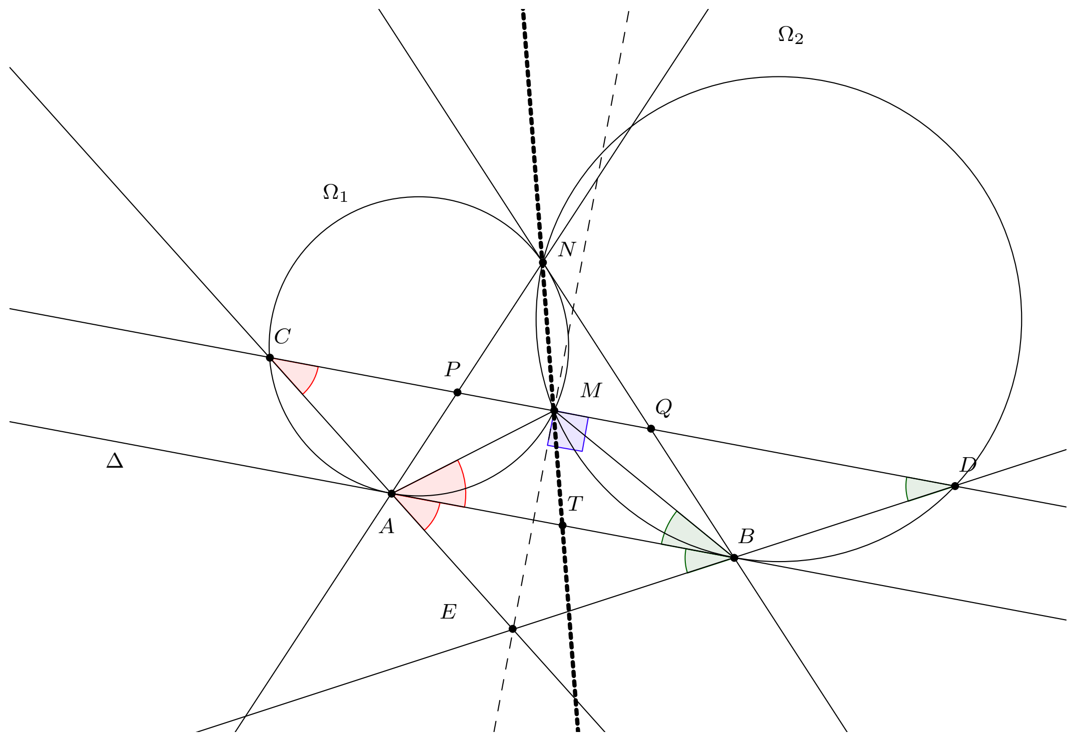
On conclut en utilisant l'exercice 3 pour montrer que les droites sont sécantes.

Solution de l'exercice 7



La puissance de I par rapport au premier cercle vaut $IM^2 = IA \cdot IB$. La puissance de I par rapport au deuxième cercle vaut $IA \cdot IB = IN^2$. On en déduit que $IM^2 = IN^2$, d'où $IM = IN$.

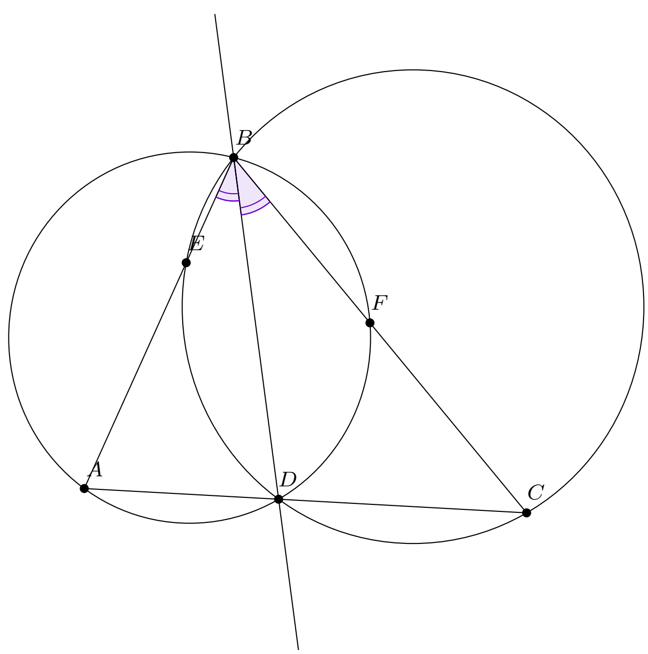
Solution de l'exercice 8



On montre par chasse aux angles que $\widehat{ABE} = \widehat{CDE} = \widehat{MBA}$ et que $\widehat{BAE} = \widehat{MAB}$. Ces égalités impliquent que M et E sont images l'un de l'autre par la symétrie par rapport à la droite (AB). Les droites (ME) et (AB) sont orthogonales, puis les droites (ME) et (PQ) sont orthogonales.

On note T l'intersection des droites (MN) et (AB), et on sait que T est le milieu de $[AB]$ Le théorème de Thalès montre alors que M est le milieu de $[PQ]$. En somme, (ME) est la médiatrice de $[PQ]$. E est donc bien équidistant de P et de Q.

Solution de l'exercice 9

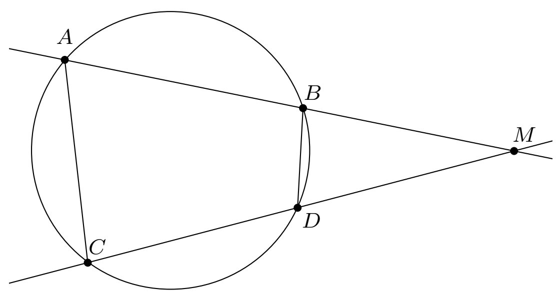


On sait par la puissance d'un point que $AE \times AB = AD \times AC$ et que $CF \times CB = CD \times AC$, Donc $\frac{AE \times AB}{CF \times CB} = \frac{CD}{AD}$. Or la propriété de la bissectrice appliquée ici nous donne que puisque $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$, alors $\frac{AE}{BF} = 1$, donc $AE = BF$.

3 mercredi matin : Jean-Louis Tu

Exercice 1 Soient A, B, C, D quatre points d'un cercle. On suppose que (AB) et (CD) se rencontrent en un point M. Trouver deux triangles semblables.

Solution de l'exercice 1

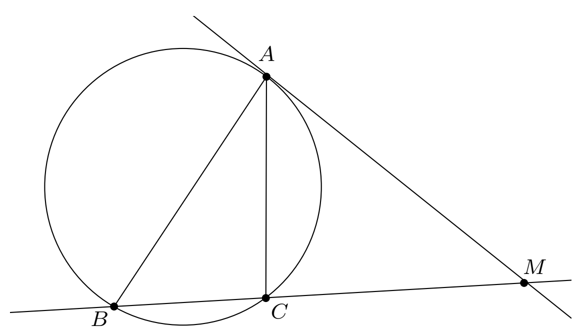


Supposons par exemple que A, B, M soient alignés dans cet ordre et C, D, M alignés dans cet ordre, et aussi que M soit extérieur au cercle (les autres cas se traitent de même).

On a $\widehat{MAC} = \widehat{BAC} = 180° - \widehat{BDC} = \widehat{MDB}$. Comme de plus $\widehat{AMC} = \widehat{DMB}$, les triangles MAC et MDB sont semblables.

Exercice 2 Soient A, B, C trois points sur un cercle. La tangente en A rencontre (BC) en M. Trouver deux triangles semblables.

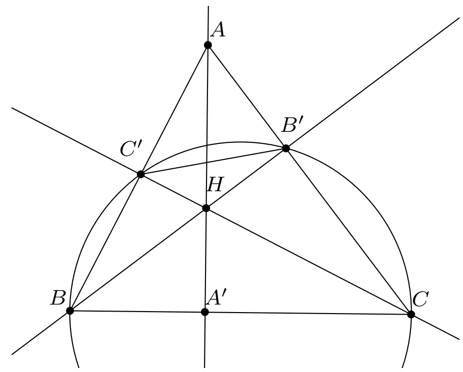
Solution de l'exercice 2



C'est un cas particulier du précédent avec deux points confondus. Les triangles MAB et MCA sont semblables.

Exercice 3 Soient ABC un triangle et A', B', C' les pieds des hauteurs. Trouver des triangles semblables.

Solution de l'exercice 3



Il y a beaucoup de triangles semblables, mais montrons par exemple que ABC et $AB'C'$ sont semblables. Les points $BCB'C'$ sont sur le cercle de diamètre $[BC]$. D'après le premier exercice, ABC et $AB'C'$ sont semblables.

Exercice 4 Avec les mêmes notations, soit H l'orthocentre. Montrer que $\dfrac{A'B}{AA'} = \dfrac{A'H}{A'C}$.

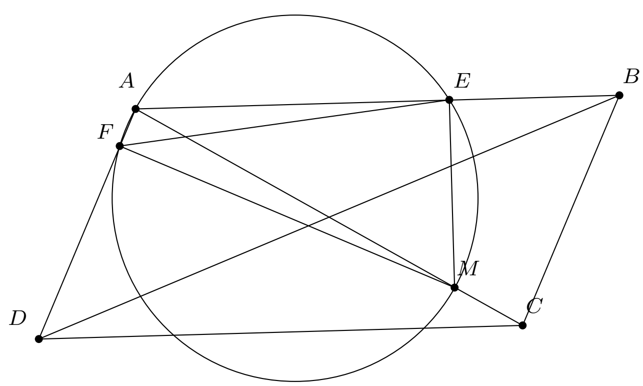
Solution de l'exercice 4 $\widehat{BAA'} = 90° - \widehat{A'BA}$ car BAA' est rectangle en A'.

De plus, $\widehat{A'BA} = \widehat{CBC'} = 90° - \widehat{C'CB}$ car $C'CB$ est rectangle en C'.

On en déduit que $\widehat{BAA'} = \widehat{HCA'}$. Comme par ailleurs BAA' et HCA' sont rectangles en A', on en déduit qu'ils sont semblables.

Exercice 5 Dans un parallélogramme $ABCD$, on prend un point M sur la diagonale (AC). De M on trace (ME) perpendiculaire à (AB) et (MF) perpendiculaire à (AD). Démontrer que $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{AD}{AB}$.

Solution de l'exercice 5



On veut montrer que $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{AD}{AB}$, ou encore que $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{DA}{DC}$. Pour cela, il suffit de montrer que MEF et DAC sont semblables.

On a $\widehat{FEM} = \widehat{FAM}$ car $FMEA$ sont cocycliques. De plus, $\widehat{FAM} = \widehat{DAC}$, donc $\widehat{FEM} = \widehat{DAC}$.

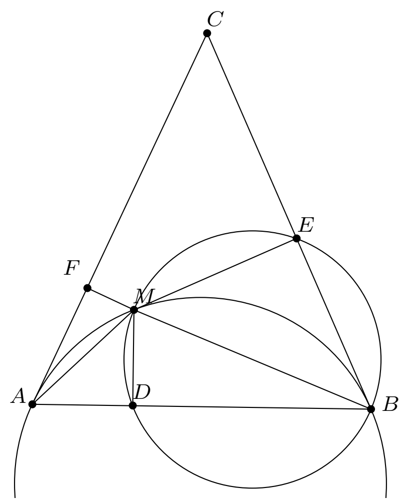
De même, $\widehat{MFE} = \widehat{MAE} = \widehat{ACD}$.

Ceci prouve que MEF et DAC sont semblables.

Exercice 6 On donne un triangle isocèle ABC et le cercle tangent aux côtés égaux $[CA]$ et $[CB]$ aux points A et B. D'un point M de l'arc de ce cercle intérieur au triangle, on trace des perpendiculaires $[MD]$ sur la base du triangle, $[MF]$ et $[ME]$ sur les côtés égaux.

Démontrer que $MD^2 = ME \cdot MF$.

Solution de l'exercice 6

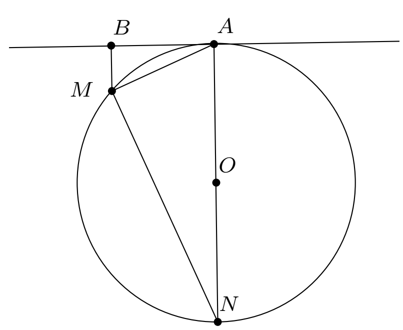


$\widehat{MDF} = \widehat{MAF}$ car $MDAF$ sont cocycliques. De plus, $\widehat{MAF} = \widehat{MBA}$ car (AF) est tangent au cercle MBA. Enfin, $\widehat{MBA} = \widehat{MBD} = \widehat{MED}$ car $MDBE$ sont cocycliques.

Par conséquent, $\widehat{MDF} = \widehat{MED}$. De même, on démontrerait que $\widehat{MDE} = \widehat{MFD}$. Donc MDF et MED sont semblables, ce qui donne que $\frac{MD}{MF} = \frac{ME}{MD}$, ou encore $MD^2 = ME \cdot MF$.

Exercice 7 On trace la tangente (AX) à un cercle de centre O passant par A. Soit M un deuxième point du cercle. Montrer que $MA^2 = dD$ où d est le diamètre du cercle et D est la distance entre M et la droite.

Solution de l'exercice 7

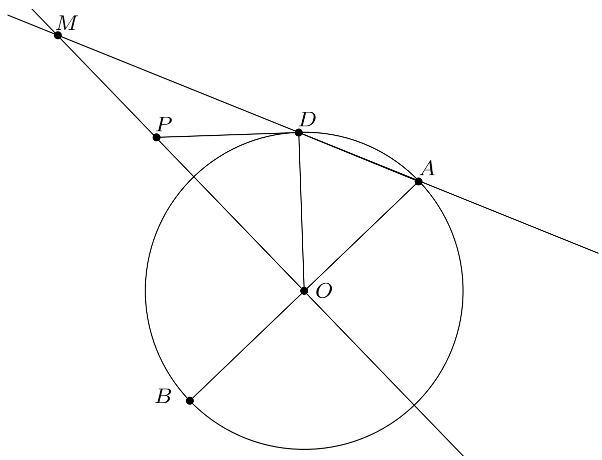


Notons B le projeté de M sur (AX) et N le point diamétralement oppose à A. Alors ANM est rectangle en M, et AMB est rectangle en B. De plus, $\widehat{MAN} = \widehat{AMB}$ car les droites (AN) et (MB), étant perpendiculaires à (AX), sont parallèles.

On en déduit que MAN et BMA sont semblables, donc $\frac{MA}{AN} = \frac{BM}{MA}$, ce qui donne $\frac{MA}{d} = \frac{D}{MA}$, ou encore $MA^2 = dD$.

Exercice 8 D'un point extérieur P, on mène une tangente $[PD]$ à un cercle de centre O. On joint le point de contact D aux extrémités A et B du diamètre perpendiculaire à (PO). Les droites (DA) et (DB) rencontrent (PO) aux points M et N. Montrer que $PM = PN = PD$.

Solution de l'exercice 8



$\widehat{PDB} = \widehat{DAB}$ car (PD) est tangent au cercle DAB, donc $\widehat{PDN} = \widehat{DAO}$.

D'autre part, $\widehat{DNP} = \widehat{DAO}$ car $(DN) \perp (DA)$ et $(NP) \perp (AO)$, donc $\widehat{DNP} = \widehat{PDN}$.

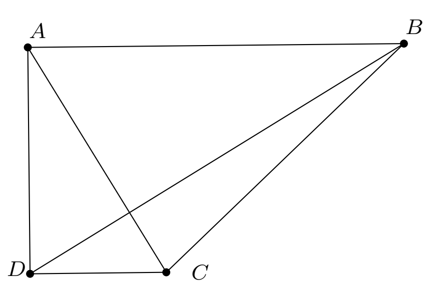
On en déduit que PDN est isocèle en P, et donc $PN = PD$. On montre de même que $PM = PD$.

Exercice 9 Soit un trapèze $ABCD$ rectangle en A et D. On pose $AB = a$, $CD = b$, $AD = h$.

1) Quelle relation doit-il exister entre a, b, h pour que les diagonales (AC) et (BD) soient perpendiculaires ?

2) Soit M le milieu de $[AD]$. Quelle relation doit-il exister entre a, b, h pour que le triangle BMC soit rectangle en M ?

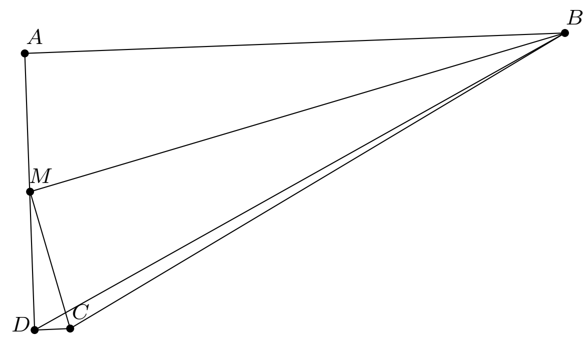
Solution de l'exercice 9 1)



ADC et BAD sont semblables car $\widehat{DAC} = 90° = \widehat{BAD}$, et $\widehat{DAC} = \widehat{CDB}$ car $(DA) \perp (DC)$ et $(AC) \perp (DB)$.

On en déduit que $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{BA}{AD}$, donc $\dfrac{h}{b} = \dfrac{a}{h}$, ou encore $h^2 = ab$.

