STAGE OLYMPIQUE JUNIOR 2012

Cachan, 5 au 9 novembre 2012

Avant-propos

Le stage olympique junior de toussaint a été organisé à Cachan par l'association Animath.

*Son objet a été de rassembler des élèves de seconde et de collège,
repérés entre autres par leur participation à diverses compétitions,
et de les faire travailler sur des exercices en vue de la formation d'une des équipes
qui représenteront la France à l'Olympiade Internationale de Mathématiques.
Les plus brillants des participants pourront dès cette année
être intégrés au groupe que l'Olympiade Française de Mathématiques
prépare à plusieurs compétitions internationales de 2013 :
Olympiade Internationale de Mathématiques,
Olympiade Balkanique de Mathématiques,
Olympiade Balkanique Junior de Mathématiques,
Olympiade Européenne de Mathématiques pour Filles.*

Nous tenons à remercier l'internat d'excellence de Cachan pour son excellent accueil.

Les Animatheux

Razvan Barbulescu

Pierre Bertin

Pierre Bornsztein

Mohamed Chacrone

Vincent Jugé

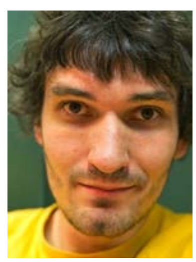
Igor Kortchemski

François Lo Jacomo

Roger Mansuy

Irène Marcovici

Jean-François Martin

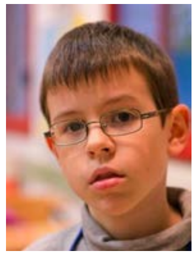


Antoine Taveneaux

Les élèves

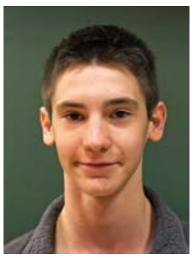

Etienne Apers


Mathieu Barré


Pierre-Alexandre Bazin

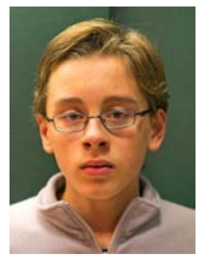

Bruno Belanyi

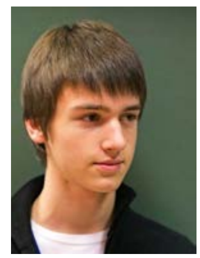

Solange Boucheron


Vincent Bouis


Félix Breton


Pablo Bustillo

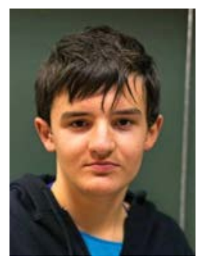

Romain Caplier


Vincent Chapuis


Louis Charnavel


Baptiste Collet


Colin Davalo

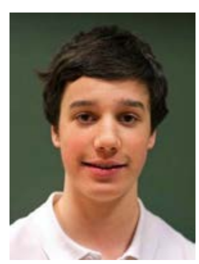

Tristan Deniau


Clara Ding


Flavien Gervois


Lucas Gublin


Ilyas Lebleu


Adrien Lemercier

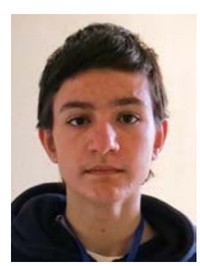

Jérémy Lengelé


Clément Lézane


Lilia Martin


Marc Michoux


Victor Moldovan


Noé Natik


Florent Noisette


Nathan Paysant


Alice Phe


Aline Phe


Titouan Poquillon


Myriam Qrichi Aniba


Hélène Quach


Antoine Ravetta


Rayane Segueg

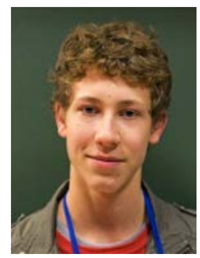

Thomas Sepulchre


Alban Simonnot


Wendy Sok


Alexandre Thiault


Malik Tuwebti


Arthus Vanet


Lucie Wang


Louise Wu


Kayo Yin


Patrick Zeng

Table des matières

I. Déroulement du stage

Pour ce quatrième stage olympique junior, nous avons amplifié l'effort des années précédentes, grâce à une subvention de Cap'Maths, avec bien plus de stagiaires : 44 (au lieu de 29 en 2011), soit 23 de seconde, 18 de troisième, 2 de quatrième et un de cinquième. Pour la première fois nous avions 25% de filles.

Le premier jour, les élèves sont arrivés pour la plupart entre 9 h 20 et 11 h : après les formalités d'accueil (Mohamed Chacrone est venu nous y aider), tout le monde était présent pour l'inauguration du stage à 12 h. Mais c'est l'après-midi que les choses sérieuses ont commencé, avec, de 14 h à 16 h, un test initial qui nous a permis de répartir les élèves en deux groupes (débutants et avancés), indépendamment de la classe. Des élèves de seconde ayant déjà suivi deux stages junior se sont retrouvés parmi les débutants. Le test initial a été corrigé après le goûter du lundi, et le soir, était prévue la traditionnelle présentation d'Animath et des Olympiades, avec distribution de bics et T-shirts Animath.

Les horaires étaient ceux de l'an passé : petit déjeuner à 8 h, cours en parallèle de 9 h à 10 h 30 et de 11 h à 12 h 30, déjeuner à 12 h 30, cours de 14 h à 16 h et de 16 h 30 à 17 h 30 avec un goûter à 16 h, dîner à 19 h suivi généralement d'une soirée à 20 h 30. Puis les stagiaires pouvaient encore jouer : nous nous efforcions de surveiller notamment qu'ils ne se couchent pas après 23 h, mais nous étions moins nombreux que l'an passé à dormir sur place. Les 11 filles étaient dans 4 chambres, et nous avons inversé l'aile des filles et celle des garçons car il n'y avait pas assez de lits dans l'aile traditionnellement masculine pour nos 33 garçons. La répartition était déterminée essentiellement par la classe et l'âge, les élèves n'étaient pas autorisés à changer de chambre.

Mardi, j'ai fait un exposé intitulé "qui a découvert le théorème de Pythagore ?" et mercredi, Roger Mansuy leur a présenté "les cordes universelles", ce qui nécessitait quelques résultats d'analyse, et tout d'abord un rappel de ce qu'est une fonction. Comme le stage commençait par un test, nous n'avons organisé qu'un second test le vendredi matin (9 h à 12 h) portant sur les trois chapitres abordés durant ces trois jours : combinatoire le mardi, arithmétique le mercredi et géométrie le jeudi. Les énoncés n'étaient bien sûr pas les mêmes pour les avancés et les débutants. Vendredi après-midi, outre les formalités de départ, il restait à présenter la correction du test et rendre les copies, distribuer le polycopié, mais aussi expliquer aux stagiaires comment ils pourront poursuivre cette préparation olympique, qui ne se limite pas aux deux stages organisés par Animath. La fin du stage était prévue vers 16 h.

		Débutants	Avancés
Lundi	10h-12h	Arrivée et installation	
	14h-16	Test initial	
	17h-17h30	Présentation du stage	
	17h30-18h30	Correction du test initial	
	20h30-21h30	Animath et les Olympiades	
Mardi	Matin	Stratégies de Base (Irène Marcovici)	Combinatoire (Pierre Bornsztein)
	Après-midi	Stratégies de Base (François Lo Jacomo)	Combinatoire (Pierre Bertin)
	20h30	**Conférence (François Lo Jacomo)**	
Mercredi	Matin	Arithmétique (Vincent Jugé)	Arithmétique (François Lo Jacomo)
	Après-midi	Arithmétique (Antoine Taveneaux)	Arithmétique (Roger Mansuy)
	20h30	**Conférence (Roger Mansuy)**	
Jeudi	Matin	Géométrie (Jean-François Martin)	Géométrie (François Lo Jacomo)
	Après-midi	Géométrie (Razvan Barbulescu)	Géométrie (Igor Kortchemski)
Vendredi	9h-12h	Test final	
	14h30	Correction du test final - clôture du stage	

Quelques liens utiles pour poursuivre le travail réalisé pendant ce stage :

– Le site d'Animath : `www.animath.fr`
– Le site MathLinks : `www.mathlinks.ro`

II. Exercices d'échauffement

1 Enoncés

Exercice 1
Un triangle a pour longueurs de côtés : 3, 4, 5. Calculer le rayon du cercle inscrit (cercle intérieur au triangle et tangent aux trois côtés du triangle).

Exercice 2
Soit $ABCD$ un trapèze, où (AB) et (CD) sont parallèles. On note Δ la droite passant par les milieux de $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que les droites Δ, (AD) et (BC) sont concourantes ou parallèles.

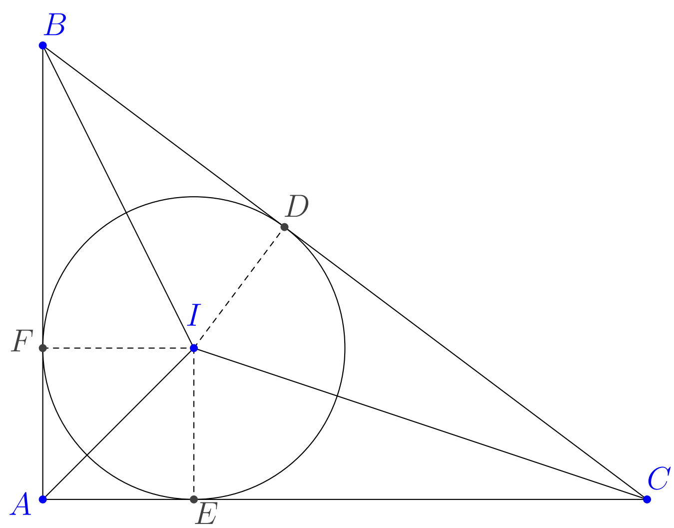
Exercice 3
Soit $ABCD$ un rectangle, E et F les milieux des côtés $[AD]$ et $[DC]$. On appelle G l'intersection des droites (AF) et (EC). Montrer que les angles $\widehat{CGF}$ et $\widehat{FBE}$ sont égaux.