2)



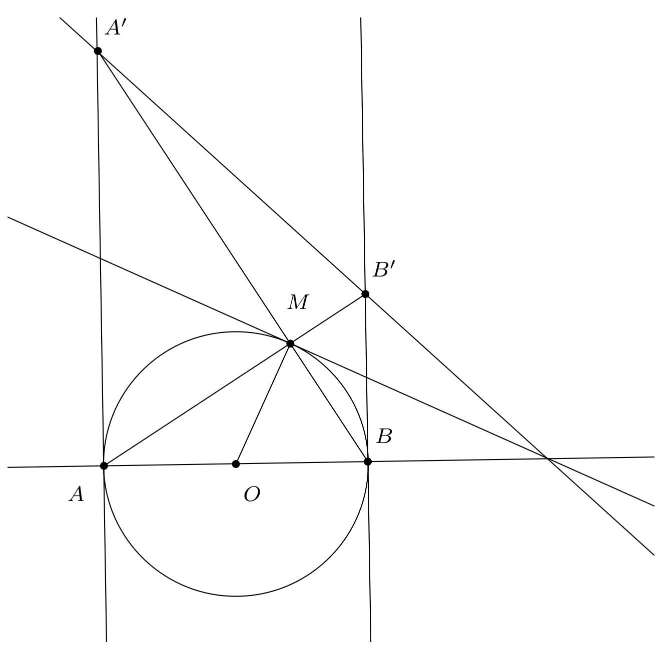
ABM et DMC sont semblables, donc $\dfrac{AM}{AB} = \dfrac{DC}{DM}$, ce qui s'écrit $\dfrac{h}{2a} = \dfrac{b}{h/2}$, ou encore $h^2 = 4ab$.

Exercice 10 On donne un cercle de diamètre $[AB]$. Par les points A et B on mène des tangentes au cercle, puis par un point quelconque M pris sur le cercle, les droites (AM) et (BM) qui rencontrent les tangentes respectivement en B' et A'.

1) Démontrer que $AA' \times BB' = AB^2$.

2) Démontrer que la tangente en M au cercle et la droite $A'B'$ se coupent sur (AB).

Solution de l'exercice 10



1) ABA' et $BB'A$ sont semblables, donc $\dfrac{A'A}{AB} = \dfrac{AB}{BB'}$.

2) Soit X l'intersection de $(A'B')$ et (AB). On a $\frac{XB}{XA} = \frac{BB'}{AA'}$.

Or, $AA'M$ et ABM sont semblables donc $\frac{AA'}{AM} = \frac{AB}{BM}$, et de même $\frac{BB'}{BM} = \frac{BA}{AM}$. Le quotient de ces deux égalités donne $\frac{BB'}{AA'} = \left(\frac{BM}{AM}\right)^2$, donc $\frac{XB}{XA} = \left(\frac{BM}{AM}\right)^2$.

Soit Y l'intersection de la tangente en M avec (AB). Comme YMB et YAM sont semblables, on a $\frac{YM}{MB} = \frac{YA}{AM}$. De même, $\frac{YM}{MA} = \frac{YB}{BM}$. En effectuant le quotient de ces deux égalités, on obtient $\frac{YB}{YA} = \left(\frac{BM}{AM}\right)^2$, donc $\frac{YB}{YA} = \frac{XB}{XA}$. Les points X et Y ont même puissance par rapport au cercle, et sont sur une même demi-droite d'origine le centre du cercle, donc sont égaux.

2 Mercredi après-midi et jeudi : Stratégies de base

1 mercredi après-midi : Roger Mansuy

Principe de récurrence

Résultat général

On cherche à établir une propriété sur les entiers naturels. L'idée générale est celle de la fermeture éclair : on emboîte le bas de la fermeture éclair et si on a fermé l'habit jusqu'à un certain cran, on sait passer au suivant ; ainsi, on ferme entièrement l'habit.

Proposition

Soit P_0, P_1, ... une suite de propriétés vérifiant

— P_0 est vraie

— pour tout entier n, si P_n est vraie, alors P_{n+1} est vraie.

Alors, pour tout entier n, P_n est vraie.

Remarque

Si, au lieu de commencer avec l'hypothèse P_0 vraie, on démarre avec P_1 vraie, alors on obtient que la propriété est vraie pour tous les entiers $n \geq 1$.

On définit quelquefois la récurrence forte comme une variante (en rédaction) de la précédente.

proposition

Soit P_0, P_1, ... une suite de propriétés vérifiant

— P_0 est vraie

— pour tout entier n, si P_k est vraie pour tout $k \leq n$, alors P_{n+1} est vraie.

Alors, pour tout entier n, P_n est vraie.

Exemples classiques

Exercice 1

Une suite arithmétique de raison r est une suite de nombres s_0, s_1, s_2, ... qui vérifie pour tout indice k, $s_{k+1} = s_k + r$. Déterminer une expression de s_n en fonction de s_0, r et n.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

Regardons les premiers termes : s_0, $s_0 + r$, $(s_0 + r) + r = s_0 + 2r$, $(s_0 + 2r) + r = s_0 + 3r$ et ainsi de suite.

Montrons la formule intuitée (à savoir $s_n = s_0 + nr$) par récurrence.

▷ La formule est vérifiée pour $n = 0$.

▷ Soit n un entier tel que $s_n = s_0 + nr$. Alors,

$$s_{n+1} = s_n + r = (s_0 + nr) + r = s_0 + (n+1)r.$$

d'où le résultat par récurrence.

Exercice 2

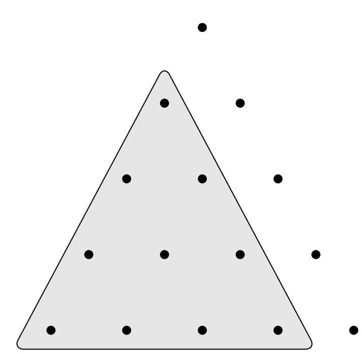
Une suite géométrique de raison $r \neq 0$ est une suite de nombres s_0, s_1, s_2, ... qui vérifie pour tout indice k, $s_{k+1} = s_k \times r$. Déterminer une expression de s_n en fonction de s_0, r et n.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

On procède exactement comme précédemment pour établir $s_n = s_0 r^n$ pour tout entier n.

Exercice 3

La suite des nombres triangulaires est la suite des nombres t_0, t_1, t_2, ... définie par $t_0 = 0$ et pour tout indice k, $t_{k+1} = t_k + k + 1$.



On voit sur le dessin que $t_5 = t_4 + 5 = 10 + 5 = 15$.

Déterminer une expression de t_n en fonction de n.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

On cherche sur des petites valeurs : $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 6$, $t_4 = 10$, $t_5 = 15$. On intuite alors que $t_n = n(n+1)/2$.

▷ La formule est vérifiée pour $n = 0$.

▷ Soit un entier n tel que $t_n = n(n+1)/2$. Alors,

$$t_{n+1} = t_n + n + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

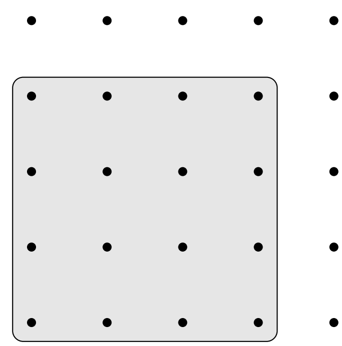
On conclut avec le principe de récurrence.

Remarque
On prête à Gauss enfant la méthode suivante pour calculer t_{100}

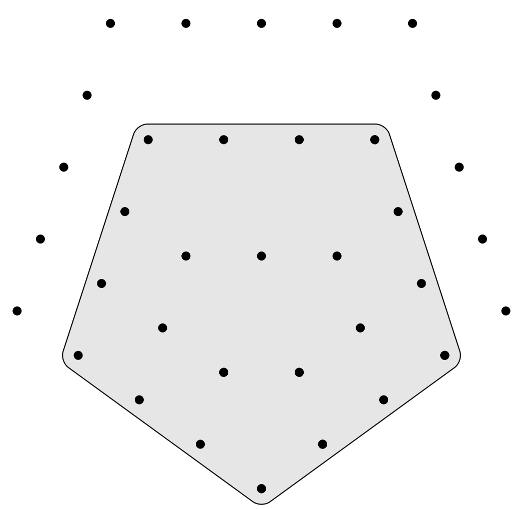
$$\begin{array}{rcccccccccc} t_{100} & = & 1 & + & 2 & + & \ldots & + & 99 & + & 100 \\ t_{100} & = & 100 & + & 99 & + & \ldots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2t_{100} & = & 101 & + & 101 & + & \ldots & + & 101 & + & 101 \end{array}$$

d'où $t_{100} = 100 \times 101/2$. **Remarque**

On peut définir de même les nombres carrés (le n-ième vaut n^2) :



et les nombres pentagonaux (le n-ième vaut $n(3n-1)/2$) :



Exercice 4

La suite de Fibonacci est la suite d'entiers définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et, pour tout indice k, $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$. Montrer que $F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n$ pour tout entier $n \geq 1$.

Solution de l'exercice 4

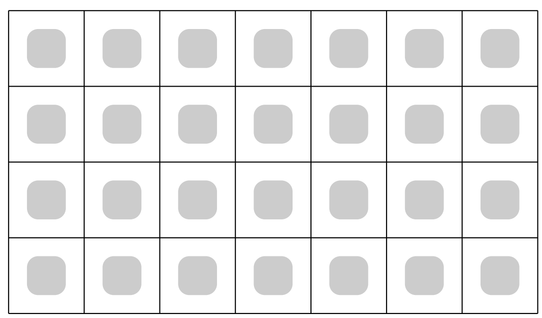
▷ Le résultat est vrai pour $n = 1$ car $F_0F_2 - F_1^2 = 0 \times 1 - 1^2 = -1$.

▷ Soit $n \geq 1$ tel que la propriété soit vraie. Alors

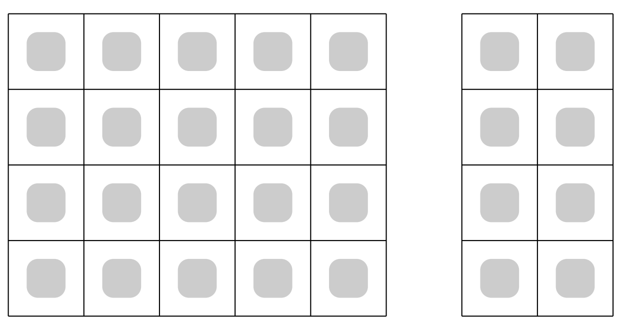
$$\begin{aligned} F_n F_{n+2} - F_{n+1}^2 &= F_n^2 + F_n F_{n+1} - F_{n+1}^2 \\ &= F_{n-1} F_{n+1} + (-1)^{n+1} + F_n F_{n+1} - F_{n+1}^2 \\ &= (-1)^{n+1} + F_{n+1}(F_{n-1} + F_n - F_{n+1}) = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

L'exercice suivant illustre une version un peu plus compliquée de la récurrence (quelquefois appelée induction). **Exercice 5**

On découpe une tablette de chocolat de taille $m \times n$ le long d'une ligne ou d'une colonne. Par exemple, la tablette entière



devient après action sur la cinquième colonne



On recommence à découper un morceau jusqu'à ce que tous les carrés soient séparés. Déterminer le nombre de découpes effectuées.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

Après quelques essais, on intuite que le nombre de découpes pour une tablette de taille $m \times n$ est $mn - 1$.

▷ Le résultat est vrai pour les tablettes de taille 1×1 (pour lesquelles il y a 0 découpe).

▷ Soit m et n deux entiers tels que le résultat est établi pour toute tablette de taille $k \times n$ avec $k < m$ ou de taille $m \times k$ avec $k < n$. Considérons une tablette de taille $m \times n$ et supposons sans perte de généralité que l'on effectue une première découpe selon une colonne : on se trouve donc avec une partie gauche de taille

$k \times n$ et une partie droite de taille $(m-k) \times n$ avec $0 < k < m$. Pour séparer tous les carrés, il faut donc

$$1 + (kn - 1) + ((m - k)n - 1) = mn - 1.$$

Le résultat est donc établi pour toute tablette.

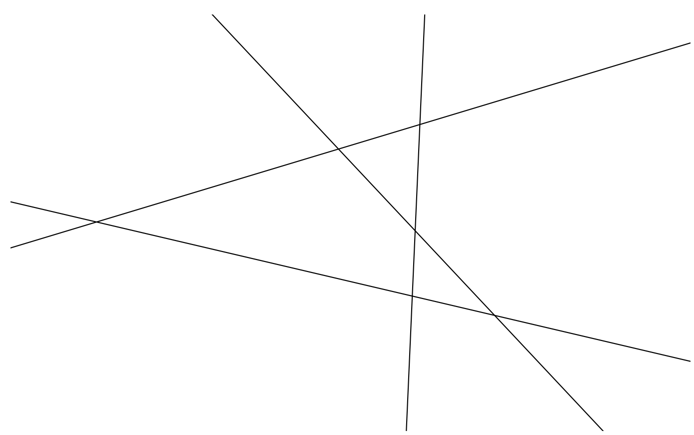
Remarque

On peut obtenir le résultat plus rapidement et sans récurrence en remarquant que chaque découpe augmente d'un le nombre de morceaux : il y a initialement 1 morceau (la tablette entière) et mn morceaux à la fin (les carrés isolés) : il y a donc eu $mn - 1$ découpes.

Quelques applications combinatoires

Exercice 6

Considérons n droites dans le plan. Déterminer le nombre maximal z_n de zones délimitées par ces droites.



Solution de l'exercice 6

On remarque que le nombre z_1 de zones délimitées par une droite est 2.

Par ailleurs, étant donnée une configuration avec n droites, une nouvelle droite coupe au plus une fois chaque autre droite donc coupe au plus $n + 1$ zones déjà existantes d'où $z_{n+1} = z_n + n + 1$. Par récurrence, $z_n = t_n + 1 = 1 + n(n+1)/2$.

Exercice 7

Une suite u_1, u_2, $\ldots$, u_n composée des entiers 1, 2, $\ldots$, n est quasi-croissante si, pour tout indice k, $u_k \leq u_{k+1} + 2$. Par exemple, la suite $1, 6, 4, 2, 5, 3$ est quasi-croissante mais la suite $1, 4, 6, 2, 5, 3$ ne l'est pas. Déterminer le nombre de suites quasi-croissantes de n termes.

Solution de l'exercice 7

On remarque qu'une suite quasi-croissante des $n + 1$ entiers s'obtient à partir d'une suite quasi-croissante des n entiers en ajoutant $n + 1$ soit avant n, soit avant $n + 1$, soit en dernière position (il faut réfléchir un peu pour se convaincre de ce point).

Ainsi, le nombre s_n de suites quasi-croissantes de n entiers vérifie $s_{n+1} = 3 \times s_n$ pour tout $n \geq 2$. Comme $s_2 = 2$, on en déduit par récurrence que $s_n = 2 \times 3^{n-2}$ pour $n \geq 2$ (et $s_1 = 1$).

Coefficients binomiaux

Définition

Définition

Le coefficient binomial $\binom{n}{p}$ est le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Remarque

Si $p > n$, $\binom{n}{p} = 0$ car il n'y a pas de parties à p éléments dans un ensemble à n éléments.

Exercice 8

Calculer $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$ et $\binom{n}{2}$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

Il n'y a qu'une partie à 0 élément (l'ensemble vide) donc $\binom{n}{0} = 1$.

Il y a autant de parties à 1 élément (appelées singletons) que d'éléments donc $\binom{n}{1} = n$.

Pour obtenir une partie à 2 éléments, on commence par choisir un élément a (n possibilités) puis un élément $b \neq a$ ($n-1$ possibilités). Attention toutefois, on a compté deux fois chaque ensemble $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$. Par conséquent, $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Identités classiques

Dans cette partie, on obtient quelques identités classiques sur les coefficients binomiaux en utilisant le principe du « double-comptage » : on considère un ensemble et on va compter de deux façons différentes son nombre d'éléments. Il suffira ensuite d'identifier les deux valeurs obtenues pour avoir (sans autre calcul) une nouvelle identité.

Exercice 9

Pour tous entiers p et n,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

Il suffit de remarquer que choisir p éléments revient à choisir les $n-p$ autres éléments.

Exercice 10 Pascal Pour tous entiers p et n,

$$\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}.$$

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>

Démontrons le résultat en considérant la partition de l'ensemble des $\binom{n+1}{p+1}$ parties de $\{1, \ldots, n+1\}$ de cardinal $p+1$ selon l'appartenance de l'élément $n+1$ à ces parties

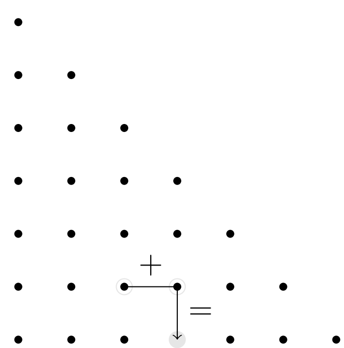
— Il y a $\binom{n}{p}$ parties de cardinal p dans $\{1, \ldots, n\}$ donc autant de parties à $p+1$ éléments dans $\{1, \ldots, n+1\}$ qui contiennent $n+1$.

— Il y a $\binom{n}{p+1}$ parties de cardinal $p+1$ dans $\{1, \ldots, n\}$ donc autant de parties à $p+1$ éléments dans $\{1, \ldots, n+1\}$ qui ne contiennent pas $n+1$.

Remarque

On représente régulièrement les coefficients binomiaux sous la forme d'un tableau à deux entrées : le coefficient $\binom{n}{p}$ se lit à l'intersection de la ligne n et de la colonne p. Les coefficients non nuls forment alors un triangle appelé triangle de Pascal. La formule précédente se visualise bien sur ce triangle comme indiqué ci-dessous.

$$\begin{array}{ccccccc}
\binom{0}{0} & & & & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & & & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & & & & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & & & \\
\binom{4}{0} & \binom{4}{1} & \binom{4}{2} & \binom{4}{3} & \binom{4}{4} & & \\
\binom{5}{0} & \binom{5}{1} & \binom{5}{2} & \binom{5}{3} & \binom{5}{4} & \binom{5}{5} & \\
\binom{6}{0} & \binom{6}{1} & \binom{6}{2} & \binom{6}{3} & \binom{6}{4} & \binom{6}{5} & \binom{6}{6}
\end{array}$$



Voici une petite application **Exercice 11**

Soit p un entier. Montrer que, pour tout entier n, la somme

$$S_n = \binom{p+0}{p} + \binom{p+1}{p} + \ldots + \binom{p+n}{p}$$

est égale à $\binom{p+n+1}{p+1}$.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u>

▷ Le résultat est évident pour $n = 0$ car $\binom{p}{p} = \binom{p+1}{p+1}$.

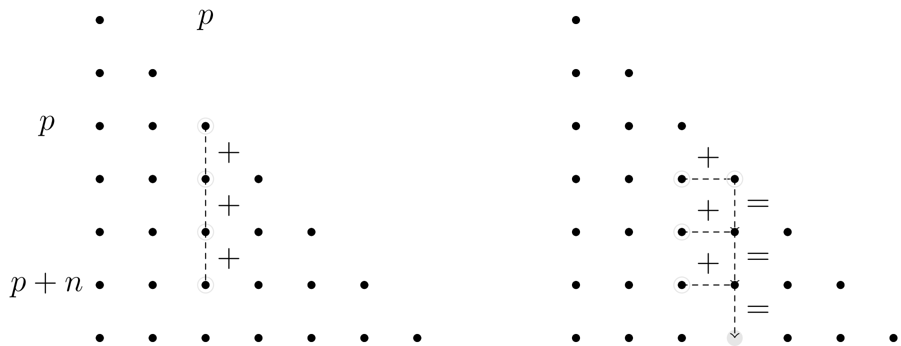
▷ Soit n un entier tel que l'égalité est vérifiée au rang n et montrons-la au rang $n+1$ en utilisant la formule de Pascal ci-dessus.

$$\begin{aligned}
S_{n+1} &= S_n + \binom{p+n+1}{p} \\
&= \binom{p+n+1}{p+1} + \binom{p+n+1}{p} = \binom{p+n+2}{p+1}
\end{aligned}$$

D'où le résultat annoncé par récurrence.

Remarque

On peut aussi tenter de comprendre rapidement cette identité avec le triangle de Pascal comme illustré sur le dessin suivant.



Remarquons par ailleurs que pour $p = 1$, cette identité n'est que la relation

$$1 + 2 + \ldots + (n + 1) = \frac{(n + 2)(n + 1)}{2}.$$

Exercice 12

Pour tous entiers n et p,

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

Solution de l'exercice 12

On va compter l'ensemble des parties à p éléments parmi lesquelles on a singularisé un élément.

▷ Dans la première méthode, on commence par choisir la partie ($\binom{n}{p}$ choix) et, une fois la partie choisie, on singularise l'un des éléments (p choix).

▷ Dans la seconde méthode, on commence par choisir l'élément (n choix) puis on complète avec $p - 1$ éléments parmi les $n - 1$ autres.

En identifiant le résultat des deux calculs, on obtient l'identité demandée.

Remarque

En raison de la démonstration, certaines personnes mémorisent ce résultat sous le nom « propriété des comités et des présidents ».

Exercice 13

Pour tous entiers n, p et k,

$$\binom{p}{k}\binom{n}{p} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}.$$

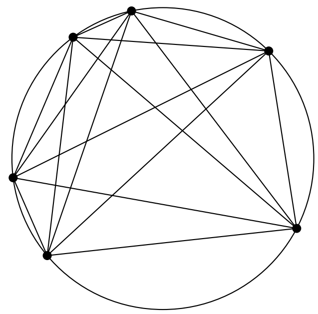
Solution de l'exercice 13

On procède de même en choisissant une partie à p éléments à l'intérieur de laquelle on a singularisé une partie à k éléments.

Quelques applications

Exercice 14

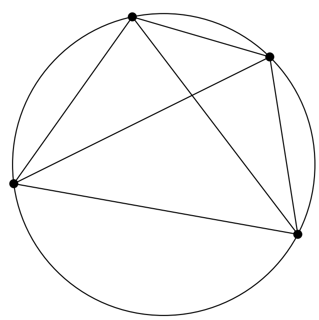
On dispose n points sur un cercle et on trace tous les segments reliant deux de ces points. On suppose qu'un point à l'intérieur du disque n'appartient jamais à trois segments.



Déterminer le nombre de points d'intersection des segments (à l'intérieur du disque).

Solution de l'exercice 14

Deux segments sont séquents si, et seulement si, ils correspondent aux diagonales d'un quadrilatère.



Il y a donc autant d'intersections que de quadrilatères, c'est-à-dire autant que de choix de parties de 4 parmi les n : $\binom{n}{4}$.

Avant d'attaquer un exercice plus difficile sur les chemins de Dyck, regardons celui-ci. **Exercice 15**

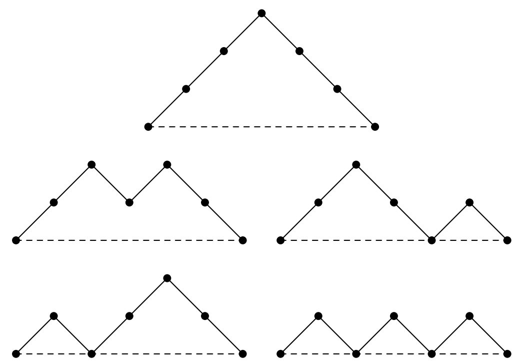
Compter les chemins formés de n montées et n descentes de même amplitude.

Solution de l'exercice 15

Il suffit de choisir les n emplacements des montées parmi les $2n$ mouvements. Il y en a donc $\binom{2n}{n}$.

Exercice 16

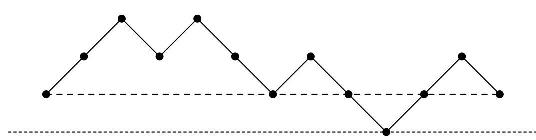
Un chemin de Dyck de longueur $2n$ est un chemin de n montées et n descentes (de même amplitude) ne passant jamais sous l'altitude du point de départ. Voici la liste des chemins de Dyck de longueur 6 :



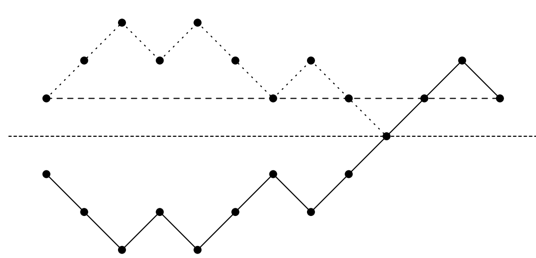
Montrer qu'il y a $\binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1}$ chemins de Dyck de longueur $2n$.

Solution de l'exercice 16

Considérons un chemin $(M_k)_{0 \leq k \leq 2n}$ à n montées et n descentes qui n'est pas un chemin de Dyck. Soit k le plus petit entier tel que l'ordonnée de M_k est -1 et posons, pour tout $j \leq k$, M'_j le symétrique de M_j par rapport à la droite d'équation $x = -1$.
Par exemple, le chemin



devient



Il y a $\binom{2n}{n-1}$ chemins de longueur $2n$ avec n montées qui ne sont pas de Dyck. On conclut en remarquant qu'il y a $\binom{2n}{n}$ chemins de longueur $2n$ avec n montées.

2 jeudi matin : Thomas Budzinski

Ce cours reprend d'autres cours publiés précédemment. Il n'a pas fait l'objet d'une nouvelle rédaction spécialement pour le présent polycopié. Une base de données d'exercices olympiques est en cours de réalisation.

3 jeudi après-midi : Martin Andler

Invariants

Un **invariant** est une quantité qui **ne change pas** lorsque l'objet mathématique que l'on considère subit une **transformation**. Cet invariant peut être
— un nombre
— une "parité" (le fait d'être pair ou impair)
— le fait d'être divisible par 3, ou d'avoir pour reste $1, 2$ dans la division par 3
— le fait d'être, ou non, divisible par 9
— ...

Il y a de nombreuses situations pour lesquelles la recherche d'un invariant peut nous donner des informations intéressantes. Comme on va le voir, la méthode nous donne le plus souvent des informations négatives.

Mais on peut généraliser la méthode en associant aux objets considérés une quantité qui varie quand l'objet est transformé, mais varie suffisamment simplement pour que l'on comprenne ce qui se passe.

Exercice 1 En 2015, Paul a 11 ans et sa sœur Anne en a 14. Quel âge aura Anne quand Paul aura 38 ans ?

Exercice 2 Montrer qu'aux échecs, un fou qui est initialement sur une case blanche sera toujours sur un case blanche.

Exercice 3 Sur un échiquier, un cavalier est placé sur la case en bas à gauche. Peut-il atteindre la case en haut à droite en passant une fois et une seule sur chaque case ?

Exercice 4 On considère un échiquier, dont on découpe la case en haut à gauche et la case en bas à droite. Peut-on paver les 62 cases restantes avec des dominos ?

Exercice 5 La population de la Terre au moment où je tape cet exercice est de 7375466877 habitants. Montrer que le nombre d'habitants qui ont serré un nombre impair de mains est pair.

Exercice 6 On considère des "mots " écrits avec les lettres x, y, z et t. On s'autorise les trois transformations suivantes : $xy \mapsto yyx$, $xt \mapsto ttx$ et $yt \mapsto ty$. Les mots suivants sont-ils équivalents ?

(i) $xxyy$ et $xyyyyx$,

(ii) $xytx$ et $txyt$,

(iii) xy et xt.

Exercice 7 Est-ce que la multiplication

$$79133 \times 111107 = 8792240231$$

est exacte ? (Sans calculatrice)

Exercice 8 On écrit au tableau les nombres entiers de 1 à 2014. Ensuite, on choisit deux de ces nombres a, b au hasard, on les efface et on écrit à la place $|a - b|$. Puis on recommence suffisamment de fois pour obtenir un seul nombre au tableau. Montrer que celui-ci est impair.

Solutions

Solution de l'exercice 1 L'invariant est la différence des âges !

Solution de l'exercice 2 Ceci est évident si on est devant un échiquier, mais on a besoin de donner un cadre mathématique qui se prête à la formalisation. On numérote les cases selon un repère orhonormé dont l'origine est en bas et à gauche. Les cases sont donc numérotées (i,j) avec $i,j \in \{0,\ldots,8\}$. Par exemple les pions sont au départ sur les cases $(i,2)$ et $(i,7)$. Si l'échiquier est disposé normalement, les cases noires sont les cases $(1,1),(3,1),(5,1),(7,1),(2,2),(4,2)\ldots(8,2)$, $\ldots(2,8),(4,8),\ldots(8,8)$.

On voit que les cases noires sont les cases (i,j) telles que $i+j$ est un nombre pair, les cases blanches étant celles pour lesquelles $i+j$ est impair.

Cela étant dit, quels ont les mouvement autorisés pour un fou, qui se déplace en diagonale ? Ce sont les mouvements $(i,j) \to (i+k,j+k)$, $(i,j) \to (i-k,j-k)$, $(i,j) \to (i+k,j-k)$, $(i,j) \to (i-k,j+k)$, pour $k = 1,2,\ldots 7$ (avec la condition qu'on reste dans l'échiquier !).

Le calcul montre que si le point de départ vérifie $i+j$ impair, dans les quatre cas, le point d'arrivée vérifie la même condition.

Commentaires. 1. Il est souvent nécessaire de traduire une situation en des termes que l'on peut traiter mathématiquement.

2. La parité (le fait d'être pair ou impair) est un exemple de quantité dont il est intéressant d'étudier l'invariance.

Solution de l'exercice 3 Supposons que ce soit possible. Alors le cavalier atteindra la case en haut et à droite en 63 mouvements. Mais le mouvement d'un cavalier est (avec les notations de l'exercice précédent) : $(i,j) \to (i+1,j+2),(i,j) \to (i+2,j+1),(i,j) \to (i+1,j-2)\ldots$. On voit que le mouvement change la parité de $i+j$. En 63 mouvement, on a changé la parité 63 fois, donc on doit changer de couleur. Comme les cases en bas à gauche et en haut à droite sont de même couleur, c'est impossible.

Solution de l'exercice 4 Chaque domino couvre une case blanche et une case noire, donc quelle que soit la manière de disposer les dominos, on couvrira autant de cases blanches que de cases noires. Or si l'on découpe les deux cases en haut à gauche et en bas à droite de l'échiquier, il s'agit de deux cases de même couleur, toutes deux noires ou toutes deux blanches. Il restera donc soit 30 cases noires et 32 cases blanches soit 32 noires et 30 blanches. Si l'on parvenait à placer 30 dominos, on aurait couvert 30 cases blanches et 30 cases noires ; les deux cases non couvertes seraient obligatoirement de même couleur, et on ne pourrait donc pas les couvrir par un domino de plus : il n'est donc pas possible de paver tout l'échiquier ainsi.

Commentaire. L'intérêt de cette solution est qu'on n'a pas besoin d'entrer dans les détails. On note que l'utlisation d'invariants aboutit souvent à une réponse négative.

Solution de l'exercice 5 Le nombre total de mains serrées est pair. Soit P l'ensemble des personnes ayant serré la main d'un nombre pair de personnes, et p le nombre d'éléments de P, et I l'ensemble des personnes ayant serré la main d'un nombre impair de personnes, et i le nombre d'éléments de I. Le nombre de mains serrées est par les personnes de P est pair, le nombre de mains serrées par les personnes de I est impair si i est impair, pair si i est pair. Donc i doit être pair.

Solution de l'exercice 6

(i) Les deux mots sont équivalents : $xxyy \mapsto xyyxy \mapsto xyyyyx$.

(ii) Les deux mots ne sont pas équivalents : en effet, le nombre de x est un invariant.

(iii) Les deux mots ne sont pas équivalents : la présence de y (ou celle de t) est un invariant.

Solution de l'exercice 7 La réponse est NON. Nous utilisons deux résultats :

Soit n un nombre entier. Le reste de la division de n par 9 est égal au reste de la division par 9 de la somme des chiffres de n.

Soit a, b des nombres entiers. Le reste de la division de $a \times b$ par 9 est égal au reste de la division par 9 du produit des restes des divisions de a et b par 9.

Solution de l'exercice 8 Lorsqu'on remplace a, b par $|a - b|$, la somme S de tous les nombres écrits au tableau est diminuée de $2\min(a, b)$. Donc la parité de la somme ne change pas. Le dernier nombre écrit au tableau doit donc être de la même parité que la somme S_0 du début. Or cette somme initiale est

$$S_0 = 1 + 2 + \dots 2n = \frac{2n(2n+1)}{2} = n(2n+1)$$

avec $n = 1007$, donc S_0 est impaire.

V. Avancés

1 Mardi et mercredi matin : Géométrie

1 mardi matin : François Lo Jacomo

Quelques connaissances sont requises pour résoudre les six exercices que je propose pour ce cours.

Tout d'abord, pour les exercices 2, 3, 5, le fait que $\widehat{ABC}$ est un angle droit si et seulement si B appartient au demi-cercle de diamètre $[BC]$. Très souvent, lorsqu'on a un angle droit sur la figure, il faut faire intervenir le cercle de diamètre l'hypoténuse du triangle rectangle.

Ensuite, la loi des sinus, dont on a besoin dans les exercices 2 et 6. Si R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC, $BC = 2R \times \sin \widehat{A}$, ce qui entraine : $\frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{CA}{\sin \widehat{B}} = \frac{AB}{\sin \widehat{C}} = 2R$. En effet, construisons, dans le cercle circonscrit à ABC, D diamétralement opposé à C. $\sin \widehat{D} = \sin \widehat{A}$, puisque ce sont deux angles inscrits interceptant le même arc, et dans le triangle rectangle DBC, il est clair que $BC = DC \times \sin \widehat{D}$. On peut également voir que si A' est le milieu de $[BC]$, et O le centre du cercle circonscrit, $\frac{1}{2}BC = A'C = OC \sin \widehat{A'OC} = R \sin \widehat{A}$ car $\widehat{A'OC}$ est la moitié de l'angle au centre $\widehat{BOC}$.

Une notion peut-être plus nouvelle : celle d'angle de droites. Nous l'utiliserons pour presque tous les exercices, sauf peut-être le 2. Dans le théorème de l'angle inscrit, pour quatre points cocycliques A, B, C, D, les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ sont égaux si C et D sont du même côté de la droite (AB), supplémentaires s'ils sont de part et d'autre de (AB). Nous pouvons donc avoir plusieurs cas de figure à envisager, et il arrive qu'on ne sache pas si les points sont du même côté de la droite ou de part et d'autre.