Exercice 4
Soit cinq nombres $a < b < c < d < e$.
a) Combien de sommes deux à deux peut-on former ?
b) Ces dix sommes sont $21, 26, 35, 40, 49, 51, 54, 60, 65, 79$. Trouver a, b, c, d, e.

Exercice 5
Soit a, b, c, d des nombres positifs tels que $a+b+c+d = 4$. Montrer que $ab+bc+cd+da \leq 4$.

2 Solutions

Solution de l'exercice 1

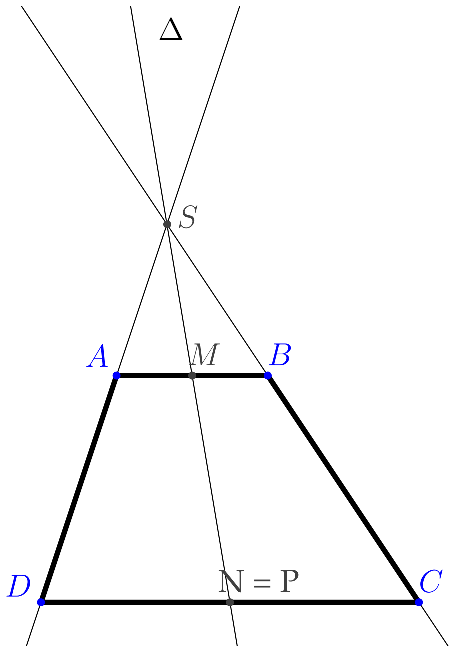


Appelons A, B, C les sommets du triangle, $a = BC, b = CA, c = AB$ les longueurs des trois côtés, I et r le centre et le rayon du cercle inscrit. Les hauteurs issues de I des triangles IAB, IBC et ICA sont toutes trois égales à r, de sorte que les aires de ces trois triangles sont : aire(IAB) = $\frac{rc}{2}$, aire(IBC) = $\frac{ra}{2}$, aire(ICA) = $\frac{rb}{2}$, d'où l'on déduit : aire(ABC) = $\frac{r(a+b+c)}{2}$. Or le triangle de côtés $3, 4, 5$ est rectangle, son aire vaut : $\frac{3\times 4}{2} = 6 = \frac{r(3+4+5)}{2}$. Il en résulte que $r = 1$.

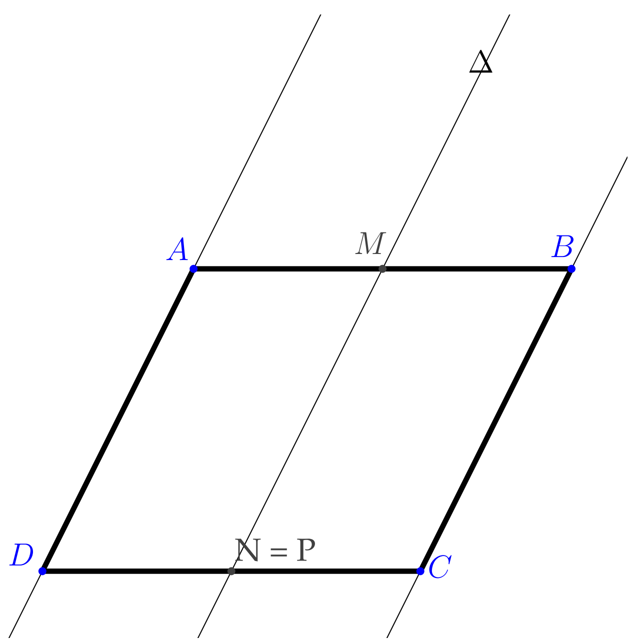
Le triangle donné, de côtés $3, 4, 5$, étant rectangle, on peut aussi raisonner comme suit. Appelons D, E, F les projections de I sur les côtés BC, CA, AB. Ce sont donc les points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle. Si A est le sommet de l'angle droit, $AEIF$ est un carré, et $r = IE = IF = AE = AF$. Or AE et AF sont faciles à calculer : si l'on pose $u = AE = AF$, $v = BF = BD$, $w = CD = CE$, $u + v = c, v + w = a, w + u = b$, donc en additionnant : $2(u + v + w) = a + b + c$ soit finalement $u = \frac{-a+b+c}{2}$, $v = \frac{a-b+c}{2}$, $w = \frac{a+b-c}{2}$. On en déduit : $r = u = \frac{-5+4+3}{2} = 1$.

Les deux méthodes sont très différentes, mais les résultats sont bien identiques. En effet, $\frac{r(a+b+c)}{2} = \left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = \frac{-a^2+(b+c)^2}{4} = \frac{bc}{2}$ = aire(ABC) car le carré de l'hypoténuse $a^2 = b^2 + c^2$.

Solution de l'exercice 2

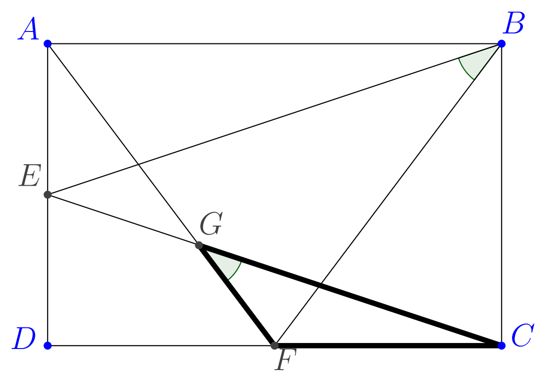


Appelons M et N les milieux de $[AB]$ et $[CD]$. Supposons dans un premier temps que (AD) et (BC) se coupent en un point S, et considérons la droite (SM), qui coupe (CD) en P. En utilisant le théorème de Thalès et le fait que $MA = MB$, on a : $\frac{PD}{PS} = \frac{MA}{MS} = \frac{MB}{MS} = \frac{PC}{PS}$, ce qui entraîne : $PC = PD$. P est donc le milieu N de $[CD]$, et la droite (SM) n'est autre que Δ : Δ, (AD) et (BC) sont bien concourantes en S.



Supposons maintenant que (AD) et (BC) sont parallèles, et traçons la parallèle à (AD) et (BC), qui passe par M. Soit P l'intersection de cette parallèle avec (CD). $DPMA$ et $CPMB$ sont des parallélogrammes, donc $DP = MA = MB = CP$. Une fois de plus, P est le milieu de $[CD]$, donc (MP), parallèle à (AD) et (BC), n'est autre que $(MN) = \Delta$.

Solution de l'exercice 3



Dans le triangle FCG, les angles à la base $\widehat{CGF}$ et $\widehat{FCG}$ ont pour somme le supplémentaire $\widehat{AFD}$ du troisième angle. Or $\widehat{FCG} = \widehat{DCE} = \widehat{ABE}$ par symétrie, et $\widehat{AFD} = \widehat{BFC}$ (par symétrie), ce qui est égal à $\widehat{ABF}$ (angles alternes internes). Comme $\widehat{ABE} + \widehat{FBE} = \widehat{ABF}$, $\widehat{FBE} = \widehat{CGF}$.

Solution de l'exercice 4

a) On peut former dix sommes distinctes : $a+b, a+c, a+d, a+e, b+c, b+d, b+e, c+d, c+e, d+e$.

b) Les deux plus petites sommes sont nécessairement : $a + b = 21$ et $a + c = 26$, et les deux plus grandes, obligatoirement $d + e = 79$ et $c + e = 65$. Par ailleurs, la somme de ces dix sommes vaut : $4(a + b + c + d + e) = 480$, donc $a + b + c + d + e = 120$. D'où $c = (a+b+c+d+e) - (a+b) - (d+e) = 20$, et $a = 6$, $b = 15$, $e = 45$ et $d = 34$. Si l'on calcule les dix sommes deux à deux des cinq nombres $6, 15, 20, 34$ et 45, on trouve bien les dix nombres donnés.

Solution de l'exercice 5

$ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$. En posant $u = a + c$ et $v = b + d$, on est ramené à prouver que si $u + v = 4$, alors $uv \leq 4$. Or $uv = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$. Si $u + v = 4$, $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = 4$ ce qui achève la démonstration.

III. Lundi : Test initial

1 Enoncé

Durée : 2 heures.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Vous devez démontrer ce que vous affirmez. N'hésitez pas à écrire les idées de démonstration que vous avez : même si la démonstration est incomplète, une idée juste peut faire gagner des points.

Aucun document n'est autorisé, pas même les calculatrices (ni les téléphones).

Rédigez des exercices différents sur des feuilles différentes. N'oubliez pas vos nom, prénom, classe sur chaque feuille.

Rédigez clairement et lisiblement vos solutions !

Exercice 1

On considère la suite 1, 3, 4, 9, 10, 12, 13... constituée des entiers supérieurs ou égaux à 1, en ordre croissant, qui sont des puissances de 3 ou des sommes de puissances distinctes de 3 (par exemple : $4 = 3^1 + 3^0$, $10 = 3^2 + 3^0$, $13 = 3^2 + 3^1 + 3^0$...).

Quel est l'entier qui se trouve à la centième place ?