Pour ne pas être ainsi dépendants de la figure, on définit les angles de droites : (CA, CB) comme étant l'angle dont il faut faire tourner la droite (CA) pour la faire coïncider avec (CB). En effet, on remarque que quelle que soit la position de C et D par rapport à (AB), A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si les angles (CA, CB) et (DA, DB) sont égaux.

— Les angles de droites sont définis modulo π ou 180^o (si l'on fait tourner une droite d'un demi tour, elle reprend sa direction initiale), et ils sont orientés : un angle de -60^o, ce n'est pas la même chose qu'un angle de 60^o, en revanche, c'est la même chose qu'un angle de 120^o.

— Et surtout, ils vérifient la relation de Chasles : si j'ai trois droites d_1, d_2, d_3, $(d_1, d_2) + (d_2, d_3) = (d_1, d_3)$. Si l'on compose la rotation qui amène d_1 en d_2 et celle qui amène d_2 en d_3, on obtient la rotation qui amène d_1 en d_3, dont l'angle est la somme des angles des deux précédentes.

— Il s'agit d'angles de droites, mais la même droite peut être désignée par différents couples de points. Notamment (AB, CD), c'est la même chose que (BA, CD) car (AB) et (BA) représentent la même droite. Et si un point C appartient à (AB), cette même droite peut encore être notée (AC) par exemple.

— La tangente à un cercle en un point A est la droite qui coupe le cercle en deux points confondus, A et A. On peut donc la noter (AA). Avec cette notation, on retrouve le cas particulier de la tangente dans le théorème de l'angle inscrit, à savoir que si l'on considère trois points A, B et C sur un cercle et la tangente (AA) à ce cercle au point A, $(AA, AB) = (CA, CB)$.

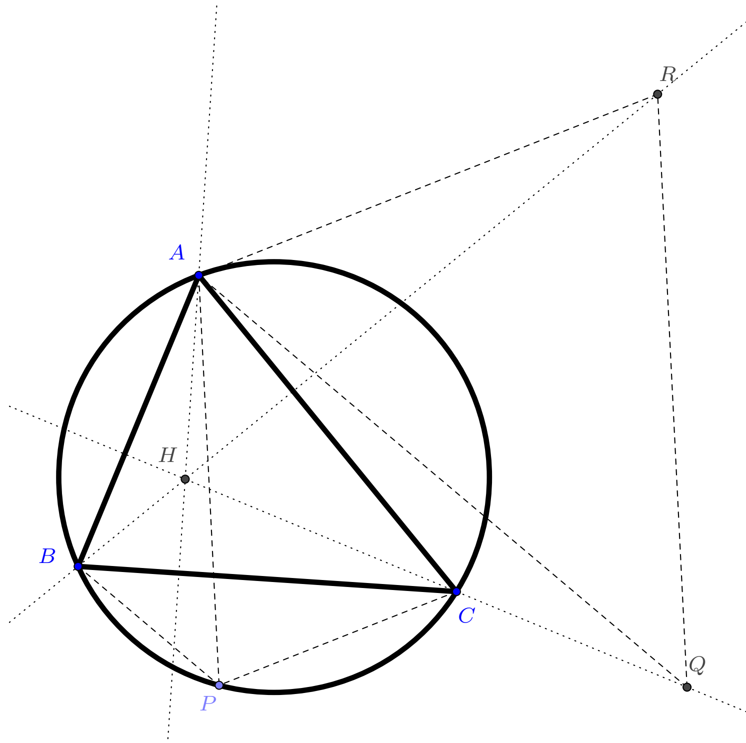
— Signalons enfin que dans un triangle ABC isocèle, $AB = AC$, on a les égalités d'angles de droites : $(AB, BC) = (BC, CA)$ sans qu'il soit nécessaire de regarder la figure. Et la somme des trois angles de droites d'un triangle est nulle.

Enfin, je comptais parler de la puissance d'un point par rapport à un cercle, dont on a besoin pour les exercices 5 et 6, mais nous n'avons pas eu le temps d'aborder ces exercices.

Exercice 1

Soit ABC un triangle d'orthocentre H, et soit P un point du cercle circonscrit. La parallèle à (BP) passant par A coupe (CH) en Q et la parallèle à (CP) passant par A coupe (BH) en R. Montrer que (QR) est parallèle à (AP).

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>



L'idée de la solution est d'étudier les angles du triangle AQR : $(AQ, AR) = (PB, PC) = (AB, AC)$. Pour avoir (QR) parallèle à (AP), il faut et il suffit que $(QA, QR) = (PB, PA) = (CB, CA)$, donc que AQR ait les mêmes angles que ACB. On le prouve en montrant que les quatre points A, H, Q, R sont cocycliques. Cette cocyclicité provient du fait que $(RA, RH) + 90^o = (RA, RH) + (RH, AC) = (RA, AC) = (CP, CA) = (BP, BA) = (BP, QH) + (QH, BA) = (BP, QH) + 90^o = (QA, QH) + 90^o$. Donc $(RA, RH) = (QA, QH)$, les quatre points sont bien cocycliques, on en déduit que $(QA, QR) = (HA, HR) = 90^o + (HA, HR) + 90^o = (CB, HA) + (HA, HR) + (HA, CA) = (CB, CA)$, ce qui achève la démonstration.

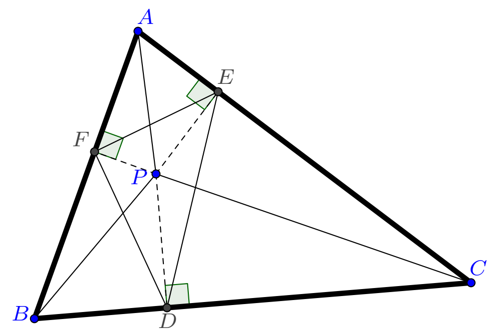
Exercice 2

Soit ABC un triangle et P un point intérieur au triangle. On appelle D, E, F les projections orthogonales de P sur BC, CA, AB respectivement. Montrer que :

$$\frac{EF \times PD}{AP} + \frac{FD \times PE}{BP} + \frac{DE \times PF}{CP}$$

est indépendant de la position de P.

Solution de l'exercice 2

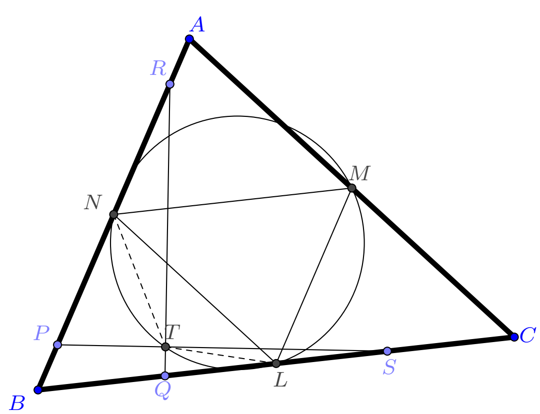


Les angles droits, $\widehat{AFP}$ et $\widehat{AEP}$ par exemple, nous informent que les points E et F appartiennent au cercle de diamètre $[AP]$. Si l'on appelle R_A le rayon de ce cercle, la loi des sinus appliquée au triangle AEF donne : $EF = 2R_A \sin \widehat{A}$. Or $[AP]$ étant un diamètre de ce cercle, $AP = 2R_A$. D'où $\frac{EF}{AP} = \sin \widehat{A}$, et de même $\frac{FD}{BP} = \sin \widehat{B}$ et $\frac{DE}{CP} = \sin \widehat{C}$. Il reste à prouver que : $PD \times \sin \widehat{A} + PE \times \sin \widehat{B} + PF \times \sin \widehat{C}$ est indépendant de P. Or si l'on appelle R le rayon du cercle circonscrit à ABC, la loi des sinus nous donne une fois de plus : $BC = 2R \times sin\widehat{A}$, soit $PD \times \sin \widehat{A} = \frac{PD \times BC}{2R} = \frac{aire(PBC)}{R}$. Il reste à prouver que : $\frac{aire(PBC)}{R} + \frac{aire(PCA)}{R} + \frac{aire(PAB)}{R}$ est indépendant de P : c'est facile, car $aire(PBC) + aire(PCA) + aire(PAB) = aire(ABC)$.

Exercice 3

Soit ABC un triangle, L, M, N les milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. Soit P un point de $[AB]$ et R le symétrique de P par rapport à N. Soit Q un point de $[BC]$ et S le symétrique de Q par rapport à L. Montrer que si les droites (PS) et (QR) sont perpendiculaires, leur intersection T appartient au cercle circonscrit à LMN.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>



Là encore, l'angle droit joue un rôle primordial. L'hypothèse que (PT) et (RT) sont perpendiculaires entraîne que T appartient au cercle de diamètre $[PR]$. Or ce cercle a pour centre le milieu de $[PR]$, soit N par hypothèse. Donc le triangle NRT est isocèle. Il en résulte l'égalité d'angles : $(NR, TR) = (TR, TN)$. Pour la même raison, le triangle LTS est isocèle, donc $(TL, TS) = (TS, SL)$. Dès lors, $(TL, TN) = (TL, TS) + (TS, TR) + (TR, TN) = (TS, SL) + 90^o + (NR, TR)$. Or par hypothèse, $(TR, TS) = 90^o$. Attention que l'angle intervenant dans la première relation est (TS, TR), et celui de la seconde relation est (TR, TS) : c'est seulement car ils sont droits qu'ils sont égaux. En définitive, $(TL, TN) = (NR, TR) + (TR, TS) + (TS, SL) = (NR, SL) = (BA, BC) = (ML, MN)$ car MNL étant le triangle des milieux de ABC, (MN) est parallèle à (BC) et (ML) est parallèle à (BA). L'égalité d'angles de droites : $(TL, TN) = (ML, MN)$ suffit à prouver que M, N, L, T sont cocycliques. On remarquera que cette démonstration avec des angles de droite évite d'avoir à se demander si M et T sont de part et d'autre de (NL) ou du même côté de (NL), ce qui, a priori, peut dépendre de la position de P et Q.

J'avais prévu trois autres exercices, que nous n'avons pas eu le temps de faire en cours, et je n'ai pas non plus trouvé le temps de rédiger les solutions dans le présent polycopié.

Exercice 4

Soit ABC un triangle acutangle. Le cercle passant par A et tangent en B à (BC) recoupe en U le cercle passant par A et tangent en C à (BC). Dans le cas où le cercle passant par U et tangent en B à (AB) et le cercle passant par U et tangent en C à (AC) sont tangents en U, calculer l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un parallélogramme non rectangle, et H l'orthocentre de ABC. La parallèle à (AB) passant par H coupe (BC) en P et (AD) en Q. La parallèle à (BC) passant par H coupe (AB) en R et (CD) en S. Montrer que P, Q, R, S sont cocycliques.

Exercice 6

Soit $ABCD$ un quadrilatère dont les diagonales (AC) et (BD) se coupent en R, et les côtés (AB) et (CD) se coupent en Q. Montrer que si le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible, alors :

$$\frac{AR \times AC}{AQ} = \frac{BR \times BD}{BQ}$$

La réciproque est-elle vraie ?

2 mardi après-midi : Vincent Jugé

Ce cours a initialement été proposé, sous une forme très légèrement différente, par Pierre Bertin, lors d'un précédent stage. Il est disponible, avec les solutions aux exercices ci-dessus, aux pages 100 à 112 du polycopié du stage de Montpellier d'août 2013.

Dans tous les exercices, ABC est un triangle, $BC = a$, $AC = b$ et $AB = c$. On notera $[ABC]$ l'aire du triangle ABC.

Exercice 1 Soit α, β et γ des nombres réels tels que $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$. Montrer qu'il existe un unique point G tel que

$$\alpha\overrightarrow{GA} + \beta\overrightarrow{GB} + \gamma\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

On notera $\langle \alpha, \beta, \gamma \rangle$, ou encore $\frac{\alpha A+\beta B+\gamma C}{\alpha+\beta+\gamma}$ ce point G. On dira que (α, β, γ) sont les coordonnées barycentriques de G.

Supposons désormais que le triangle ABC n'est pas plat.

Exercice 2 Soit α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2 et γ_2 des nombres réels tels que $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 \neq 0$ et $\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 \neq 0$. Montrer que $\langle \alpha_1, \beta_1, \gamma_1 \rangle = \langle \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \rangle$ si et seulement si les triplets $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sont multiples l'un de l'autre.

Exercice 3 Soit D une droite. Montrer qu'il existe des réels a, b et c non tous nuls tels que D est l'ensemble des points $\langle u, v, w \rangle$ tels que $au + bv + cw = 0$.

De même, si l'on note $\Delta_{a,b,c}$ la droite D, on peut montrer que $\Delta_{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1} = \Delta_{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2}$ si et seulement si les triplets $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ sont multiples l'un de l'autre.

Exercice 4 (Theorème de Céva)
Soit P un point de (BC), Q un point de (AC) et C un point de (AB). Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes si et seulement si, en longueurs algébriques,

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1.$$

Exercice 5 Montrer que les médianes de ABC sont concourantes et exprimer les coordonnées barycentriques du centre de gravité G. Faire de même pour les bissectrices et le centre du cercle inscrit I, puis pour les hauteurs et l'orthocentre H.

Exercice 6 (Point de Gergonne)
Soient P, Q, R les points de contact du cercle inscrit avec les côtés respectifs (BC), (AC) et (AB). Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes, puis trouver les coordonnées barycentriques de leur point d'intersection.

Soit P' le point de contact du cercle exinscrit en A avec (BC), Q' le point de contact du cercle exinscrit en B avec (AC) et R' le point de contact du cercle exinscrit en C avec (AB). Montrer que (AP'), (BQ') et (CR') sont concourantes, puis trouver les coordonnées barycentriques de leur point d'intersection.

Exercice 7 Calculer, en coordonnées barycentriques, l'équation du cercle circonscrit à ABC.

Exercice 8 (Theorème de Céva trigonométrique)
Soit P un point de (BC), Q un point de (AC) et C un point de (AB). Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes si et seulement si, en angles algébriques,

$$\frac{\sin(\widehat{BAP})}{\sin(\widehat{PAC})} \cdot \frac{\sin(\widehat{CBQ})}{\sin(\widehat{QBA})} \cdot \frac{\sin(\widehat{ACR})}{\sin(\widehat{RCB})} = 1.$$

Exercice 9 Soit P un point à l'intérieur du triangle ABC. Montrer que P a pour coordonnées barycentriques $([BPC],[PCA],[PAB])$.

Exercice 10 (Théorème de Ménélaüs)
Soit P un point de (BC), Q un point de (AC) et C un point de (AB). Montrer que les points P, Q et R sont alignés si et seulement si, en longueurs algébriques,

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$$

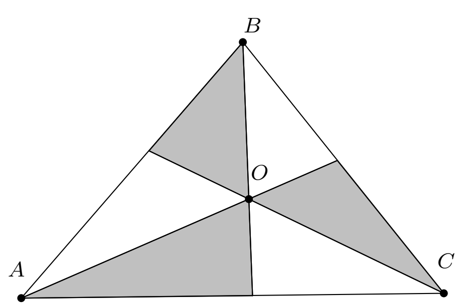
Exercice 11 Soit d une droite passant par A. La conjuguée isogonale de d est la symétrique de d par rapport à la bissectrice de $\widehat{A}$. Montrer que trois droites passant par A, B et C respectivement sont concourantes si et seulement si leurs conjuguées isogonales respectives par rapport à A, B et C sont concourantes. Si le point d'intersection des isogonales a pour coordonnées barycentriques (α, β, γ), quelles sont les coordonnées barycentriques du point d'intersection des trois droites initiales ?

Exercice 12 Soit $ABCDEF$ un hexagone régulier, M un point de la diagonale AC et N un point de CE tels que

$$\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = r.$$

Que dire de r si B, M et N sont alignés ?

Exercice 13 Soit O un point à l'intérieur de ABC. On trace les droites (AO), (BO) et (CO), qui coupent le triangle en 6 parties :



Montrer que l'aire noire est égale à l'aire blanche si et seulement si O est sur une médiane.

Exercice 14 Soit P, Q et R les pieds des bissectrices et ABC. Montrer que, si B, P, Q et R sont cocycliques, alors

$$\frac{b}{a+c} = \frac{a}{b+c} + \frac{c}{a+b}.$$

3 mercredi matin : Guillaume Conchon-Kerjan

Cours

Le cours est extrait du polycopié sur les transformations de Thomas Budzinski, trouvable à l'adresse : http ://www.animath.fr/IMG/pdf/transfos.pdf

Exercices

Nous avons traité les exercices $1, 3$, et 4. Les exercices 1 à 5 et $9, 10$ portent sur les homothéties : les exercices 4 et 5 peuvent se retrouver dans pas mal de problèmes et sont donc assez utiles. Les exercices $6, 7, 8$ portent sur les rotations, que nous n'avons pas eu le temps de voir. Le 11 est difficile.

Exercice 1 Soit ABC un triangle. Construire un carré ayant un sommet sur $[AB]$, un sur $[AC]$ et deux sur $[BC]$.

Exercice 2 Droite et cercle d'Euler
ABC un triangle, O centre du cercle circonscrit, G centre de gravité, H orthocentre. A', B', C' milieux de $[BC], [AC], [AB]$. J, K, L pieds des hauteurs issues de A, B, C. Montrer que :
1) O, G, H sont alignés.
2)A', B', C', J, K, L sont cocycliques.

Exercice 3 $ABCD$ trapèze, $(AB)//(CD)$. M est le milieu de $[AB]$ et P un point de (BC). X est l'intersection de (PD) et (AB), Q celle de (PM) et (AC) et Y celle de (DQ) et (AB). Montrer que M est le milieu de $[XY]$.