Exercice 2

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On note E l'intersection de la bissectrice de $\widehat{ADC}$ avec BC. On appelle M l'intersection de la médiatrice du segment $[AD]$ avec DE. On note F l'intersection de AM avec BC.

a) Montrer que $DE = AF$.

b) Montrer que $AB \times AD = DE \times DM$ (produits des longueurs).

Exercice 3

On considère une grille 4×4 constituée de 16 cases. Combien au minimum faut-il noircir de cases pour qu'en éliminant deux colonnes quelconques et deux lignes quelconques, on soit certain qu'il reste au moins une case noire ?

2 Solution

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Pour cet exercice il faut réfléchir en base 3 et en base 2. La suite est constituée des nombres dont l'écriture en base 3 ne ccontient que des 1 et des 0 (dans la suite

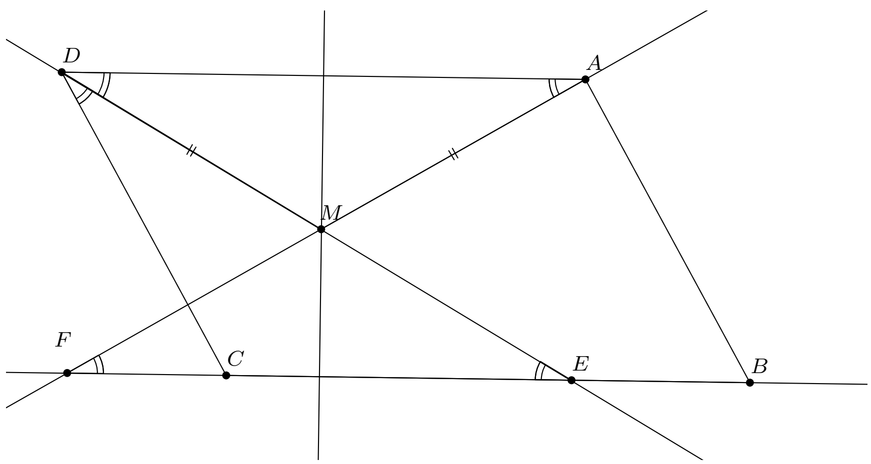
j'écrirai l'écriture en base 2 et 3 de la forme $\overline{11000}^2$ et $\overline{1101}^3$) : $4 = 3^1 + 3^0 = \overline{11}^3, 10 = 3^2 + 3^0 = \overline{101}^3, 13 = 3^2 + 3^1 + 3^0 = \overline{111}^3, \ldots$ Si on écrit tous les nombres de la liste en base 3 nous verrons tous les nombres qui peuvent s'écrire avec des 0 et des 1. Mais les nombres qui ne s'écrivent qu'avec des 0 et des 1 correspondent aux écriture binaires de tous les entiers. Il faut déterminer le 100ème de ces nombres : c'est celui qui correspond à l'écriture en binaire de 100.

$$100 = 64 + 32 + 4 = \overline{1100100}^2$$

$$\overline{1100100}^3 = 3^6 + 3^5 + 3^2 = 729 + 243 + 9 = 981$$

Le 100ème nombre de la liste est 981.

Solution de l'exercice 2 Commençons par faire la figure :



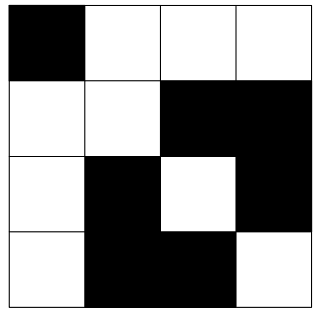
On commence par chercher plusieurs angles qui sont égaux à l'angle $\widehat{ADE}$. Déjà, comme DE est la bissectrice de l'angle $\widehat{D}$, $\widehat{ADE} = \widehat{EDC}$. Ensuite, comme AD et BC sont parallèles, les angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{DEC}$ sont alternes-internes et donc égaux. Enfin, comme M est sur la médiatrice de $[AD]$, le triangle ADM est isocèle en M et les angles à la base sont égaux, donc $\widehat{ADE} = \widehat{DAF}$, et par les angles alternes-internes $\widehat{DAF} = \widehat{AFB}$. Le triangles AMD est isocèle en M donc $MA = MD$ et le triangle MEF est aussi isocèle en M puisque les angles à la base sont égaux, donc $ME = MF$. On a donc bien $DE = DM + ME = AM + MF = AF$.

Considérons les deux triangles DMA et DCE : ils sont semblables, ils sont tous les deux isocèles avec le même angle à la base. Donc

$$\frac{DC}{DM} = \frac{DE}{DA} \implies DC \cdot DA = DE \cdot DM.$$

Et comme dans le parallèlogramme $DC = AB$ on a la relation voulue.

Solution de l'exercice 3 Nous allons montrer qu'il faut noircir au moins 7 cases. Tout d'abord, si on colorie les cases comme ceci :



alors on vérifie l'hypothèse de l'énoncé. En effet, essayons d'effacer deux lignes et deux colonnes pour que les quatres cases restantes soient blanches. Il faut effacer la case en haut à gauche, donc effaçons la première ligne (effacer la première colonne revient au même). Je vous laisse vérifier qu'ensuite il est impossible d'effacer une ligne et deux colonnes telles qu'il reste quatre cases blanches.

Maintenant supposons que l'on ait noirci 6 cases ou moins. Nous allons effacer les deux lignes où il y a le plus de cases noires. Combien de cases noires reste-t-il dans les lignes restantes ? Déjà il y en a moins que la moitié, donc 3 ou moins. Mais en plus il ne peut pas en rester 3, sinon cela fait une ligne de 2 et une ligne de 1, et dans celles qu'on a effacées il y en avait 3 donc une ligne de 2 et une ligne de 1, et aurait du effacer les deux lignes de 2. Il reste donc au plus 2 cases noires dans les lignes restantes, et on peut effacer les deux colonnes qui correspondent à ces deux cases et les cases qui restent seront toutes blanches.

Il est donc impossible d'avoir une configuration qui vérifie la condition de l'énoncé si on ne colorie que 6 cases. Il faut bien au moins 7 cases.

IV. Débutants

1 Mardi : Combinatoire

1 matin : Irène Marcovici

Principe des tiroirs

PRINCIPE DES TIROIRS - Si l'on range au moins $n+1$ objets dans n tiroirs, l'un des tiroirs (au moins) contiendra au moins deux objets. Et plus généralement, si l'on range au moins $kn+1$ objets dans ces mêmes n tiroirs, l'un des tiroirs (au moins) contiendra au moins $k+1$ objets.

Un exemple très simple : parmi 13 personnes, on peut en trouver 2 qui sont nées le même mois de l'année.

Un des premiers résultats mathématiques que l'on peut en déduire est que le développement décimal de la fraction $\frac{p}{q}$ est périodique, de période strictement inférieure à q. En effet, lorsqu'on pose la division, à chaque nouvelle décimale correspond un nouveau reste. Parmi q restes consécutifs, soit l'un est nul (et la division s'arrête, ce qui correspond à une période 1, puisque à partir d'un certain rang, toutes les décimales sont égales à 0), soit ces q restes sont tous entre 1 et $q-1$, ce qui prouve que deux d'entre eux au moins, r_i et r_j sont égaux. Comme chaque reste détermine toute la suite de la division, $r_i+1=r_j+1$, $r_i+2=r_j+2$... donc le développement décimal sera périodique, de période au plus $|i-j|<q$.

Exercice 1 Dans une assemblée de n personnes, certaines se connaissent et pas d'autres. Montrer que l'on peut trouver deux individus différents qui connaissent le même nombre de personnes dans l'assemblée.

Exercice 2 On a jeté de la peinture noire sur le sol blanc d'une pièce carrée de 2 mètres sur 2, n'importe comment. Montrer qu'il existe deux points de la même couleur dont la distance est exactement un mètre.

Exercice 3 On colorie le plan en trois couleurs. Montrer qu'il existe deux points d'une même couleur, distants d'exactement un mètre.

Exercice 4 Un grand carré 50×50 est colorié en petits carrés (de taille 1×1) rouges, jaunes, verts et bleus. Montrer qu'il existe un carré ayant au moins un carré de la même couleur au-dessus, en-dessous, à gauche, et à droite de lui (pas forcément adjacents).

Exercice 5 Montrer que, parmi $n+1$ nombres de l'ensemble $\{1, 2, \dots, 2n\}$, on peut en trouver deux dont l'un divise l'autre.

Exercice 6 Montrer que pour tout n, parmi $(n+1)$ entiers quelconques $a_0, a_1, \dots, a_n$, on peut en trouver deux a_i et a_j tels que $a_i - a_j$ soit divisible par n.

Exercice 7 Montrer que pour tout n, il existe un multiple de n d'au plus n chiffres, tous égaux à 0 ou à 1.

Notions sur les graphes

Un graphe G est formé de deux ensembles : un ensemble fini non vide S, appelé ensemble des sommets de G et un ensemble A de paires de sommets, appelé ensemble des arêtes de G. Dans la pratique, un graphe se représente par une figure plane contenant des traits reliant entre eux un ensemble fini de points. Le nombre d'arêtes issues d'un point x est appelé le degré de x, couramment désigné par $d(x)$.

Exercice 8 Pour tout graphe G, on a $\sum_{x \in S} d(x) = 2 \times \mathrm{Card}\ A$.

Exercice 9 La population d'un village se réunit un jour de fête. Chaque personne serre la main d'un certain nombre d'autres personnes. Prouver que le nombre de personnes ayant serré la main d'un nombre impair de personnes est pair.

Exercice 10 Prouver que dans toute soirée de 6 personnes, il y en a toujours trois qui se connaissent mutuellement ou trois qui ne se connaissent pas deux à deux.