Exercice 4 Γ et Γ' deux cercles tangents, Γ' étant à l'intérieur de Γ. Soit T le point de tangence, et B un autre point de Γ'. La tangente à Γ' en B recoupe Γ en M et N. Montrer que $\widehat{BTM} = \widehat{BTN}$.

Exercice 5 Γ cercle inscrit de ABC, Γ_A cercle exinscrit en A. (BC) est tangente à Γ en J et à Γ_A en K. Si L est diamétralement opposé à J, montrer que A, L, K sont alignés.

Exercice 6 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On construit P, Q, R, S tels que ABP et CDR soient équilatéraux tournés vers l'intérieur du quadrilatère, et BCQ et DAS équilatéraux vers l'extérieur. Montrer que $PQRS$ est un parallélogramme.

Exercice 7 Point de Fermat
Soit ABC un triangle aux angles inférieurs à 120^o. Montrer qu'il existe un unique point P à l'intérieur de ABC tel que $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 120^o$. Montrer de plus que pour tout point T à l'intérieur de ABC, $AT + BT + CT \geq AP + BP + CP$.

Exercice 8 Théorème de Napoléon
Soit ABC un triangle, D, E, F tels que ABD, BCE et CAF soient équilatéraux extérieurs à ABC. Soient A', B', C' les centres de ces trois triangles, montrer que $A'B'C'$ est équilatéral.

Exercice 9 ABC est un triangle, D le point de contact du cercle inscrit avec $[BC]$, J le centre du cercle exinscrit de A, E le pied de la hauteur issue de A, K le projeté orthogonal de I (centre du cercle inscrit) sur (AE). Montrer que (DK) et (EJ) sont parallèles.

Exercice 10 Soit Γ un cercle, Γ_A et Γ_B deux cercles tangents intérieurement à Γ en A et B (quelconques). Montrer que les tangentes à Γ_A passant par B et celles à γ_B passant par A forment un quadrilatère circonscriptible.

Exercice 11 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, P un point de $[AB]$. On appelle $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ les cercles inscrits à PCD, PAB et PBC. I est le centre de γ. On suppose que γ_1 et γ_2 sont tangents à γ en K et L. On appelle E l'intersection de (AC) et (BD) et F celle de (AK) et (BL). Montrer que E, I et F sont alignés.

2 Mercredi après-midi et jeudi : Combinatoire

1 mercredi après-midi : Jean-Louis Tu

Rappels : 1) On a $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$, $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$, et plus généralement $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$.

2) Pour résoudre une équation du second degré de la forme $ax^2 + bx + c = 0$, on forme le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Si $\Delta > 0$, les solutions sont $x = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $\Delta = 0$, l'unique solution est $x = -\dfrac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution.

Exercice 1 Factoriser : $A = 1 + a + b + ab, \quad B = ab^2 + bc^2 + ca^2 - a^2b - b^2c - c^2a$, $C = x^4 + 1$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> $A = (1+a)(1+b)$.

$B = (a-b)(b-c)(c-a)$.

$C = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$.

Expliquons comment obtenir la seconde factorisation :

$B = (ab^2 - a^2b) + (bc^2 - c^2a) + (ca^2 - cb^2) = ab(b-a) + c^2(b-a) + c(a^2-b^2) = (ab+c^2)(b-a) + c(a-b)(a+b) = (ab+c^2)(b-a) - c(a+b)(b-a) = (ab+c^2-c(a+b))(b-a) = (ab+c^2-ca-cb)(b-a) = (b-a)(b(a-c)+c(c-a)) = (b-a)(a-c)(b-c)$.

Expliquons comment obtenir la troisième factorisation :

$C = (x^2+1)^2 - 2x^2 = (x^2+1)^2 - (x\sqrt{2})^2 = (x^2 - x\sqrt{2} + 1)(x^2 + x\sqrt{2} + 1)$.

Exercice 2 Déterminer les couples d'entiers a et b tels que

a) $a^2 - b^2 = 1$

b) $a^3 - b^3 = 17$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> a) Supposons par exemple a, b positifs. On a alors $a > b$. Comme $1 = (a-b)(a+b)$, on a $a - b = a + b = 1$ donc $a = 1$ et $b = 0$.

Comme (a, b) est solution si et seulement si $(|a|, |b|)$ est solution, on a $a = \pm 1$ et $b = 0$.

b) On a $(a - b)(a^2 + ab + b^2) = 17$. Comme 17 est premier, on a $a = b \pm 1$ ou $a = b \pm 17$.

De plus, $a^2 + ab + b^2 = (a + b/2)^2 + 3b^2/4 \geqslant 0$, donc $a - b > 0$.

Si $a = b+1$ alors $17 = (b+1)^2 + (b+1)b + b^2 = 3(b^2 + b) + 1$, donc $3b(b+1) = 16$. Ceci est impossible car 3 ne divise pas 16.

Supposons $a - b = 17$. Alors $a^2 + ab + b^2 = 1$. On a alors $3b^2/4 \leqslant 1$, donc $|b| \leqslant 1$ et de même $|a| \leqslant 1$. Ceci contredit $a - b = 17$.

Conclusion : il n'y a pas de solution.

Exercice 3 $642726721371^4 + 4 \times 8473867822^4$ est-il un nombre premier ?

Solution de l'exercice 3 Ce nombre est de la forme $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2) = ((a + b)^2 + b^2)((a - b)^2 + b^2)$, donc est le produit de deux entiers strictement plus grands que 1 donc n'est pas premier.

Exercice 4 Résoudre l'équation $x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1 = 0$.

Solution de l'exercice 4 Posons $y = x + 1/x$. On a $0 = \dfrac{x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 3x + 1}{x^2} = (x^2 + \frac{1}{x^2}) - 3(x + \frac{1}{x}) + 4 = (y^2 - 2) - 3y + 4 = y^2 - 3y + 2$.

Les racines du polynôme $y^2 - 3y + 2$ sont 1 et 2, donc $y^2 - 3y + 2 = (y - 1)(y - 2)$. Par conséquent, l'équation équivaut à $y = 1$ ou $y = 2$.

Si $y = 2$ alors $x + 1/x = 2$, donc $x^2 + 1 = 2x$, ce qui s'écrit encore $(x - 1)^2 = 0$. Ceci équivaut à $x = 1$.

Si $y = 1$ alors $x + 1/x = 1$, donc $x^2 - x + 1 = 0$. Or, $x^2 - x + 1 = (x - 1/2)^2 + 3/4 > 0$, donc l'équation n'a pas de solution.

Conclusion : l'unique solution est $x = 1$.

Exercice 5 Soient a et b tels que $a + b = 13$ et $ab = 41$. Calculer $a^3 + b^3$.

Solution de l'exercice 5 On a $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = 13^3 - 3 \times 13 \times 41 = 598$.

Exercice 6 Soit $x = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}$ et $y = 2\cos\dfrac{4\pi}{5}$. On admet que $x + y + 1 = 0$. Calculer x et y.

Solution de l'exercice 6 Expliquons pourquoi $x + y + 1 = 0$.

En utilisant $2\sin a \cos b = \sin(a + b) - \sin(b - a)$, on obtient $\sin\frac{\pi}{5}(x + y) = \sin\frac{3\pi}{5} - \sin\frac{\pi}{5} + \sin\pi - \sin\frac{3\pi}{5} = -\sin\frac{\pi}{5}$, donc $(\sin\frac{\pi}{5})(x + y + 1) = 0$.

D'après la formule $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$, on a $y = x^2 - 2$, donc $0 = x + x^2 - 2 + 1 = x^2 + x - 1$.

On en déduit que $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Or, $x > 0$ donc $x = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$. On en déduit que $y = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

Exercice 7 Résoudre $\sqrt{x^2 - 3x + 2} + \sqrt{x + 3} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{x^2 + 2x - 3}$.

Solution de l'exercice 7 On développe : $x^2 - 3x + 2 + x + 3 + 2\sqrt{(x^2 - 3x + 2)(x + 3)} = x - 2 + x^2 + 2x - 3 + 2\sqrt{(x - 2)(x^2 + 2x - 3)}$.

Or, $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ et $x^2+2x-3=(x-1)(x+3)$, donc les racines carrées se simplifient.

On en déduit $x^2-2x+5=x^2+3x-5$, donc $x=2$.

Réciproquement, on vérifie que $x=2$ est bien solution de l'équation.

Exercice 8 Résoudre $1-4^x+2^{x+1}=2^x+2^{-x}$.

Solution de l'exercice 8 On pose $t=2^x$. L'équation équivaut à $1-t^2+2t=t+1/t$, soit $1-t^2+t-1/t=0$. En multipliant par t, il vient $t(1-t^2)+t^2-1=0$, ou encore $0=(1-t^2)(t-1)=(1-t)(1+t)(t-1)=-(t+1)(t-1)^2$.

Par conséquent, $t=1$ ou $t=-1$. Comme $t=2^x>0$, on a nécessairement $t=1$, donc $x=0$.

Réciproquement, on vérifie que $x=0$ est bien solution.

Exercice 9 Résoudre le système d'équations d'inconnues x et y suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} 6(1-x)^2=\dfrac{1}{y} \\ 6(1-y)^2=\dfrac{1}{x} \end{array}\right. .$$

Solution de l'exercice 9 On a $x(1-y)^2=\dfrac{1}{6}=y(1-x)^2$ donc $0=x(1-y)^2-y(1-x)^2=x(1-2y+y^2)-y(1-2x+x^2)=(x-y)+xy^2-yx^2=(x-y)+xy(y-x)=(x-y)(1-xy)$, donc $x=y$ ou $xy=1$.

Premier cas : si $xy=1$ alors $1=6y(1-x)^2=6(1-x)^2/x$, donc $6(1-x)^2=x$. Ceci s'écrit $6x^2-13x+6=0$. Les racines de ce polynôme sont $3/2$ et $2/3$, donc ($x=3/2$, $y=2/3$) ou ($x=2/3$, $y=3/2$).

Deuxième cas : si $x=y$ alors $x=y$ est solution de l'équation $6x(1-x)^2=1$. Ceci est une équation du troisième degré, que l'on peut résoudre par les formules de Cardan si on le souhaite (remarque : la solution est $x=\dfrac{1}{6}(4+2^{2/3}+2^{4/3})$ mais le calcul à la main est un peu pénible).

Les deux derniers exercices utilisent les fonctions symétriques élémentaires.

Soient $x_1,\ldots,x_n$ des réels. On pose

$$\sigma_k=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_k}.$$

On les appelle les fonctions symétriques élémentaires des $x_1,\ldots,x_n$.

Par exemple,

$$\begin{array}{rcl} \sigma_1 &=& x_1+x_2+\cdots+x_n \\ \sigma_2 &=& \sum_{i<j} x_i x_j \\ \sigma_n &=& x_1x_2\cdots x_n. \end{array}$$

Théorème 5. $(X-x_1)(X-x_2)\cdots(X-x_n)=X^n-\sigma_1X^{n-1}+\sigma_2X^{n-2}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$.

Il suffit en effet de développer le membre de gauche.

Exercice 10 Exprimer en fonction de $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$:

a) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}$ b) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2$ c) $\displaystyle\sum_{i \neq j} x_i x_j^2$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> a) σ_{n-1}/σ_n

b) $\sigma_1^2 - 2\sigma_2$

c) On a $\sigma_1\sigma_2 = \sum_i \sum_{j<k} x_i x_j x_k$.

Si $a < b < c$, le terme $x_a x_b x_c$ apparaît 3 fois car (j,k) peut valoir (a,b), (b,c) ou (a,c).

Si $a \neq b$, le terme $x_a x_b^2$ apparaît une fois car $\{j,k\} = \{a,b\}$ et $i = b$.

On en déduit que $\sum_{i \neq j} x_i x_j^2 = \sigma_1\sigma_2 - 3\sigma_3$.

Exercice 11 Résoudre le système d'équations

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ xyz = -1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$$

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> On note σ_k les fonctions symétriques élémentaires en x, y, z. On a $\sigma_1 = 0$, $\sigma_3 = -1$ et $\sigma_1^2 - 2\sigma_2 = 4$, donc $\sigma_2 = -2$. On en déduit que x, y, z sont les racines de $X^3 - 2X + 1$. Ce polynôme admet comme racine évidente 1. En effectuant la division Euclidienne par $X - 1$, on obtient $X^3 - 2X + 1 = (X-1)(X^2 + X - 1)$, donc x, y, z forment, à l'ordre près, la liste $1, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$.

2 jeudi matin : Matthieu Lequesne

Un carré est toujours positif

Théorème 6. Un carré est toujours positif : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x^2 \geq 0$. Plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall (x_1 \ldots x_n) \in \mathbb{R}^n, \qquad \sum_{k=1}^{n} x_i^2 \geq 0$$

On cherche donc à se ramener à une expression de la forme $\sum_{k=1}^{n} x_i^2 \geq 0$. De très nombreuses égalités sont équivalentes à une expression de ce type.

Exercice 1 Montrer que pour tout $x > 0$, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

Exercice 2 Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2+2}{\sqrt{x^2+1}} \geq 2$.

Exercice 3 Montrer que pour tout a et $b > 0$,

$$\min(a,b) \leq \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}} \leq \sqrt[2]{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt[2]{\frac{a^2+b^2}{2}} \leq \max(a,b).$$

Exercice 4 Montrer que pour tout $a, b, c \geq 0$,

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc.$$

Exercice 5 Soit un triangle de côtés a, b et c. Montrer que

$$(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c) \leq abc.$$

Exercice 6 Montrer que pour tout $a, b, c \geq 0$,

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{3}{2}.$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Théorème 7. Soit $a_1 \dots a_n, b_1, \dots b_n \in \mathbb{R}$, alors

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + \dots + b_n^2).$$

Quelques remarques :

1. C'est une inégalité historiquement très présente dans les exercices d'olympiades.
2. C'est une inégalité qui vient de la géométrie, elle s'interprète avec le produit scalaire. Raison de plus pour pensez que la géométrie c'est bien.
3. Notez l'orthographe du nom, on voit trop souvent dans les copies l'inégalité de *Cauchy Swartch* ou autres !

Exercice 7 Montrer que pour $x_1, \dots, x_n > 0$,

$$(x_1 + \dots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{n+1-k} \leq \frac{n(n+1)\sqrt{2n+1}}{2\sqrt{3}}$.

Exercice 9 Soit x, y et z des réels positifs ou nuls. Montrer que

$$\sqrt{3x^2+xy} + \sqrt{3y^2+yz} + \sqrt{3z^2+zx} \leq 2(x+y+z).$$

Inégalité du réordonnement

Théorème 8. Soit $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ et $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ des réels, ainsi que $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ une permutation. Alors

$$\begin{aligned} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n &\geq a_1b_{\sigma(1)} + a_2b_{\sigma(2)} + \ldots + a_nb_{\sigma(n)} \\ &\geq a_1b_n + a_2b_{n-1} + \ldots + a_nb_1. \end{aligned}$$

On peut plus simplement retenir la chose suivante :

Théorème 9. La somme $\sum_{i=1}^{n} a_ib_i$ est maximale lorsque les deux suites sont rangées dans le même ordre (que ce soit croissant ou décroissant) et minimale lorsqu'elles sont dans l'ordre contraire l'une de l'autre.

Exercice 10 Montrer que pour tous $a, b, c \geq$,

$$a^3 + b^3 + c^3 \geq a^2b + b^2c + c^2a \geq 3abc.$$

Exercice 11 Inégalité de Tchebychev : Soit $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ et $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ des réels. Alors

$$\begin{aligned} \tfrac{a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n}{n} &\geq \tfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} \cdot \tfrac{b_1+b_2+\ldots+b_n}{n} \\ &\geq \tfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\ldots+a_nb_1}{n}. \end{aligned}$$

Exercice 12 Soit a, b et c trois réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \leq \frac{3(ab+bc+ca)}{2(a+b+c)}.$$

Conclusion

— Cherchez toujours à vous ramener à une inégalité connue.
— Faites des changements de variables intelligents (= symétriques).
— Si l'inégalité est symétrique en ses variables, vous pouvez imposer un ordre.
— Lisez le poly de Pierre Bornsztein disponible sur le site d'Animath !

3 jeudi après-midi : Pierre Bornsztein

Prologue : Quelques notions de base.

Définition.
Soit A et B deux ensembles.
Une *fonction* f définie sur A et à valeurs dans B est un procédé d'association qui, à chaque élément a de A, associe un unique élément b de B, noté $f(a)$.

Dans ce qui suite, les ensembles A et B seront des ensembles de nombres.
Le nombre $f(x)$ est appelé *l'image de* x par la fonction f.

Par exemple, on peut considérer :
- la fonction f qui, à tout réel x associe $f(x) = x^2$,
ce que l'on notera $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x^2$.

Remarques.
Le $\mathbb{R}$ de gauche indique sur quels types d'objets (de nombres, pour nous) la fonction agit. Dans cet exemple, on peut travailler avec tous les réels x, alors que si on écrit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, notre variable x sera obligatoirement un entier naturel.

Le $\mathbb{R}$ de droite n'est là que pour indiquer les contraintes a priori que l'on souhaite sur $f(x)$. Puisqu'un carré est toujours positif, on aurait pu le remplacer par $\mathbb{R}^+$, mais cela nécessite de regarder de près la formule qui donne $f(x)$.