Exercice 11 Dans un groupe de 17 personnes, deux quelconques sont toujours amies, ou ennemies, ou indifférentes l'une à l'autre (chacun de ces sentiments étant partagé par les deux personnes en question). Prouver qu'il existe un groupe de trois personnes qui ont deux à deux les mêmes sentiments les unes envers les autres.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1 On a envie de considérer comme tiroirs les entiers de 0 à $n-1$, et de mettre une personne de l'assemblée dans le tiroir qui correspond au nombre de personnes qu'elle connaît. Mais il y a n tiroirs, et n personnes, donc le principe des tiroirs ne s'applique pas. Heureusement, on remarque qu'il est impossible qu'il y ait à la fois une personne qui connaisse les $n-1$ autres, et une qui n'en connaisse aucune. Au plus $n-1$ tiroirs sont donc occupés, ce qui permet de conclure.

Solution de l'exercice 2 On considère un triangle équilatéral d'un mètre de côté, inclus dans le carré. D'après le principe des tiroirs, parmi les trois sommets, il y en a deux qui sont d'une même couleur.

Solution de l'exercice 3 On considère quatre points A, B, C, D tels que CDA et CDB soient des triangles équilatéraux de côté 1, avec $A \neq B$. Supposons que les deux points A et B, qui sont distants de $\sqrt{3}$, sont de couleurs différentes. Alors, soit l'un des deux a la couleur de C ou

D, soit C et D ont la même couleur. Dans tous les cas, on a trouvé deux points à distance 1 de même couleur. On peut donc supposer que deux points quelconques distants de $\sqrt{3}$ ont la même couleur, puisque sinon, la construction précédente (ajout de deux points C et D pour former deux triangles équilatéraux) fournit une solution. Dans ce cas, si O est un point fixé du plan, le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$ est unicolore, et il est clair que l'on peut trouver deux points à distance 1 sur ce cercle.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Il y a 2500 cases sur le carré, donc d'après le principe des tiroirs, au moins 625 carrés ont la même couleur, par exemple rouge. Parmi eux, au plus 50 sont les plus hauts de leur colonne, au plus 50 sont les plus bas de leur colonne, au plus 50 sont les plus à gauche de leur ligne, et au plus 50 sont les plus à droite de leur ligne. Cela laisse au moins 425 carrés qui conviennent.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Tout nombre a compris entre 1 et $2n$ s'écrit $a = 2^k(2s+1)$ où s est un entier entre 0 et $n-1$. Comme on considère $n+1$ nombres, le principe des tiroirs nous permet d'en trouver deux, appelons les a et b qui s'écrivent $a = 2^k(2s+1)$ et $b = 2^\ell(2s+1)$. Il est clair que l'un de ces deux nombres divise l'autre.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On classe les nombres selon leur reste pour la division euclidienne par n. Ce reste est compris entre 0 et $n-1$. Au moins deux entiers ont le même reste dans la division euclidienne par n, donc leur différence est divisible par n.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On utilise ce premier résultat avec la suite $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111\dots$ jusqu'à a_n, l'entier formé de n chiffres tous égaux à 1. Parmi ces nombres, deux d'entre eux ont une différence multiple de n, et cette différence a au plus n chiffres, tous égaux à 0 ou à 1.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Il suffit de voir que chaque arête relie deux sommets du graphe, et donc qu'elle est comptée exactement deux fois dans la somme de gauche.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> On considère le graphe dont les sommets sont les villageois, deux quelconques étant reliés par une arête si et seulement s'ils se sont serré la main. Soit S_i l'ensemble des villageois ayant serré la main d'un nombre impair de personnes, et S_p l'ensemble des villageois ayant serré la main d'un nombre pair de personnes. Il s'agit de prouver que $\mathrm{Card}\ S_i$ est pair. Or $\sum_{x\in S} d(x) = \sum_{x\in S_i} d(x) + \sum_{x\in S_p} d(x) = 2\times \mathrm{Card}\ A$, qui est un nombre pair. Comme $\sum_{x\in S_p} d(x)$ est pair (car pour $x \in S_p$, $d(x)$ est pair), on en déduit que $\sum_{x\in S_i} d(x)$ est pair aussi. Mais pour $x \in S_i$, $d(x)$ est impair, donc pour que cette somme soit paire, il faut qu'il y ait un nombre pair de termes. Conclusion : $\mathrm{Card}\ S_i$ est pair.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> On considère le graphe complet dont les sommets sont les personnes, et les arêtes entre deux personnes qui se connaissent sont en bleu, et celles entre deux personnes qui ne se connaissent pas sont en rouge. La question est alors de prouver qu'il existe un triangle monochromatique. Or, si A est une personne fixée, parmi les 5 arêtes d'extrémité A, le principe des tiroirs assure qu'au moins trois sont d'une même couleur, disons qu'il s'agit de la couleur bleue (le raisonnement s'adapte sans difficulté à l'autre cas) et que les personnes sont B, C, D. Alors, soit l'une des trois arêtes reliant B, C et D est bleue, et avec A, on forme ainsi un triangle bleu. Soit ces trois arêtes sont rouges, et forment alors un triangle rouge.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> On construit le graphe complet à 17 sommets, et on colorie une arête en rouge, en vert ou en bleu selon qu'elle relie deux personnes qui sont amies, ennemies ou indifférentes. Soit A un sommet arbitraire. Il est de degré 16 et donc, d'après le principe des

tiroirs, au moins 6 des arêtes d'extrémité A sont d'une même couleur, disons rouge. Si deux de ces 6 sommets reliés à A par une arête rouge sont eux-mêmes reliés par une arête rouge, on a trouvé notre groupe de trois. Dans le cas contraire, on a donc 6 sommets reliés deux à deux par des arêtes coloriées par seulement deux couleurs (vert et bleu). On a vu précédemment qu'une telle configuration contenait nécessairement un triangle monochromatique, ce qui permet de conclure.

2 après-midi : François Lo Jacomo

Récurrence

Le principe de récurrence est une propriété fondamentale des entiers naturels, qui sert dans bien des domaines des mathématiques, pas seulement en combinatoire.

Si une propriété $P(n)$ fonction de n est vraie pour un premier entier n_0 et vérifie : pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ vraie entraîne $P(n+1)$ vraie, alors la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Le n_0 initial peut être 0, mais pas obligatoirement. L'important est de dissocier les deux parties de la démonstration : l'initialisation, souvent la plus facile, à savoir prouver que$P(n_0)$ est vraie. Et la récurrence proprement dite, à savoir prouver que si $P(n)$ est vraie, $P(n+1)$ est vraie.

Une variante de ce principe de récurrence s'énonce ainsi :

Lorsqu'une propriété $P(n)$ fonction de n est vraie pour un premier entier n_0 et vérifie : pour tout $n \geq n_0$, si $P(k)$ est vraie lorsque $n_0 \leq k \leq n$, alors $P(n+1)$ vraie, cette propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.

Exercice 1

Soit x un nombre réel tel que $x + \frac{1}{x}$ soit un entier. Montrer que pour tout entier $n > 0$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier.

Exercice 2

On considère la suite de Fibonacci (F_n) définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 2$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$. Et on appelle Φ le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, solution de l'équation : $\Phi^2 = \Phi + 1$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, $F_{n+1} = \Phi F_n + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n$.

Exercice 3

On trace n cercles dans le plan tels que deux d'entre eux ne soient jamais tangents. Montrer que l'on peut colorier chacune des régions du plan ainsi délimitées en bleu ou rouge de telle sorte que deux régions séparées par un arc de cercle soient toujours de couleur différente.

Exercice 4

On considère $2n$ points du plan, $n \geq 2$, et on suppose construits $n^2 + 1$ segments entre ces points. Montrer que la configuration obtenue contient au moins un triangle.

Invariants

Les invariants s'appliquent à l'étude de processus faisant passer un système d'un état à un autre. On réitère le processus un nombre indéfini de fois, et on cherche à savoir s'il est possible, à partir d'un état initial donné, d'atteindre un état final donné. Les techniques de démonstration sont très différentes selon que la réponse à cette question est "oui" ou "non". Pour prouver que c'est possible, il faut construire explicitement la succession de processus qui conduit de l'état initial à l'état final. Pour prouver que c'est impossible, l'une des possibilités est de trouver quelque chose qui ne varie pas quand on applique le processus. Si la valeur de ce quelque chose est différente dans l'état initial donné et l'état final qu'on cherche à atteindre, c'est que celui-ci ne sera jamais atteint, car autant de fois qu'on réitère le processus, l'invariant aura toujours la même valeur que dans l'état initial. C'est cette technique que nous allons mettre en pratique sur des exemples.

Exercice 5

Sur le tableau sont écrits tous les entiers de 1 à 2012. J'en choisis deux au hasard, je les efface et les remplace par leur différence. Je recommence l'opération jusqu'à ce qu'il ne reste qu'un seul entier. Ce dernier entier restant peut-il être 1 ?

Exercice 6

Sur le tableau sont écrits les trois nombres : $2, 3, 4$. On répète un nombre indéfini de fois l'opération suivante : on choisit deux quelconques des nombres écrits sur le tableau, a et b, on efface le troisième et on le remplace par $a + b - 1$.

a) Peut-on, après un certain nombre d'opérations, avoir sur le tableau : $6, 9, 14$?