- La fonction g qui à tout entier $n \geq 1$ associe la n^{ieme} décimale de π. Clairement, il n'existe pas de formule connue qui permette, en remplaçant n par la valeur que l'on veut, de trouver $g(n)$ à l'issue d'un calcul humainement réalisable...

Définition.
Une fonction $f : A \longrightarrow B$ est dite *injective* si deux éléments différents ont toujours des images différentes par f.

Plus formellement, f est injective lorsque :

$$\text{pour tous } a, b \in A, \text{ avec } a \neq b, \text{ on a } f(a) \neq f(b).$$

Remarquons qu'il peut-être utile de reformuler en :

$$\text{pour tous } a, b \in A, \text{ si } f(a) = f(b) \text{ alors } a = b.$$

Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto x^2$ n'est pas injective si on la considère comme définie sur $\mathbb{R}$, mais elle l'est si on la considère comme définie sur $\mathbb{N}$.

Définition.
Une fonction $f : A \longrightarrow B$ est dite *surjective* lorsque tout élément de B est l'image d'au moins un élément de A.

Plus formellement, f est surjective lorsque :

$$\text{pour tout } b \in B, \text{ il existe } a \in A \text{ tel que } b = f(a).$$

Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto x^2$ n'est pas surjective si $A = \mathbb{R}$ et $B = \mathbb{R}$, mais elle l'est si $B = \mathbb{R}^+$.

Définition.
On suppose que A et B sont deux ensembles de nombres.

Une fonction f est dite *strictement croissante sur A* si elle conserve l'ordre, c.-à-d. les images par f sont toujours dans le même ordre que les nombres de départ.

Plus formellement, f est strictement croissante sur A lorsque :

pour tous $a, b \in A$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.

On dit aussi que f est *croissante sur A* lorsque :

pour tous $a, b \in A$, si $a < b$ alors $f(a) \leq f(b)$.

De même, une fonction f est dite *strictement décroissante sur A* si elle renverse l'ordre, c.-à-d. les images par f sont toujours dans l'ordre contraire de celui des nombres de départ.

Plus formellement, f est strictement décroissante sur A lorsque :

pour tous $a, b \in A$, si $a < b$ alors $f(a) > f(b)$.

On dit aussi que f est *décroissante sur A* lorsque :

pour tous $a, b \in A$, si $a < b$ alors $f(a) \geq f(b)$.

Remarques.

Une fonction qui n'est pas croissante sur A n'est pas forcément décroissante sur A. Par exemple, la fonction $f : n \longmapsto (-1)^n$ n'est ni croissante si décroissante sur $\mathbb{N}$.

Une même fonction peut aussi être croissante sur un ensemble et décoissante sur un autre. Par exemple, la fonction $f : x \longmapsto x^2$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$, et strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

Acte I : les entiers, les rationnels, le dénombrable.

Exercice 1.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que, pour tout entier n, on ait

$$f(2n) = 2f(n) \text{ et } f(2n+1) = 2f(n) + 1.$$

Solution.

Soit f une éventuelle solution du problème.

D'après les relations données, on voit bien que si l'on connaît les premières valeurs de f, on va pouvoir en déduire toutes les valeurs de f de proche en proche. On commence donc par choisir $n = 0$, et l'on obtient $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$.

On a aussi $f(1) = 2f(0) + 1$, d'où $f(1) = 0$. A partir de là, tout s'enchaîne :

$f(2) = 2f(1) = 2, f(3) = 2f(1) + 1 = 3, f(4) = 2f(2) = 4,$

$f(5) = 2f(2) + 1 = 5, f(6) = 2f(3) = 6, \cdots$

On voit ainsi apparaître la formule explicite $f(n) = n$. Reste à la prouver. Mais, cela n'est pas difficile par récurrence : la formule est vraie pour tout $n \leq 1$.

Soit alors $n \geq 1$. Supposons la formule vraie pour tout entier naturel $k \leq n$. Il s'agit de la prouver pour $n + 1$.

Si $n + 1$ est pair, il existe un entier $k \leq n$ tel que $n + 1 = 2k$
et on a $f(n + 1) = f(2k) = 2f(k) = 2k = n + 1$.
Si $n + 1$ est impair, il existe un entier naturel $k \leq n$ tel que $n + 1 = 2k + 1$,
et on a $f(n + 1) = f(2k + 1) = 2f(k) + 1 = 2k + 1 = n + 1$.

Ainsi, la seule fonction possible est $f : n \longmapsto n$.
Réciproquement, il est clair que cette fonction est bien solution de problème.

Exercice 2 (Equation de Cauchy).

a) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \text{ pour tous entiers } x \text{ et } y.$$

b) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x + y) = f(x) + f(y), \text{ pour tous rationnels } x \text{ et } y.$$

Solution.

Puisqu'il y a deux paramètres, on peut donner des valeurs séparé ment aux deux, ou en fixer un et faire varier l'autre etc...

a) Soit f une solution éventuelle du problème.

- Pour $x = y = 0$, il vient $f(0) = 2f(0)$, d'où $f(0) = 0$.
- Pour tout x, en choisissant $y = -x$, on a $f(x) + f(-x) = 0$, et donc que $f(-x) = -f(x)$. Cela assure qu'il suffit de déterminer f sur les entiers naturels pour connaître f sur $\mathbb{Z}$ tout entier.
- Comme ci-dessus, on ne voit pas de relation évidente pour déterminer $f(1)$, donc on pose $f(1) = a$.
- En choisissant $y = 1$, on constate que $f(x + 1) = f(x) + f(1) = f(x) + a$, pour tout entier x. Il est alors assez facile d'en déduire que

$$f(2) = 2a, f(3) = 3a, f(4) = 4a.$$

De proche en proche, on en déduit que $f(n) = na$ pour tout entier naturel n, puis pour tout entier relatif n.

- Réciproquement, pour un réel a fixé, la fonction définie par $f(n) = na$ pour tout entier n, est bien une solution du problème.

Il y a donc une infinité de solutions, qui sont les fonctions de la forme
$f : n \longmapsto an$ où a est un réel fixé.

b) D'après le a), on se rend vite compte que, pour tout réel a fixé, la fonction définie par $f(q) = qa$ pour tout rationnel q, est une solution du problème. On va montrer que ce sont les seules.

Soit donc f une solution du problème. Puisque l'égalité est supposée vraie pour tous rationnels x et y, elle est également vraie si x, y sont supposés entiers. D'après le a), il existe donc un réel a tel que $f(n) = an$ pour tout entier n.

Si q est un rationnel, on peut écrire $q = \frac{m}{n}$ où m, n sont des entiers et $n > 0$. Puisqu'on connaît bien f sur les entiers, l'idée est de s'y ramener et pour cela, on constate que pour $x = y$, on a $f(2x) = 2f(x)$ puis, pour $y = 2x$ que $f(3x) = 3f(x)$, et de proche en proche que, pour tout entier $k \geq 0$ et tout rationnel x, on a $f(kx) = kf(x)$.

Par suite, on a $f(nq) = nf(q)$ et aussi $f(nq) = f(m) = ma$, donc $nf(q) = ma$ d'où $f(q) = \frac{m}{n}a = qa$.

Ainsi, il y a une infinité de solutions, qui sont les fonctions de la forme $f : q \longmapsto aq$ où a est un réel fixé.

Exercice 3 (Estonie 2000).

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Solution.

Deux choses à remarquer d'emblée :

- la variable est un entier naturel, et les valeurs de f sont des entiers naturels, ce qui introduit une contrainte sur les fonctions cherchées (qui nous sera bien utile...).

- La variable apparaît "nue" dans l'égalité, c.à.d. qu'il y a un n et pas seulement des images. Cela doit déclencher un réflexe et nous pousser à nous demander si une solution de l'équation fonctionnelle ne serait pas bijective ou, au moins, injective. C'est une information utile lorsque f apparaît sous forme de composées successives.

Soit f une éventuelle solution.

Si a et b sont deux entiers naturels tels que $f(a) = f(b)$, alors on a aussi $f(f(a)) = f(f(b))$ et $f(f(f(a))) = f(f(f(b)))$. En additionnant, il vient

$3a = f(f(f(a))) + f(f(a)) + f(a) = f(f(f(b))) + f(f(b)) + f(b) = 3b$

donc $a = b$. Et ainsi f est injective.

D'autre part, pour $n = 0$, il vient $f(f(f(0)))+f(f(0))+f(0) = 0$. Or, les nombres $f(f(f(0)))$, $f(f(0))$ et $f(0)$ sont des entiers naturels donc $f(0) = f(f(0)) = f(f(f(0))) = 0$.

Pour $n = 1$, il vient $f(f(f(1)))+f(f(1))+f(1) = 3$. Or, les nombres $f(f(f(1)))$, $f(f(1))$ et $f(1)$ sont des entiers naturels et, puisque f est injective, aucun ne peut être égal à 0. La seule possibilité est donc que $f(1) = f(f(1)) = f(f(f(1))) = 1$.

En répétant le raisonnement pour $n = 2$, puis $n = 3$, on voit apparaître que $f(n) = n$.

Supposons que pour un certain entier n fixé on ait $f(k) = k$ pour tout entier $k \leq n$. D'après l'égalité de départ, on a

$f(f(f(n+1))) + f(f(n+1)) + f(n+1) = 3(n+1)$

Mais, puisque f est injective, donc $f(n+1) \geq n+1$. Et, si $f(f(n+1)) = k$ avec $k \leq n$, on aurait $f(f(n+1)) = f(k)$ d'où $f(n+1) = k$ (puisque f est injective), en contradiction avec la phrase précédente. Donc, $f(f(n+1)) \geq n+1$. Et, on montre de même que $f(f(f(n+1))) \geq n+1$.

Mais alors, si l'on veut que l'égalité soit satisfaite, il faut donc que

$f(f(f(n+1))) = f(f(n+1)) = f(n+1) = n+1$, ce qui assure le résultat pour $n+1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, on doit avoir $f(n) = n$.

Réciproquement, il est facile de vérifier que $f : n \longmapsto n$ est bien une solution du problème.

D'après les exemples ci-dessus, on voit bien qu'avec les entiers, on peut construire les nombres $f(n)$ de proche en proche et, éventuellement, étendre la construction aux nombres rationnels qui s'expriment directement grâce aux entiers.

L'idée du raisonnement de proche en proche, ou de façon plus rigoureuse, du raisonnement par récurrence est basée sur le fait que l'on peut numéroter les entiers à l'aide des entiers naturels. On peut s'attendre à ce que ce type de raisonnement puisse être utilisé pour d'autres ensembles ayant la même propriété.

Définition.

Un ensemble E sera dit *dénombrable* si l'on peut numéroter ses éléments à l'aide des entiers naturels, ou d'une partie d'entre eux, de sorte que deux éléments de E distincts aient toujours des numéros différents. De façon plus formelle, E sera dit dénombrable s'il existe une fonction *injective* f de E dans $\mathbb{N}$.

Remarques.

- Avec cette définition, un ensemble fini sera dénombrable. Ce n'est pas toujours la convention choisie, et il est donc conseillé de préciser les choses au départ.
- Clairement, l'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable en considérant la fonction $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ définie par $f(0) = 0$ et

$f(n) = 2n$ et $f(-n) = 2n-1$ pour tout entier $n \geq 1$.

Théorème 1.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ de tous les rationnels est dénombrable.

Preuve.

On peut numéroter les points du plan à coordonnées entières (que l'on identifie à ses coordonnées) en partant de $(0,0), (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), (2,0), (1,1), (0,2), (-1,1), \ldots$ en suivant une spirale.

Ainsi, puisque tout rationnel x peut s'écrire sous la forme $x = \frac{p}{q}$, avec p, q entiers, on peut pour chaque couple (p,q) correspondant noter son numéro, puis donner à x le plus petit des numéros possibles. D'où le résultat.

Remarque.

La dénombrabilité de $\mathbb{Q}$ permet de construire des fonctions assez surprenantes. En voici deux exemples :

Exercice 4.

Déterminer une fonction $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ injective et telle que, pour tout $q \in \mathbb{Q}$, le nombre $f(q)$ soit un carré.

Solution.

Considérons une numérotation arbitraire des rationnels $x_0, x_1, ..., x_n, ...$
La fonction $f : x_n \longmapsto n^2$ est alors une solution du problème.

Exercice 5.

Déterminer une fonction $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ telle que, pour tous a, b avec $a < b$, l'image de $]a, b[$ soit $\mathbb{Q}$ tout entier.

Solution.

On va construire rationnel par rationnel une telle fonction. Bien sûr, puisqu'il y a une infinité de rationnels, il faudra à un moment passer à une construction un peu générale...

Que veut-on ? Que le rationnel 1 ait un antécédent dans chaque intervalle ouvert ? Qu'à cela ne tienne, mettons-le. On choisit donc un point dans chaque intervalle ouvert et on envoie chacun d'eux sur 1. Bon, évidemment, dis comme ça, on ne voit pas trop ce qu'il faut faire et comment on va choisir un point dans chaque intervalle ouvert, d'autant qu'il va falloir recommencer pour tous les autres rationnels après l'avoir fait pour 1. L'idée est alors de construire des ensembles deux à deux disjoints chacun intersectant tout intervalle ouvert.

On commence alors par considérer $A_1 = \{\frac{m}{2^n},\ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } m \in \mathbb{Z} \text{ impair }\}$.

C'est bien un ensemble de rationnels, la condition sur l'entier m d'être impair n'intervenant que pour que la fraction ne puisse se simplifier et éviter de tomber sur 1. Pour tous a, b avec $a < b$, l'intervalle $]a, b[$ contient au moins un élément de A_1 : en effet, si l'on choisit un n suffisamment grand, on a $2^n(b-a) \geq 3$ et donc l'intervalle $]2^n a; 2^n b[$ contient au moins deux entiers consécutifs dont l'un, disons m, est impair. Le nombre $\frac{m}{2^n}$ est alors dans A_1 et dans $]a, b[$.

Puis, on considère $A_2 = \{\frac{m}{3^n},\ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } m \in \mathbb{Z} \text{ non multiple de } 3\}$. Le raisonnement ci-dessus s'adapte pour prouver que tout intervalle ouvert contient au moins un élément de A_2, et des considérations arithmétiques élémentaires montrent que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Et ainsi de suite, si $p_1, p_2, \cdots, p_k, \cdots$ désigne la suite infinie croissante des nombres premiers, on pose $A_k = \{\frac{m}{p_k^n},\ n \in \mathbb{N}^* \text{ et } m \in \mathbb{Z} \text{ non multiple de } p_k\}$.

On montre de même que tout intervalle ouvert contient au moins un élément de A_k, et des considérations arithmétiques élémentaires montrent que $A_k \cap A_i = \emptyset$ pour tout $i < k$.

On construit ainsi une infinité dénombrable d'ensembles deux à deux disjoints chacun intersectant tout intervalle ouvert.

Soit alors $x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots$ une numérotation arbitraire des rationnels. On définit alors une fonction f en posant

$f(x) = x_k$ si $x \in A_k$, et $f(x) = 0$ si x n'est dans aucun des A_k.

Il est clair que cette fonction f convient.

Acte II : les réels.

Les techniques classiques basées sur la construction de proche en proche valables avec les entiers, les rationnels, ou de façon plus générale avec les ensembles dénombrables, ne vont plus être utilisables sur les réels car :

Théorème 2.

L'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les réels n'est pas dénombrable.

Preuve.

On va prouver que l'ensemble $[0, 1[$ n'est déjà pas dénombrable, ce qui suffit pour conclure.

Par l'absurde : supposons que $[0, 1[$ soit dénombrable.

Soit alors $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ les réels de $[0, 1[$ dans l'ordre d'une numérotation.

On construit alors le nombre $a = 0, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$ où, pour chaque i, on a $a_i = 0$ si la $i^{ième}$ décimale de x_i est impaire, et $a_i = 1$ si la $i^{ième}$ décimale de x_i est paire (si l'écriture décimale de x_i est finie, on ajoute une infinité de 0 pour la rendre infinie).

Il est clair qu'alors $a \in [0, 1[$.

Par conséquent, il existe un entier n tel que $a = x_n$. Or, par construction, la $i^{ième}$ décimale de x_n est de parité contraire de celle de a, ce qui assure que $a \neq x_n$. Contradiction.

Remarques.

Cela n'empêchera pas d'utiliser des techniques classiques (s'il y a plusieurs paramètres, donner des valeurs particulières à x et/ou y, etc.) déjà utilisées, mais dans le cas d'une équation fonctionnelle à un seul paramètre x, on aura souvent besoin d'une hypothèse supplémentaire du type croissance, continuité, injectivité... (attention : parfois, ce ne sera pas une hypothèse supplémentaire à proprement parler car elle se déduira de l'équation fonctionnelle elle-même).

Cela dit, rien n'interdit de commencer par regarder comment une solution éventuelle d'une équation fonctionnelle définie sur $\mathbb{R}$ est définie sur les entiers ou les rationnels. Si la fonction est continue ou croissante, on peut alors "transporter" les résultats obtenus sur $\mathbb{R}$ grâce au résultat suivant :

Théorème 3.

Tout réel est la limite d'une suite croissante (resp. décroissante) de rationnels.

Preuve.

On trouvera une rédaction plus rigoureuse dans le poly *Equations fonctionnelles* disponible sur le site d'Animath, rubrique *Les cours de l'OFM*. Disons juste que pour un réel x fixé, il suffit de considérer son développement décimal infini (quitte à ajouter des 0) :

$$x = a, a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

puis, pour tout entier $n \geq 1$, de tronquer ce développement à la $n^{ième}$ décimale en arrondissant par valeur inférieure ou par valeur supérieure selon ce que l'on veut.