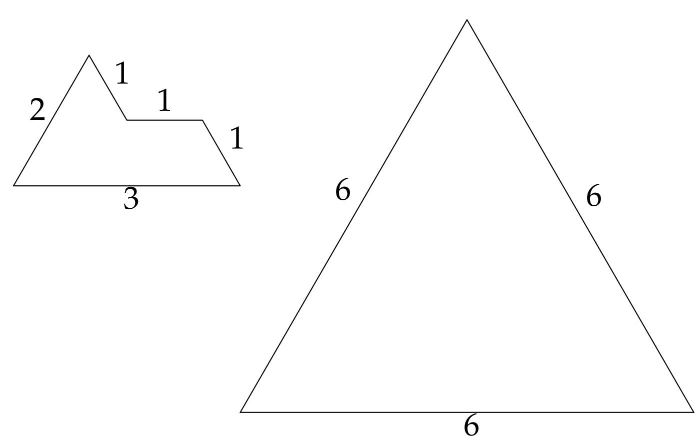
b) Peut-on avoir : $101, 102, 103$?

c) Peut-on avoir : $101, 103, 105$?

Exercice 7

On considère un tableau carré 4×4 de 16 cases. Sur la case en haut à droite, je place un signe $-$, sur toutes les autres un signe $+$. Je répète un nombre indéfini de fois l'opération consistant à changer tous les signes d'une même ligne, d'une même colonne ou d'une même diagonale. Peut-on, au bout d'un certain nombre d'opérations, n'avoir que des signes $+$ dans le tableau ?

Exercice 8



On considère un triangle équilatéral de côté 6. Peut-on paver ce triangle avec des sphinx ?

Solutions

Solution de l'exercice 1

La relation qui permettra de passer de l'hypothèse de récurrence à la conclusion est le fait que si $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier, comme $x + \frac{1}{x}$ est entier par hypothèse, le produit : $\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^{n+1} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{x^{n+1}}$ est lui aussi entier. Mais pour en conclure que $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ est un entier, il faut savoir que $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ est également un entier.

Dès lors, l'hypothèse de récurrence à utiliser est que $x^n + \frac{1}{x^n}$ et $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ sont tous deux entiers, il faut prouver que cela entraîne : $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ et $x^n + \frac{1}{x^n}$ sont tous deux entiers, ce qui découle du calcul précédent, et l'initialisation doit se faire sur deux valeurs : $x^1 + \frac{1}{x^1}$ est entier (par hypothèse) et $x^0 + \frac{1}{x^0} = 1 + 1 = 2$ est entier, ce qui est vrai quel que soit x. On en déduit, par récurrence, que pour tout $n \geq 1$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ et $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ sont tous deux entiers.

Solution de l'exercice 2

On peut initialiser notre récurrence à $n = 0$: $F_0 = 0$ donc $F_1 = 1 = \Phi F_0 + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^0$. Si maintenant (hypothèse de récurrence) $F_{n+1} = \Phi F_n + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = (\Phi+1)F_n + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n$. Or on doit prouver que $F_{n+2} = \Phi F_{n+1} + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n+1}$. Le membre de droite de cette égalité à démontrer vaut : $\Phi\left[\Phi F_n + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n\right] + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^{n+1} = \Phi^2 F_n + \left(-\frac{1}{\Phi}\right)^n\left(\Phi - \frac{1}{\Phi}\right)$. C'est bien égal au membre de gauche qui a été calculé plus haut, dans la mesure où $\Phi^2 = \Phi + 1$ et : $\Phi - \frac{1}{\Phi} = \frac{\Phi^2 - 1}{\Phi} = 1$. Ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 3

Initialisons la récurrence pour $n = 1$: si l'on colorie en bleu l'intérieur de l'unique cercle et en rouge son extérieur, la condition de l'énoncé est satisfaite. Supposons maintenant qu'on ait $n+1$ cercles. Cachons en un, et colorions les régions délimitées par les n autres comme le veut l'énoncé : l'hypothèse de récurrence dit que c'est possible. Le $(n+1)$ème cercle va couper en deux un certain nombre de régions déjà coloriées : si l'on change les couleurs des régions intérieures à ce dernier cercle, et conserve les couleurs des régions extérieures à ce cercle, on satisfait la condition de l'énoncé. En effet, si deux régions sont séparées par un arc de cercle, soit c'est un arc du $(n+1)$ème cercle, et les régions délimitées sont de couleurs différentes (on a changé la couleur de la région intérieure à ce dernier cercle), soit c'est un arc d'un autre cercle, et c'est l'hypothèse de récurrence qui permet d'affirmer que les régions sont de couleur différente. D'où le résultat.

Solution de l'exercice 4

Initialisons la récurrence pour $n = 2$: quatre points sont reliés par six segments en tout. Si l'on en construit cinq, cela signifie qu'un seul n'est pas construit, appelons-le AB. Si C et D sont les deux autres points, tous les côtés du triangle ACD ou BCD sont bien construits : on a donc au moins un triangle (et même deux). Considérons maintenant $2n+2$ points reliés et $(n+1)^2 + 1$ segments entre ces points. Soit AB l'un de ces segments. Soit C l'un des $2n$ points restants : si les segments CA et CB existent, nous avons le triangle ABC et le problème est résolu. Il reste à le résoudre dans le cas où de tout point C parmi les $2n$ restants, il existe au plus un segment (éventuellement zéro) d'extrémités C et (A ou B). Dans ce cas, parmi les $(n+1)^2 + 1$ segments, au plus $2n+1$ ont pour l'une des extrémités A ou B. Les $(n+1)^2 + 1 - (2n+1) = n^2 + 1$ restants ont leurs deux extrémités parmi les $2n$ points, donc d'après l'hypothèse de récurrence, ils forment au moins un triangle. L'hypothèse de récurrence, pour $2n$ points, entraîne bien qu'au rang suivant, pour $2n+2$ points et $(n+1)^2+1$ segments tracés, il existe un triangle. Donc le résultat est démontré pour tout n.

Solution de l'exercice 5

Le dernier entier ne peut pas être 1 : nous allons chercher un invariant pour le prouver. La somme des entiers écrits sur le tableau est toujours de même parité. En effet, si j'efface deux entiers a et b de somme paire, leur différence $|a-b|$ est elle aussi paire, donc en remplaçant a et b par $|a-b|$ je ne change pas la parité de la somme de tous les nombres sur le tableau. De même si $a+b$ est impair, car alors $|a-b|$ est lui aussi impair. Or la somme des entiers compris entre 1 et n vaut : $\frac{n(n+1)}{2}$, ce qui est pair pour $n = 2012$ (situation initiale). Je pourrai répéter le processus autant de fois que je veux, j'aurai toujours sur le tableau des nombres dont la somme est paire. Donc lorsqu'il ne restera plus qu'un nombre, celui-ci sera nécessairement pair, il ne pourra pas être 1.

Au début d'une telle démonstration, il faut deviner si la réponse est "oui" ou si elle est "non". Si l'on part sur une fausse piste, en cherchant à démontrer l'impossibilité alors que c'est possible ou la possibilité alors que c'est impossible, non seulement le raisonnement n'aboutit pas, mais on gaspille énormément de temps avant de s'apercevoir qu'on aurait dû choisir l'autre réponse. Si au lieu des nombres de 1 à 2012 j'avais choisi les nombres de 1 à 2014 par exemple, il aurait été possible d'atteindre 1 car l'invariant ci-dessus est impair tout comme 1. On remplaçait 1 et 2 par 1, 3 et 4 par 1, ... $2n-1$ et $2n$ par 1 ... jusqu'à 2013 et 2014 par 1, il reste alors 1007 nombres 1, que l'on élimine en les groupant deux par deux jusqu'à ce qu'il n'en reste plus qu'un. Si l'on prend les entiers de 1 à 2013, c'est également possible mais le processus est moins facile à expliciter. Si l'on cherche à atteindre 0 comme dernier entier, c'est possible avec les entiers de 1 à 2012 mais pas avec ceux de 1 à 2013 ou 2014.

Solution de l'exercice 6

La réponse au a) est "oui". En effet, si l'on choisit 3 et 4, on remplace 2 par 6. Puis on choisit 6 et 4 et on remplace 3 par 9. Enfin on choisit 6 et 9 et on remplace 4 par 14.

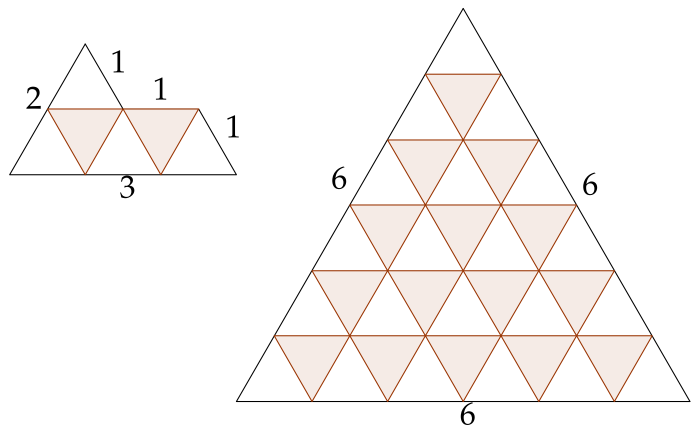
Pour b) et c), la réponse est "non". Plusieurs possibilités de démonstration : pour b), on peut remarquer que la somme des 3 nombres est nécessairement impaire, car $a+b+(a+b-1) = 2a+2b-1$ est impair, alors que $101+102+103$ est pair. Pour c), mais cela marchait également pour b), on peut dire que, sur le tableau, on aura toujours un nombre impair et deux nombres pairs (l'invariant est donc le nombre de nombres impairs). En effet, si je choisis deux nombres pairs a et b, je remplace le troisième, impair, par $a+b-1$ impair. Si je choisis un pair et un impair a et b, je remplace le troisième, pair, par $a+b-1$ pair.

Mais on peut aussi le démontrer sans utiliser d'invariant. A chaque étape, on passe de trois nombres : a, b, c à : $a, b, a+b-1$. Donc l'un des nombres est obligatoirement égal à la somme des deux autres moins 1. Or ce n'est manifestement pas le cas de $101, 102, 103$ ni même de $101, 103, 105$. En revanche, c'est le cas par exemple de $101, 201, 301$, de sorte que cette dernière méthode ne permettrait pas de prouver qu'on ne peut pas atteindre $101, 201, 301$ alors que l'invariant (nombre de nombres impairs) permet de le prouver. Chaque méthode a ses limites.

Solution de l'exercice 7

Une fois de plus, on a un invariant de parité. Le nombre de $+$ dans le tableau est toujours de même parité. En effet, en échangeant les signes d'une colonne, d'une ligne ou d'une diagonale, donc en changeant quatre signes, je remplace soit quatre $+$ par zéro $+$, soit trois $+$ par un $+$, ... soit k $+$ par $4-k$ $+$... donc la parité du nombre total de $+$ reste inchangée. S'il y a, comme c'est le cas dans la position initiale de l'exercice, un nombre impair de $+$ au départ, il y en aura toujours un nombre impair, donc jamais les seize cases ne pourront être toutes des $+$.

Solution de l'exercice 8



Non ! Le triangle équilatéral de côté 6 peut être découpé en 36 petits triangles équilatéraux de côté 1, mais 21 d'entre eux sont pointe en haut et les 15 autres pointe en bas. Un sphinx couvre six triangles équilatéraux, mais quatre d'une orientation et deux d'une autre orientation. Quelle que soit sa position, il couvrira un nombre pair de triangles pointe en haut et un nombre pair de triangles pointe en bas. Donc on ne peut paver par des sphinx qu'une surface ayant en tout un nombre pair de triangles pointe en haut et un nombre pair de triangles pointe en bas, ce qui n'est pas le cas de notre triangle équilatéral de côté 6.

2 Mercredi : Arithmétique

1 matin : Vincent Jugé

Exercice 1

Soit n et m deux entiers. Montrer que 9 divise $2n + 5m$ si et seulement si 9 divise $5n + 8m$.

Exercice 2

Trouver les entiers n tels que $n - 1$ divise $n^2 + 2$.

Exercice 3

Soit n un entier. La fraction $\frac{3n+10}{4n+13}$ est-elle nécessairement sous forme irréductible ?

Exercice 4

Trouver les entiers n tels que la fraction $\frac{3n+10}{5n+16}$ soit sous forme irréductible.

Exercice 5

Soit a, b et c trois entiers naturels, avec $c \geq 1$. Montrer que a divise b si et seulement si a^c divise b^c.

Exercice 6

Soit n un entier naturel. Montrer que $\sqrt{n}$ est soit un entier naturel, soit un irrationnel.

Exercice 7

Soit n un entier naturel non nul. Montrer qu'il existe un nombre premier p tel que $p+1, p+2, \ldots, p+n$ soient tous composés.

Exercice 8

Quel est le plus petit entier naturel n tel que l'écriture de $n!$ en base 10 se termine par dix zéros ?

Exercice 9

Soit n un entier naturel et $F_n = 2^{2^n} + 1$. Montrer qu'il existe au moins $n+1$ nombres premiers inférieurs ou égaux à F_n.

Solutions

Solution de l'exercice 1 Si 9 divise $2n+5m$, alors 9 divise $7 \times (2n+5m) - 9 \times (n+3m) = 5n+8m$. Réciproquement, si 9 divise $5n+8m$, alors 9 divise $4 \times (5n+8m) - 9 \times (2n+3m) = 2n+5m$.

Solution de l'exercice 2

Si $n-1$ divise n^2+2, alors $n-1$ divise $(n^2+2)-(n+1)\times(n-1) = 3$, donc $n-1 \in \{-3,-1,1,3\}$ et $n \in \{-2,0,2,4\}$. Réciproquement,

- si $n=-2$, alors $n-1=-3$ divise $n^2+2=6$;
- si $n=0$, alors $n-1=-1$ divise $n^2+2=2$;
- si $n=2$, alors $n-1=1$ divise $n^2+2=6$;
- si $n=4$, alors $n-1=3$ divise $n^2+2=18$.

Donc $n-1$ divise n^2+2 si et seulement si $n \in \{-2,0,2,4\}$.

Solution de l'exercice 3

On sait que la fraction $\frac{3n+10}{4n+13}$ est irréductible si et seulement si $\mathrm{PGCD}(3n+10, 4n+13) = 1$. Or, l'algorithme d'Euclide nous indique que

$$\begin{aligned}
\mathrm{PGCD}(3n+10, 4n+13) &= \mathrm{PGCD}(3n+10, n+3) \\
&= \mathrm{PGCD}(1, n+3) \\
&= 1
\end{aligned}$$

On en conclut donc que, quel que soit l'entier n considéré, la fraction $\frac{3n+10}{4n+13}$ est irréductible.

Solution de l'exercice 4

On sait que la fraction $\frac{3n+10}{5n+16}$ est irréductible si et seulement si $\mathrm{PGCD}(3n+10, 5n+16) = 1$. Or, l'algorithme d'Euclide nous indique que

$$\begin{aligned}
\mathrm{PGCD}(3n+10, 5n+16) &= \mathrm{PGCD}(3n+10, 2n+6) \\
&= \mathrm{PGCD}(n+4, 2n+6) \\
&= \mathrm{PGCD}(n+4, 2) \\
&= \mathrm{PGCD}(n, 2)
\end{aligned}$$

On en conclut donc que la fraction $\frac{3n+10}{5n+16}$ est irréductible si et seulement si

$\mathrm{PGCD}(n, 2) = 1$, c'est-à -dire si et seulement si n est impair.

Solution de l'exercice 5

Tout d'abord, si a divise b, soit k l'entier tel que $b = ak$. Alors $b^c = a^c k^c$, donc a^c divise b^c. Réciproquement, si a^c divise b^c, écrivons a et b comme produits de facteurs premiers : $a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(a)}$ et $b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{v_p(b)}$. Alors $a^c = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{cv_p(a)}$ divise $b^c = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{cv_p(b)}$ donc, pour tout nombre premier p, on a $cv_p(a) \leq cv_p(a)$, ou encore $v_p(a) \leq v_p(b)$. Cela montre que a divise b.

Solution de l'exercice 6

Supposons que $\sqrt{n}$ ne soit ni un entier naturel ni un irrationnel. Puisque $\sqrt{n}$ est positif ou nul, c'est donc un rationnel non entier, que l'on peut écrire sous la forme $\sqrt{n} = \frac{p}{q}$, avec $p \geq 1$, $q \geq 2$ et $\mathrm{PGCD}(p, q) = 1$. En élevant cette égalité au carré, on en déduit que $n = \frac{p^2}{q^2}$, c'est-à -dire $q^2 n = p^2$. Cela montre que q^2 divise p^2, donc que q divise p, et même que q divise $\mathrm{PGCD}(p, q) = 1$. Cette dernière remarque contredit le fait que $q \geq 2$, ce qui montre que notre supposition initiale était fausse. $\sqrt{n}$ est donc soit un entier naturel, soit un irrationnel.

Solution de l'exercice 7

On montre d'abord que les entiers $(n+1)! + 2, (n+1)! + 3, \ldots, (n+1)! + (n+1)$ sont tous composés. En effet, pour tout entier $k \in \{2, 3, \ldots, n+1\}$, $k \leq n+1$ donc k divise $(n+1)!$ et k divise aussi $(n+1)! + k$. En outre, $k \leq (n+1) < (n+1)! + k$, donc k est un diviseur strict de $(n+1)! + k$, qui se retrouve être un nombre composé. Maintenant, soit p le plus grand nombre premier inférieur ou égal à $(n+1)! + 1$. Un tel nombre premier existe bien, puisque $2 \leq (n+1)! + 1$ est un nombre premier. Or, quand $1 \leq l \leq n$, l'entier $p + l$ est compris entre $p + 1$ et $(n+1)! + (n+1)$: si $p + l \leq (n+1)! + 1$, alors $p + l$ est composé, par maximalité de p ; si $(n+1)! + 2 \leq p + l$, on a montré ci-dessus que $p + l$ était composé aussi. L'entier p est donc bien un nombre premier tel que $p + 1, p + 2, \ldots, p + n$ soient tous composés.

Solution de l'exercice 8

On cherche le plus petit entier $n \geq 0$ tel que 10^{10} divise $n!$, c'est-à -dire tel que $v_2(n!) \geq 10$ et $v_5(n!) \geq 10$. D'après la formule de Legendre, on sait que $v_2(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{2^i} \right\rfloor$ et que $v_5(n!) = \sum_{i=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor$. En particulier, notons que $v_2(n!) \geq v_5(n!)$, de sorte qu'il nous suffit de trouver le plus petit entier $n \geq 0$ tel que $v_5(n!) \geq 10$. Remarquons alors que, si k est un entier et si $0 \leq l \leq 4$, alors $v_5((5k)!) = v_5((5k+l)!)$: on peut chercher n sous la forme $n = 5k$. Cela rend alors possible une recherche "à la main", où l'on trouve que $n = 45$. Vérifions-le en quelques lignes :

- $v_5(45!) \geq \left\lfloor \frac{45}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{45}{25} \right\rfloor = 10$ et
- si $n \leq 44$, alors $\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor \leq 8$, $\left\lfloor \frac{n}{25} \right\rfloor \leq 1$ et $\left\lfloor \frac{n}{5^i} \right\rfloor = 0$ si $i \geq 3$, donc $v_5(n!) \leq 9$.