Exercice 6 (Equation de Cauchy).

Déterminer toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ pour tous réels } x \text{ et } y.$$

Solution.

Comme dans l'exercice 2, on voit vite que toute fonction linéaire est une solution. La difficulté est que sur $\mathbb{R}$, si l'on n'impose aucune hypothèse, il existe des solutions non linéaires de l'équation de Cauchy, mais d'en construire une nous emmenerait trop loin du cadre de ce texte. On va prouver que, sous l'hypothèse de croissance, une solution de l'équation est linéaire.

On sait déjà (cf. ex. 2) que si f est une solution du problème alors il existe un réel a tel que, pour tout rationnel q, on ait $f(q) = aq$.

Soit x un réel. D'après le théorème 3, il existe une suite croissante (x_n) et une suite décroissante (y_n) de rationnels qui ont chacune pour limite x.

Alors, pour tout entier $n,$ on a $x_n \leq x \leq y_n$ et, puisque f est croissante sur $\mathbb{R}$, on a alors $f(x_n) \leq f(x) \leq f(y_n)$, d'où $ax_n \leq f(x) \leq ay_n$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $ax \leq f(x) \leq ax$, et ainsi que $f(x) = ax$.

Finalement, les solutions du problème sont les fonctions linéaires.

Exercice 7 (Test d'entrée OFM 2009).

a) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telles que

$$f(x^2) + f(y) = f(x^2 + y + xf(4y)) \text{ pour tous } x, y \geq 0.$$

b) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telles que

$$f(x^2) + f(y) = f(x^2 + y + xf(4y)) \text{ pour tous } x, y > 0.$$

c) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+} \longrightarrow \mathbb{R}^{+}$ telles que

$$f(x^2) + f(y) = f(x^2 + y + xf(4y)) \text{ pour tous } x, y \geq 0.$$

Solution.

a) Soit f une solution éventuelle. Pour $x = y = 0$, il vient $f(0) = 0$ ce qui est interdit...il n'y a donc pas de solution.

b) Soit f une solution éventuelle.

Puisque f apparaît sur chacun des termes de l'égalité, parfois après composition, l'idée est d'essayer de prouver que f est injective. Pour cela, on remarque que si y est fixé et $h > 0$, alors on peut toujours trouver $x > 0$ tel que $x^2 + xf(4y) = h$ (le membre de gauche prend toutes les valeurs strictement positives) et que, pour un tel x, on a $f(y+h) = f(y) + f(x^2) > f(y)$ puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Cela assure que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, et donc que f est bien injective.

La seconde idée est de créer de la symétrie entre les paramètres : puisque tout réel positif est un carré, on peut poser $a = x^2$ dans l'équation initiale, et donc $f(a) + f(y) = f(a + y + \sqrt{a}f(4y))$ pour tous $a, y > 0$.

Puisque le membre de gauche est symétrique en a et y, il doit en être de même du membre de droite, ce qui conduit à $f(a + y + \sqrt{a}f(4y)) = f(a + y + \sqrt{y}f(4a))$ pour tous $a, y > 0$. C'est ici que l'injectivité de f assure qu'alors, pour tous $a, y > 0$, on a $a + y + \sqrt{a}f(4y) = a + y + \sqrt{y}f(4a)$, ou encore $\sqrt{a}f(4y) = \sqrt{y}f(4a)$.

En choisissant $a = 1$ et $x = 4y$, on en déduit que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \alpha\sqrt{x}$ pour une certaine constante $\alpha > 0$.

Réciproquement, si pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \alpha\sqrt{x}$ pour une certaine constante $\alpha > 0$, on vérifie directement que f est une solution si et seulement si $\alpha = 1$.

Finalement, la seule solution est $f : x \longmapsto \sqrt{x}$.

c) Bon, cette fois, on a $f(0) = 0$ et le raisonnement du b) assure que f est croissante sur $\mathbb{R}^{+}$ mais pas forcément strictement croissante, ce qui nous fait perdre l'injectivité. Cela dit, si f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$, on retombe sur le b) et sa conclusion. On vérifie d'ailleurs que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est encore une solution.

Il ne reste plus qu'à étudier ce qu'il se passe lorsque f s'annule en $a > 0$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}^{+}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{+}$, on a donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0; a]$.

L'idée est alors de travailler sur la plus grande valeur de a possible, si elle existe. On suppose qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $x < m$ et $f(x) > 0$ pour $x > m$ (pour $f(m)$ on ne sait pas trop si c'est 0 ou pas). On choisit alors

$x > 0$ tel que $x^2 < m$ et $y = m - x^2 + \frac{m-x^2}{2} > 0$. On a $m - y = -\frac{m+3x^2}{2} < 0$ donc $f(x^2) = f(y) = 0$ et ainsi $f(x^2 + y + xf(4y)) = 0$.

Pourtant $x^2 + y + xf(4y) \geq x^2 + y = m + \frac{m-x^2}{2} > m$ donc $f(x^2 + y + xf(4y)) > 0$. Contradiction.

Et ainsi un tel réel m n'existe pas, et f doit donc être identiquement nulle.

Réciproquement, la fonction nulle convient évidemment.

Finalement, les solutions sont $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto 0$.

Moralité.

Rien ne ressemble plus à une équation fonctionnelle qu'une équation fonctionnelle et pourtant les techniques de résolution ne sont pas toujours les mêmes. Cet exercice montre par exemple l'importance des ensembles sur lesquels on travaille.

Acte III : Des exercices.

Exercice 8 (Crux Mathematicorum 2003).

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)), \text{ pour tous réels } x, y.$$

Solution.

Soit f une solution éventuelle.

Pour $x = y$, il vient $f(0) = 0$

Pour $y = -x \neq 0$, il vient $0 = f(0) = 2x(f(x) + f(-x))$ donc $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \neq 0$. Ceci étant clairement vrai pour $x = 0$, c'est donc que f est impaire.

En remplaçant y par $-y$ dans l'égalité initiale, pour tous réels x, y, on a alors $f(x^2 - y^2) = (x + y)(f(x) - f(y))$.

Avec l'égalité initiale, il vient $yf(x) = xf(y)$ pour tous réels x, y.

Pour $y = 1$, on a alors $f(x) = xf(1)$ pour tout réel x, ce qui prouve que f est linéaire.

Réciproquement, il est facile de vérifier que toute fonction linéaire est bien une solution du problème.

Exercice 9.

a) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ prenant une infinité de valeurs différentes et telle que, pour tous $q, q' \in \mathbb{Q}$ avec $q \leq q'$, on ait $f(q)$ divise $f(q')$?

b) Reprendre la question précédente en imposant que f ne prenne jamais deux fois une même valeur.

Solution.

a) Pour tout rationnel $q < 0$, on pose $f(q) = 1$.

Pour tout $q \in \mathbb{Q}^+$, il existe un unique entier naturel n_q tel que $n_q \leq q < n_q + 1$ (le nombre n_q est la partie entière de q). On pose alors $f(q) = 2^{n_q}$.

Il est clair que la fonction ainsi construite est une solution du problème.

b) Par l'absurde : supposons qu'une telle fonction f existe.

Il existe une infinité de rationnels négatifs q et, pour chacun, le nombre $f(q)$ divise $f(0)$. L'entier $f(0)$ admet donc une infinité de diviseurs distincts, ce qui entraine que $f(0) = 0$, ce qui est interdit. Contradiction.

Ainsi, il n'existe aucune fonction ayant les propriétés désirées.

Exercice 10 (Ukraine 1997).

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}^{+*} \longrightarrow \mathbb{Q}^{+*}$ telles que

$$f(x+1) = f(x) + 1 \text{ et } f(x^2) = (f(x))^2, \text{ pour tous rationnels } x, y > 0.$$

Solution.

On voit vite que $f : x \longmapsto x$ est une solution du problème. Prouvons que c'est la seule.

Soit f une solution éventuelle. De la première condition, on en déduit sans difficulté que $f(x+n) = f(x) + n$ pour tous $x \in \mathbb{Q}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. On a $(\frac{a}{b}+b)^2 = (\frac{a}{b})^2 + 2a + b^2$ donc, d'après la seconde condition :
$f((\frac{a}{b}+b)^2) = (f(\frac{a}{b}+b))^2 = (f(\frac{a}{b})+b)^2 = (f(\frac{a}{b}))^2 + 2bf(\frac{a}{b}) + b^2$
et d'autre part
$f((\frac{a}{b}+b)^2) = f((\frac{a}{b})^2 + 2a + b^2) = f((\frac{a}{b})^2) + 2a + b^2 = (f(\frac{a}{b}))^2 + 2a + b^2$.

On en déduit immédiatement que $bf(\frac{a}{b}) = a$, et donc que $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}$ pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}^{+*}$.

Exercice 11.

Prouver qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante telle que

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geq \frac{1}{4}, \text{ pour tout réel } x.$$

Solution.

Par l'absurde : supposons qu'une telle fonction f existe.

Alors, pour $x = 0$, on a $f(0) - (f(0))^2 \geq \frac{1}{4}$, ou encore $(f(0) - \frac{1}{2})^2 \leq 0$. Par conséquent $f(0) = \frac{1}{2}$.

Mais, pour $x = 1$, on a aussi $f(1) - (f(1))^2 \geq \frac{1}{4}$, donc $f(1) = \frac{1}{2}$.

Par suite $f(0) = f(1)$, ce qui contredit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ telles que

$$f(x^y) = f(x)^{f(y)} \text{ pour tous entiers } x, y > 0.$$

Solution.

Pour tous $n, c \in \mathbb{N}^*$, on a alors $f(c^{c^n}) = f(c)^{f(c^n)} = f(c)^{f(c)^{f(n)}}$.
D'autre part

$$\begin{aligned} f(c^{c^n}) = f((c^{c^{n-1}})^c) = f(c^{c^{n-1}})^{f(c)} &= (f(c^{c^{n-2}})^{f(c)})^{f(c)} \\ &= (f(c^{c^{n-2}})^{f(c)^2} \\ &= \cdots \\ &= f(c)^{f(c)^n}. \end{aligned}$$

Si f n'est pas constante égale à 1, il existe donc $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(c) > 1$ et les deux relations ci-dessus conduisent à $f(c)^{f(n)} = f(c)^n$, puis à $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Les seules solutions possibles sont donc $f : x \longmapsto 1$ et $f : x \longmapsto x$.
On vérifie facilement que ces deux fonctions conviennent bien.

Exercice 13 (OIM 2008).

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telles que

$$\frac{(f(w))^2 + (f(x))^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2},$$

pour tous réels $x, y, z, w > 0$ tels que $wx = yz$.

Solution.

Soit f une solution éventuelle. Pour tout $x > 0$, en choisissant $w = y = z = x$, il vient facilement $(f(x))^2 = f(x^2)$, et en particulier $f(1) = 1$ (car $f(1) \neq 0$).

Pour tout $x > 0$, en choisissant $w = 1, y = z = \sqrt{x}$, il vient alors $\frac{1+(f(x))^2}{2f(x)} = \frac{1+x^2}{2x}$ et donc $x(f(x))^2 + (x^2 + 1)f(x) + x = 0$.

Cette dernière équation peut être vue comme une équation du second degré en $f(x)$, que l'on résout et qui permet alors d'affirmer que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = x$ ou $f(x) = \frac{1}{x}$.

Il est d'ailleurs facile de vérifier que les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto x$ sont effectivement des solutions du problème.

Il reste à prouver qu'il n'y en a pas d'autre, en montrant qu'il n'y a pas d'hybride formé à partir des deux valeurs possibles de $f(x)$.

Par l'absurde : supposons que la fonction f soit une solution du problème et qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}$ tels que $f(a) = a$ et $f(b) = \frac{1}{b}$.

En utilisant l'égalité initiale pour $w = a, x = b, y = ab, z = 1$, il vient
$(a^2 + b^2)(1 + (f(ab))^2) = a^4b^2 + 2a^2 + \frac{1}{b^2}$.

- Si $f(ab) = ab$ alors $b^2 + a^2b^4 = a^2 + \frac{1}{b^2}$, d'où $(b^4 - 1)(1 + a^2b^2) = 0$, ce qui est impossible.

- Si $f(ab) = \frac{1}{ab}$ alors $\frac{1}{a^2} + b^2 = a^4b^2 + a^2$, d'où $(a^4 - 1)(1 + a^2b^2) = 0$, ce qui est impossible.

Ainsi, dans tous les cas, on obtient une contradiction, et une telle fonction n'existe pas.

Finalement, les solutions sont $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto x$.

Exercice 14 (OIM 2010).

On note $[X]$ la partie entière du réel X.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f([x]y) = f(x)[f(y)] \text{ pour tous réels } x \text{ et } y.$$

Solution.

La fonction nulle convient clairement. On suppose donc que f est une solution non identiquement nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout réel y, on a $f(ny) = f(n)[f(y)]$.

En particulier, pour $y = 1$, on a alors $f(n) = f(n)[f(1)]$.

S'il existe un entier $n \neq 0$ tel que $f(n) = 0$, on en déduit que $f(ny) = 0$ pour tout réel y, et donc que f est identiquement nulle. Contradiction.

Donc, $f(n) \neq 0$ pour tout entier $n \neq 0$, et en particulier, on a $f(1) \neq 0$.

Puisque $f(1) = f(1)[f(1)]$, c'est que $[f(1)] = 1$.

Pour tout réel x, en prenant $y = 1$, on a $f([x]) = f(x)$, ce qui assure que f est constante sur chaque intervalle $[n; n+1[$.

D'autre part, pour tout réel y, en prenant $x = 1$, il vient $f(y) = f(1)[f(y)]$.

Pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a alors

$f(ny) = f(1)[f(ny)]$ et $f(ny) = f(n)[f(y)] = f(1)[f(n)][f(y)]$

d'où $[f(ny)] = [f(n)][f(y)]$.

En particulier, pour $n \geq 2$ et $y = 1 + \frac{1}{n}$, on a $[y] = 1$ et donc $f(y) = f([y]) = f(1)$, d'où $[f(y)] = 1$ et $[f(n+1)] = [f(ny)] = [f(n)]$.

On en déduit qu'il existe donc $a \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout entier $n \geq 2$, on ait $a \leq f(n) < a + 1$, et donc $a \leq f(x) < a + 1$ pour tout réel $x \geq 2$.

En particulier, $a = [f(4)] = [f(2)][f(2)] = a^2$, ce qui entraine que $a = 0$ ou $a = 1$.

Mais $a = 0$ est impossible puisqu'on a dit depuis le départ que $f(2) \neq 0$, donc $a = 1$ et, $1 \leq f(x) < 2$ pour tout $x \geq 2$.

Notons que cela reste vrai pour $x \in [1; 2[$ puisque $[f(1)] = 1$.

Si maintenant $y = \frac{1}{2}$ et $x = 2$, de l'égalité initiale il vient $f(1) = f(2)[f(\frac{1}{2})] = f(1)[f(\frac{1}{2})]$, d'où $[f(\frac{1}{2})] = 1$ et $f(0) = f(\frac{1}{2}) \in [1; 2[$.

Mais alors, pour tout réel x, on a $f(0) = f(x)[f(0)] = f(x)$, ce qui prouve que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, il existe un réel $\alpha \in [1; 2[$ tel que $f(x) = \alpha$ pour tout réel x.

On vérifie qu'un telle fonction est effectivement une solution du problème.

Finalement, les solutions sont les fonctions constantes $x \longmapsto \alpha$, avec $\alpha = 0$ ou $\alpha \in [1; 2[$.

Exercice 15 (Suède 1962).

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$|f(x)-f(r)| \leq 7|x-r|^2$ pour tout réel x et tout rationnel r.

Solution.

Evidemment, là, c'est plutôt d'une inéquation fonctionnelle qu'il s'agit. Mais bon, ne chipotons pas...

Soit f une solution éventuelle. Pour créer de la symétrie entre les paramètres, on va d'abord regarder ce qu'il se passe sur les rationnels.

Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$, on pose $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Il est clair que que les a_i sont tous rationnels et que $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$ pour $i \leq n-1$.

D'après l'inégalité triangulaire, on a alors :

$$|f(a)-f(b)| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leq 7\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)^2 = \frac{7(b-a)^2}{n^2}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $f(a) = f(b)$. Par suite, la fonction f est constante sur $\mathbb{Q}$.

Il reste à étendre ce résultat à $\mathbb{R}$.

Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(r) = c$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Soit x un réel. On sait qu'il existe une suite (r_n) de rationnels qui converge vers x et, sans perte de généralité, on peut supposer que $|x - r_n| \leq \frac{1}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout entier $n \geq 0$, on a

$|f(x) - c| = |f(x) - f(r_n)| \leq 7(x-r_n)^2 \leq \frac{7}{10^{2n}}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $f(x) = c$, et donc que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, il est facile de vérifier que les fonctions constantes sont bien des solutions du problème.

Exercice 16 (Entrainement OFM 2001).

Déterminer une fonction $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ qui vérifie les deux conditions suivantes :

(i) $f(a) < a$ pour tout rationnel a

(ii) pour tout rationnel a, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels b tels que $f(b) < a < b$.

Solution.

La première condition pousse à poser $f(a) = a - g(a)$ pour tout rationnel a. La fonction g ainsi définie doit être à valeurs strictement positives.