L'entier naturel recherché était donc $n = 45$.

Solution de l'exercice 9

Pour tout entier naturel $k \leq n$, remarquons que $F_k \geq 3$: soit p_k le plus petit facteur premier de F_k. Nous allons montrer que les nombres premiers p_k sont distincts deux à deux. En effet, supposons que $p_a = p_b$, où $0 \leq a < b \leq n$. En vertu de l'identité $F_n(F_n - 2) = F_{n+1} - 2$, on montre par récurrence sur b que $F_b - 2 = (F_a - 2) \prod_{i=a}^{b-1} F_i$. En particulier, cela montre que F_a divise $F_b - 2$, donc que p_a divise à la fois F_b et $F_b - 2$, et donc que p_a divise 2. Or, F_a est impair, donc p_a ne peut diviser 2 : notre supposition était fausse, et les nombres premiers p_k sont bien distincts deux à deux. En outre, chaque nombre premier p_k est inférieur ou égal à F_k, donc à F_n. Cela montre bien qu'il existe au moins $n + 1$ nombres premiers inférieurs ou égaux à F_n.

2 après-midi : Antoine Taveneaux

Exercice 1

On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$.

Combien y a-t-il de 0 à la fin de $100!$? et à la fin de $1000!$?

Exercice 2

Trouver un nombre dont l'écriture décimale utilise 100 chiffres et qui ne contient pas 0 et tel qu'il soit divisible par la somme de ses chiffres.

Exercice 3

Résoudre l'équation

$$x^2 + 30 = y^2$$

Dans les nombres entiers

Exercice 4

Quel est le PGCD de tous les nombres de la forme $i \times (i+1) \times (i+2)$ avec $i \geq 1$ (on cherche le plus grand diviseur commun à tous ces nombres).

Exercice 5

Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ la fraction $\frac{2n^2+11n-18}{n+7}$ est-elle irréductible ?

Exercice 6

Montrer qu'un nombre est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres dans la décomposition en base 10 de ce nombre est divisible par 3. Montrer ensuite le même résultat pour 9.

Exercice 7

Montrer que parmi 2008 nombres, on peut toujours en trouver dont la somme est divisible par 2008 (une somme peut éventuellement n'être constituée que d'un seul nombre).

Exercice 8

Écrire sous forme d'une fraction (si possible) le nombre :

$$x = 0,512341234123412341234123412341234123412341234\ldots$$

Pouvez-vous généraliser cette méthode à tous les nombres réels avec un développement périodique ? Et réciproquement ?

Exercice 9

On appelle addichiffrer un nombre le fait d'additionner tous les chiffres d'un nombre. Par exemple, lorsqu'on addichiffre 124, on trouve 1+2+4=7.

Qu'obtient-on lorsqu'on addichiffre 1998^{1998} puis qu'on addichiffre le résultat obtenu et ainsi de suite trois fois de suite ?

Exercice 10

Montrer que le produit de 5 nombres consécutifs ne peut pas être un carré.

Exercice 11

Il y a 40 passagers dans un bus. Ils ont sur eux des pièces de monnaie de 10, 15 et 20 euros. Ils ont en tout 49 pièces de monnaie. Le prix du ticket d'autobus est égal à 5 euros. Montrer qu'il est impossible que tout le monde paye le prix du ticket et obtienne la monnaie en retour.

Exercice 12

Trouver tous les entiers n tels que $2^n + 3$ est un carré parfait. Même question avec $2^n + 1$.

Exercice 13

Si p est un nombre premier tel que $p^2 + 2$ soit premier montrer alors que $p^3 + 2$ est aussi un nombre premier.

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

Il y a plus de multiple de 2 que de multiple de 5 (et plus de multiple de 2^2 que de multiple de 5^5 etc) dans les nombre entre 1 et 100 (ou 1000). Donc il suffit d'évaluer la puissance de 5 dans la décomposition en facteur premier de $100!$ ou $1000!$. Le nombre de multiple de 5 entre 1 et 1000 est $1000/5 = 200$, le nombre de multiple de 5^2 est $1000/(5^2) = 40$, le nombre de multiple de 5^3 est $1000/5^3 = 8$ et le nombre de multiple de 5^4 est la partie entière de $1000/5^4$ qui est 1. La puissance de 5 dans $1000!$ est donc :

$$200 + 40 + 8 + 1 = 249$$

De même, la puissance de 5 dans $100!$ est :

$$20 + 4 = 24$$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

Un nombre qui se termine par 125 est divisible par 125.

Donc il suffit de compléter 125 par 97 premiers chiffres de sorte que la somme des 100 chiffres soit 125. Par exemple $1 \dots 111599125$ vérifie la propriété.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>

L'équation est

$$(x - y)(x + y) = x^2 - y^2 = 30$$

Donc un seul des facteur $(x + y)$ ou $(x - y)$ doit être pair. Mais c'est impossible car $(x + y) + (x - y) = 2x$.

Donc il n'y a pas de solution à cette equation.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

Pour $i = 1$ on a $i \times (i + 1) \times (i + 2) = 6$. Donc le PGCD doit être inférieur à 6.

Mais parmi trois nombres consécutifs on a toujours un multiple de 2 et un multiple de trois donc $i \times (i + 1) \times (i + 2)$ est toujours un multiple de 6.

Le PGCD des nombres $i \times (i + 1) \times (i + 2)$ pour $i \geq 1$ est exactement 6.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

On veut calculer le PGCD de $2n^2 + 11n - 18$ et de $n + 7$, essayons donc l'algorithme d'Euclide :

$$2n^2 + 11n - 18 = (n + 7) \times (2n - 3) + 3$$

Donc le PGCD recherché est un diviseur de 3. Mais 3 divise $n+7$ ssi $n \equiv 2 \pmod 3$. Donc si $n \equiv 0 \pmod 3$ ou $n \equiv 1 \pmod 3$, alors la fraction est irréductible. Inversement, on vérifie que si $n \equiv 2 \pmod 3$ alors la fraction peut être simplifiée par 3.

Solution de l'exercice 6

Soit n un entier naturel et a_1, a_2 et a_k les chiffres de la décomposition de n en base 10 (c'est-à-dire que pour tout i on a $0 \leq a_i \leq 9$ et $n = a_0 10^0 + a_1 10^1 + \cdots + a_k 10^k$). On a donc :

$$n = 9\left[a_1 1 + a_2 11 + \cdots + a_k 11\ldots 11\right] + a_0 + a_1 + \cdots + a_k$$

Donc n est divisible par 9 si et seulement si $a_0 + a_1 + \cdots + a_k$ est divisible par 9.

La preuve précédente est exactement la même pour 3.

Solution de l'exercice 7

On note $a_1, a_2, ..., a_{2008}$ les nombres. On considère alors les sommes :
$S_1 = a_1$
$S_2 = a_1 + a_2$
$\vdots$
$S_{2008} = a_1 + a_2 + ... + a_{2008}$
Deux cas sont alors possibles :
- soit une de ces sommes est divisible par 2008, alors on a fini.
- sinon ces sommes ont au plus 2007 restes possibles par division euclidienne, alors il existe S_i et S_j différents (on suppose par exemple $i < j$), tel que $S_i \equiv S_j (\mathrm{mod}\ 2008)$. On a donc $S_j - S_i = s_{i+1} + ... + s_j \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 2008)$ et on a donc le résultat souhaité.

Solution de l'exercice 8

On a

$$10x = 5,12341234123412341234123412341234\ldots \quad \text{et}$$

$$100000x = 51234,12341234123412341234123412341234\ldots$$

Donc $100000x - 10x = 99990x = 51229$ et finalement :

$$x = \frac{51229}{99990}$$

qui est irréductible. Cette méthode se généralise facilement et montre que tout nombre qui admet un développement décimal périodique peut s'écrire sous forme d'une fraction. Et réciproquement, dans le calcul du développement décimal on a seulement un nombre fini de restes et donc le développement décimal d'une fraction est nécessairement périodique.

Solution de l'exercice 9

1998 et 1998^{1998} sont des multiples de 9 et donc leurs addichiffres le sont aussi. Par récurrence tous les addichiffres obtenus par une répétition d'opérations d'addichiffre à partir de 1998^{1998} sont multiples de 9.

De plus :

$$1998^{1998} \leq 2000^{1998} = (2.1000)^{1998} = 2^{1998} 10^{3.1998} = 2^{1998} 10^{5994}$$

et on sait que $2^9 = 512 < 10^3$ et donc $2^{1998} = 2^{9.222} < 10^{3.222} = 10^{666}$ et donc $1998^{1998} < 10^{5994+666} = 10^{6660}$. Donc l'addichiffre de 1998^{1998} est inférieur à $9.6660 = 59940$. L'addichiffre d'un nombre inférieur à 59940 est nécessairement inférieur à $5 + 9.4 = 41$. L'addichiffre d'un nombre inférieur à 41 est inférieur à $4 + 9 = 13$ et comme cet addichiffre est multiple de 9 et non nul ce nombre est nécessairement 9.

Solution de l'exercice 10

Supposons que a, b, c, d, e soient des entiers strictement positifs consécutifs tels que $a.b.c.d.e$ soient le carré d'un entier.

Si un des nombres contient un facteur premier supérieur à 5, alors, nécessairement ce facteur doit avoir un exposant pair, car il n'apparait que dans un seul des nombres du produit. Ainsi selon la puissance des facteurs 2 et 3 dans chaque nombre, chacun des nombres a, b, c, d, e est :

1. un carré parfait ou,
2. deux fois un carré parfait ou,
3. trois fois un carré parfait ou,
4. six fois un carré parfait.