La seconde condition s'écrit : pour tout $a \in \mathbb{Q}$, il n'existe qu'un nombre fini de $b \in \mathbb{Q}$ tels que $b - g(b) < a < b$.

Posons $a = \frac{m}{n}$ et $b = \frac{p}{q}$, avec m, n, p, q entiers et $n, q > 0$ et les fractions sont supposées irréductibles.

La condition $a < b$ est équivalente à $\frac{pn-qm}{pn} > 0$. Puisque le dénominateur est positif, cela se traduit par $pn - qm > 0$, et comme il s'agit d'un entier, c'est équivalent à $pn - qm \geq 1$.

Il s'agit donc de définir $g(\frac{p}{q})$ de sorte que $g(\frac{p}{q}) > 0$ et que, pour tout entiers m, n avec $n > 0$, tels que $pn - qm \geq 1$, on n'ait $g(\frac{p}{q}) > \frac{pn-qm}{pn}$ que pour un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$.

Comme $\frac{pn-qm}{pn} \geq \frac{1}{pn}$, cela sera assuré si pour n fixé, on a $g(\frac{p}{q}) \leq \frac{1}{pn}$ pour tout entier $p > 0$ sauf pour un nombre fini de cas. Il suffit alors de poser par exemple $g(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q^2}$ pour avoir ce que l'on désire.

Et finalement, la fonction $f : \frac{p}{q} \longmapsto \frac{p}{q} - \frac{1}{q^2}$, où $\frac{p}{q}$ est supposée irréductible, convient.

VI. Vendredi : Test final

1 Débutants

1 Enoncé

Exercice 1

Montrer que pour tout $n \geq 4$: $\qquad 2^n \geq n^2$

Exercice 2

Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. On note A' le pied de la hauteur issue de A dans ABC et A'' le pied de la hauteur issue de A' dans $A'AC$. De même, on note B' le pied de la hauteur issue de B dans ABC et B'' le pied de la hauteur issue de B' dans $B'BC$.

Montrer que $(A''B'')$ et (AB) sont parallèles.

Exercice 3

Soit ABC un triangle isocèle en A, D le milieu de $[BC]$ et Γ un cercle de centre D et tangent à $[AB]$ et $[AC]$. Soient $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ tels que $[MN]$ est tangent à Γ.

Montrer que $BD^2 = BM \times CN$.

Exercice 4

On place $2n+1$ points à l'intérieur d'un carré de côté 1.

Montrer qu'il existe trois de ces points qui délimitent un triangle d'aire inférieure ou égale à $\frac{1}{2n}$.

2 Solution

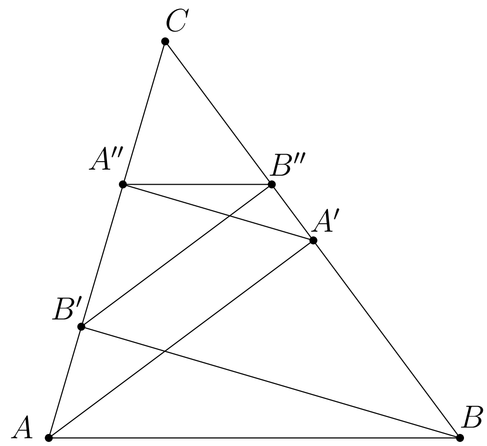
Solution de l'exercice 1 On raisonne par récurrence : pour $n = 4$ on a $2^4 = 16 = 4^2$ donc $2^n \geq n^2$, d'où l'initialisation.

De plus, soit $n \geq 4$ et supposons $2^n \geq n+1$. Alors $2 \leq \frac{n}{2}$ donc $2n \leq \frac{n^2}{2}$ donc on peut écrire :

$$(n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \leq n^2 + \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2} = 2n^2 \leq 2 \times 2^n = 2^{n+1}$$

en utilisant à la fin l'hypothèse de récurrence.

Solution de l'exercice 2



Les triangles ABA' et ABB' sont rectangles en A' et B' donc A, B, A' et B' sont cocycliques donc $\widehat{CAB} = \widehat{CA'B'}$. De même, les points A', B', A'' et B'' sont cocycliques donc $\widehat{CA'B'} = \widehat{CA''B''}$. On a donc $\widehat{CA''B''} = \widehat{CAB}$ donc les droites (AB) et $(A''B'')$ sont parallèles.

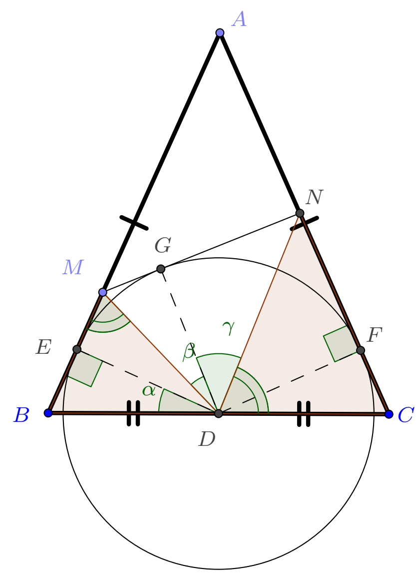
Solution de l'exercice 3 Soient E, F et G les points de tangence de (AB), (AC) et (MN).

On note $\alpha = \widehat{EDB} = \widehat{CDF}$, $\beta = \widehat{GDM} = \widehat{MDE}$ et $\gamma = \widehat{GDN} = \widehat{NDF}$.

On a $2(\alpha + \beta + \gamma) = 180°$ donc $\alpha + \gamma = 90° - \beta$.

Il vient $\widehat{BMD} = \widehat{EMD} = 90° - \beta = \alpha + \gamma = \widehat{CDF} + \widehat{FDN} = \widehat{CDN}$.

De plus, $\widehat{DBM} = \widehat{NCD}$, donc BDM et CND sont semblables. Il vient $\dfrac{BD}{BM} = \dfrac{CN}{CD}$, donc $BD^2 = BM \times CN$.



Solution de l'exercice 4 On découpe le carré en n rectangles de 1 sur $\frac{1}{n}$: d'après le principe des tiroirs il y a trois points dans un même rectangle. Notons-les A, B et C : il faut maintenant prouver que ABC est au plus la moitié de celle du rectangle. Quitte à rétrécir le rectangle, on peut supposer que A est sur son bord haut et B sur son bord bas.

La droite horizontale (d) passant par C recoupe $[AB]$ en D : en utilisant la formule usuelle pour l'aire d'un triangle, il est facile de voir que ACD recouvre au plus la moitié de l'aire du rectangle au-dessus de (d) et que BCD recouvre au plus la moitié de l'aire en-dessous.

2 Avancés

1 Enoncé

Exercice 1 Soit ABC un triangle isocèle en A, D le milieu de $[BC]$ et Γ un cercle de centre D et tangent à $[AB]$ et $[AC]$. Soient $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$ tels que $[MN]$ est tangent à Γ.

Montrer que $BD^2 = BM \times CN$.

Exercice 2 Montrer que si a, b et c sont des nombres réels positifs vérifiant $abc = 1$ alors :

$$(a^2+1)(b^3+2)(c^5+4) \geqslant 30$$

Quels sont les cas d'égalités ?

Exercice 3 Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous x et y :

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)\big(f(x) + f(y)\big)$$

Exercice 4 Soit ABC un triangle isocèle en A et Γ son cercle circonscrit. On note γ le cercle tangent aux côtés $[AB]$ et $[AC]$ et à Γ intérieurement. On note P, Q et R les points de contacts de γ avec $[AB]$, $[AC]$ et Γ respectivement. On note O le centre de γ, J le milieu de $[PQ]$ et K celui de $[BC]$. Montrer que :

$$\frac{AJ}{AK} = \frac{AO}{AR}$$

En déduire que J est le centre du cercle inscrit à ABC.

2 Solution

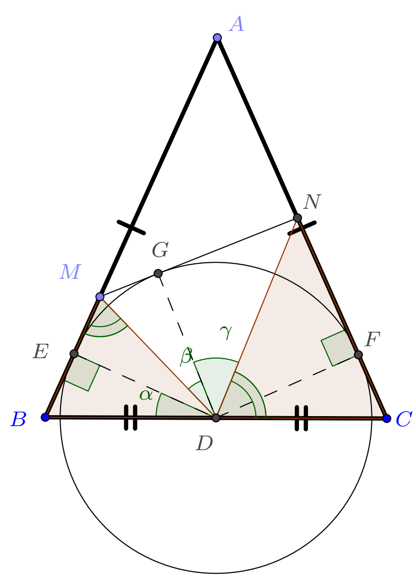
<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Soient E, F et G les points de tangence de (AB), (AC) et (MN).

On note $\alpha = \widehat{EDB} = \widehat{CDF}$, $\beta = \widehat{GDM} = \widehat{MDE}$ et $\gamma = \widehat{GDN} = \widehat{NDF}$.

On a $2(\alpha + \beta + \gamma) = 180°$ donc $\alpha + \gamma = 90° - \beta$.

Il vient $\widehat{BMD} = \widehat{EMD} = 90° - \beta = \alpha + \gamma = \widehat{CDF} + \widehat{FDN} = \widehat{CDN}$.

De plus, $\widehat{DBM} = \widehat{NCD}$, donc BDM et CND sont semblables. Il vient $\dfrac{BD}{BM} = \dfrac{CN}{CD}$, donc $BD^2 = BM \times CN$.



<u>*Solution de l'exercice 2*</u> On a par IAG : $a^2 + 1^2 \geqslant 2a$, $b^3 + 1^3 + 1^3 \geqslant 3b$ et $c^5 + 1^5 + 1^5 + 1^5 + 1^5 \geqslant 5c$, d'où $(a^2 + 1)(b^2 + 3)(c^5 + 4) \geqslant (2a)(3b)(5c) = 30$.

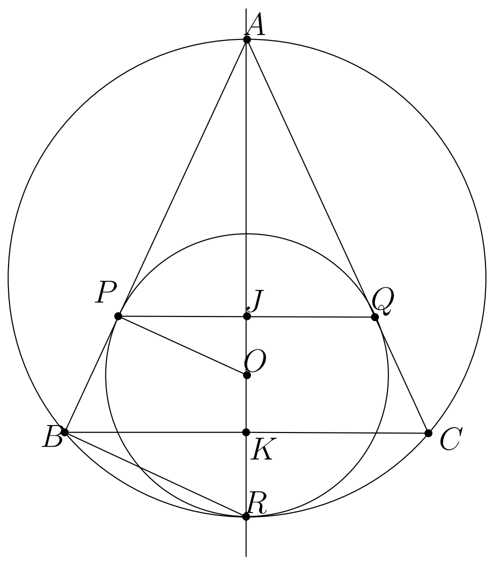
L'égalité dans l'IAG a lieu si les termes sont égaux donc si $a = b = c = 1$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> En prenant $x = y = 0$ on obtient $f(0) = 0$. En prenant $y = 0$ on trouve $f(x^2) = xf(x)$. En particulier, $-xf(-x) = xf(x)$ donc $f(-1) = -f(1)$.

De plus, en prenant $y = 1$ et $y = -1$ on obtient $(x-1)(f(x)+f(1)) = f(x^2-1) = (x+1)(f(x) - f(1))$, ce qui se réécrit $2xf(1) = 2f(x)$ donc $f(x) = xf(1)$ et f est linéaire.

Réciproquement, on vérifie facilement que toutes les fonctions linéaires sont solution.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>



Pour la première question, comme ABC est isocèle, (BC) et (PQ) sont perpendiculaires à (AR) qui est un diamètre. Donc ABR est rectangle, donc semblable à ABJ. On utilise alors deux fois Thalès, et les deux rapports de l'énoncé sont égaux à $\frac{AP}{AB}$. Pour la deuxième question, soit h l'homothétie de centre A qui envoie K sur R. Elle envoie B et C sur X et Y avec (XY) la tangente à Γ passant par R. D'après la première question, elle envoie J sur O. Soient $M = h(B)$ et $N = h(C)$. Comme O est le centre du cercle inscrit de AMN, J est celui de ABC.

VII. Conférences

1 Cryptanalyse (Matthieu Lequesne)

Mardi soir, Matthieu Lequesne est venu avec trois sujets de conférence au choix. Les élèves ont voté et choisi la cryptanalyse. Sont évoqués entre autres César, Vigenère, Alkindi, Babbage et Ada Lovelace (AdaWeek), mais aussi Alan Turing, Bill Tutte et les indiens Navajos.

Signalons à cette occasion, pour ceux qui ne le sauraient pas encore, que l'association Animath organise cette année pour la première fois le concours Alkindi, une compétition de cryptanalyse pour les élèves de seconde. Incitez vos professeurs à inscrire votre classe ! C'est en ligne et entièrement gratuit.

2 Les Olympiades de Mathématiques

Peut-on imaginer un stage sans une présentation des Olympiades de Mathématiques ? Ceux qui en sont à leur cinquième stage trouvent sans doute cela lassant, mais beaucoup viennent là pour la première fois, et souhaitent savoir vers quoi ils s'orientent. La liste des olympiades internationales auxquelles la France participe peut varier d'une année à l'autre, mais il y aura toujours au moins l'Olympiade Internationale de Mathématiques, vraisemblablement les Olympiades Balkaniques Junior, le Romanian Master of Mathematics, l'Olympiade Européenne de Mathématiques pour Filles, auxquelles nous avons participé cette année. Sans parler de l'Olympiade Académique de Mathématiques, en France, avec plus de 20 000 participants au niveau première, des Olympiades de Quatrième dans une dizaine d'Académies et des Olympiades de Seconde par équipe, créées par l'Académie de Versailles.

Nous avons obtenu, aux Olympiades Internationales de Mathématiques, notre meilleur résultat depuis plus de vingt ans.Il manque une médaille d'or... Nous en avons déjà eu et nous en aurons d'autres !

François Lo Jacomo n'a pas eu le temps de préparer beaucoup de matériel pour cette présentation. Il y a des photos et films de ces différentes compétitions que l'on peut présenter, si l'on s'y prend à l'avance. Signalons au passage la parution de l'ouvrage Panoramath 6, qui présente un panorama de toutes les compétitions mathématiques françaises. L'ouvrage est édité par le CIJM, Comité International des Jeux Mathématiques, www.cijm.org.

VIII. Citations mémorables

Celles qui représentent le plus le stage :

— *L'alarme* " Driiing ! " (au moins quatre fois par jour, et deux fois par nuit, quand un stagiaire ouvre la porte de secours).

— *Tous* (toutes les heures, sauf entre 24 h 43 et 7 h 41) : " 42 ! "

— *(à 23 h 42)*
Tous : " Quarante-deux ! "
Quelqu'un : " Allez chercher Baptiste ! "
L'alarme : " Driiing ! "

L'alarme

— Jean Zablocki : " Au moins 2/3 des fois où l'alarme a sonné, Baptiste était impliqué ".
L'alarme : " Driiing ! "
Baptiste Serraille (en entrant) : " Ah, bah maintenant ça fait 3 / 4 "
Jean : " Il faut que je revoie mes statistiques ".

Les animateurs

— Thomas Budzinski : " Moi, je n'ai jamais eu de profs jeunes : xxx, yyy, ... et toi [à Pierre] "
Pierre Bornsztein : " Eh bien, merci ! "

— Matthieu Lequesne : *(lorsqu'on faisait des remarques sur les fautes qu'il faisait)* " Non, mais ça c'est un piège '.
(plus tard) : " Ah, bah je suis tombé dans mon propre piège ! "

— Vincent Jugé : " Dans ma promo, il y avait plus de Benoîts que de filles ".

— Roger Mansuy : " La réponse à chaque question est récurrence ".
(plus tard, lorsque quelqu'un répond à une de ses questions) : " Faux, la réponse est récurrence ".

Au sujet des nombres

— Roger Mansuy : " J'aime bien la table de 37, car $37 \times 3 = 111$ et $37 \times 18 = 666$ ".

— Baptiste Serraille : " La preuve que 42, c'est génial : en binaire, c'est 101010 ".

Philosophie des élèves :

— Le conférencier *(Matthieu Lequesne)* : " Et au neuvième siècle, qui a inventé un nouveau code ? "
Victor Lu : " César ! "

— *(en cours)* Jean-Louis Tu : " Quelqu'un a une question sur l'exercice ? "
Etienne Massart : " Oui, moi : quand est-ce qu'on mange ? "
— Ceux du groupe débutant (tout le temps) : " Tout est lié ".
— *(pendant une pause)*
Pierre Ayanidès : " Qui était là en premier, l'oeuf ou la poule ? "
Linda Gutsche *(au tableau)* : " La racine de l'oeuf est la poule. La racine de la poule est l'oeuf. Donc on a : $\sqrt{9} = poule$; $\sqrt{poule} = 9$; et $\sqrt{\sqrt{poule}} = poule$ ". La première équation implique que $poule = 3$, la deuxième que $poule = 81$, et la troisième que $poule = 1$, parce que les poules sont réelles et non nulles. Donc on a $3 = 81 = 1$, ce qui est absurde. Il n'y a donc pas de réponse à la question ".
— Au sporz *(un jeu de rôle et de stratégie ressemblant un peu au loup-garou)*
Pierre-Marie Esmenjaud : " Eh, les gars ! je suis le douzième mutant O ! "
(ceux qui connaissent le jeu comprendront)
Lucas Fournier : " Mais t'es con ! J'étais médecin ! "
Julien Jampsin *(un péquenot résistant)* : " Ah merde alors, j'ai buté les deux médecins ! "
(même remarque que pour la citation précédente)