D'après le principe des tiroirs, il existe au moins 2 nombres dans la même catégorie. Si les deux nombres sont tous les deux dans le cas 2, 3 ou 4 alors leur différence est au moins 6, ce qui est impossible car a, b, c, d, e sont des entiers consécutifs. Si les deux nombres sont dans le cas 1, alors il sont tous les deux des carrés parfaits. Il est donc impossible que e dépasse 5 car les seuls carrés qui sont à une distance inférieure à 5 sont 1 et 4, or $1.2.3.4.5 = 120$ et 120 n'est pas un carré. Il est donc impossible que le produit de 5 nombres consécutifs strictement positifs soit un carré parfait.

Remarque : Paul Erdös a montré que le produit de $k > 1$ nombres consécutifs n'est jamais un carré.

Solution de l'exercice 11

Le prix total des quarante tickets est 200 euros. Supposons le problème possible. Après avoir réglé les comptes entre eux pour faire l'appoint, chaque passager a récupéré au moins une pièce. Le règlement des tickets a donc nécessité au plus 9 pièces. Mais $9.20 = 180 < 200$.

Solution de l'exercice 12

Un carré n'est jamais congru à 3 modulo 4 (si vous ne me croyez pas, essayez vous verrez !), donc $2^n + 3$ ne peut pas être un carré si $n \geq 2$. Et si $n = 1$ alors $2^1 + 3 = 5$ n'est pas un carré et si $n = 0$ alors $2^0 + 3 = 4$ est un carré. La deuxième question est moins facile. On cherche n et x, deux entiers, tels que $2^n + 1 = x^2$. Autrement dit :

$$2^n = x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

donc $x+1$ et $x-1$ sont tous les deux des puissances de 2. Les seules puissances de 2 à distance 2 sont 2 et 4 donc $2^n = (x-1)(x+1) = 2.4 = 8$ donc $n = 3$ est la seule solution.

Solution de l'exercice 13

Si $p = 3$ alors $p^2 + 2 = 11$ et $p^3 + 2 = 29$ sont premiers.

Si $p \neq 3$ alors $p^2 + 2$ est divisible par 3 et donc $p^2 + 2$ n'est jamais premier.

3 Jeudi : Géométrie

1 matin : Jean-François Martin

Chasse aux angles

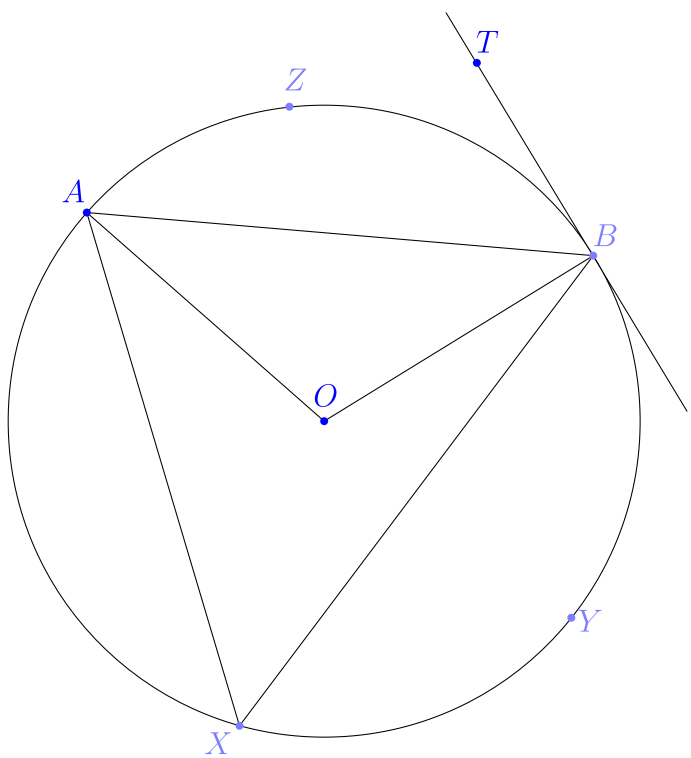
Théorème 1 (Angles inscrits - au centre)

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O, A et B deux points sur ce cercle, X, Y sur le grand arc AB, Z sur le petit. Soit T sur la tangente passant par B et du côté du petit arc AB.

Alors, $\widehat{AXB} = \widehat{AYB} = \widehat{ABT} = 180° - \widehat{AZB} = 1/2 \cdot \widehat{AOB}$.

Réciproquement, si l'une de ces égalités est vérifiée, on peut trouver le cercle $\mathcal{C}$.

Démonstration



$\widehat{AOB} = 180° - \widehat{OAB} - \widehat{OBA} = \widehat{OAX} + \widehat{AXB} + \widehat{OBX} = \widehat{AXO} + \widehat{AXB} + \widehat{BXO} = 2 \cdot \widehat{AXB}$.

On peut également appliquer ce théorème de l'angle au centre pour $\widehat{AYB}$, d'où le théorème de l'angle inscrit. La version "angles supplémentaires" se démontre de même en utilisant des angles orientés. Enfin, pour la tangente, il suffit de faire tendre Y vers B.

La réciproque se démontre par unicité. Par exemple, si on a $\widehat{AXB} = \widehat{AYB}$, on considère l'intersection Y' de (AY) avec le cercle circonscrit de AXB. De par le sens direct, $\widehat{AY'B} = \widehat{AXB} = \widehat{AYB}$ d'où $Y = Y'$.

Exercice 1

Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles de centres O_1 et O_2 s'intersectant en P et Q. Soient U sur $\mathcal{C}_1$ et V sur $\mathcal{C}_2$ tels que U, P et V soient alignés. Montrer que $\widehat{UQV} = \widehat{O_1QO_2}$.

Exercice 2

Soit ABC un triangle, H son orthocentre et H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs.

Montrer que H est le centre du cercle inscrit de $H_AH_BH_C$.

Exercice 3

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O passant par A et B. Soit C le milieu de l'arc AB. Soit D un point tel que A, B et D soient alignés dans cet ordre. Soit E l'intersection de (BC) avec la parallèle à (AC) passant par D. Soit $\mathcal{C}'$ le cercle circonscrit à OCE de centre I. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ s'intersectent en C et F. Montrer que (OI) est parallèle à (DF).

Exercice 4

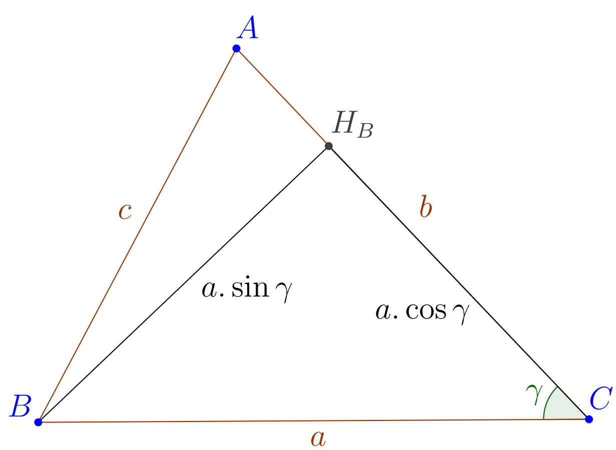
Soient $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ deux cercles s'intersectant en P et Q. On choisit deux points A_1 et B_1 sur $\mathcal{C}_1$ Les droites (A_1P) et (B_1P) recoupent le cercle $\mathcal{C}_2$ en A_2 et B_2 respectivement. Les droites (A_1B_1) et (A_2B_2) se coupent en C. Montrer que, quand A_1 et B_1 varient sur $\mathcal{C}_1$, le centre du cercle circonscrit de A_1A_2C reste sur un cercle fixe.

Géométrie du triangle

Pour ABC un triangle, les notations $\alpha = \widehat{CAB}$, ... , $a = BC$, r, R, O, H, I, H_A, ..., seront sous-entendues.

Théorème 2 (Al-Kashi)
Dans tout triangle ABC, $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

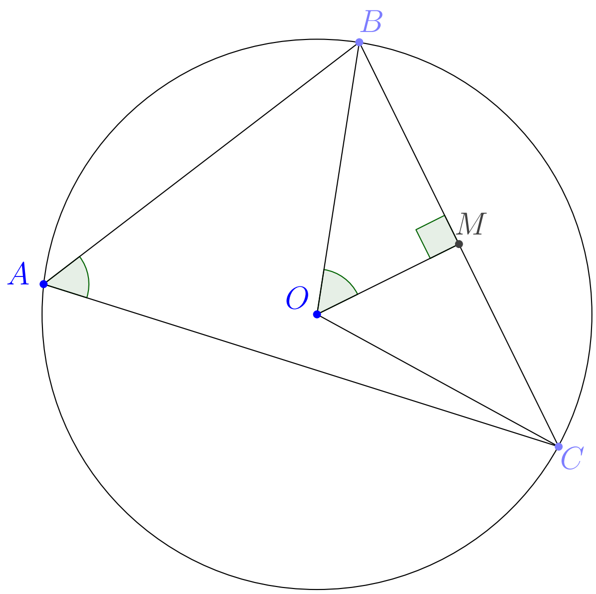
Démonstration



$H_BB = a\sin\gamma$ et $H_BA = b - a\cos\gamma$. D'où $c^2 = (a\sin\gamma)^2 + (b - a\cos\gamma)^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Théorème 3 (Loi des sinus)
Dans tout triangle ABC, $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$.

Démonstration



Soit M le milieu de $[BC]$. $\widehat{BOC} = 2\alpha$ (angle au centre), d'où $\widehat{BOM} = \alpha$.
On en déduit $\frac{a/2}{\sin \alpha} = R$ (triangle rectangle BOM). D'où la conclusion.

Exercice 5

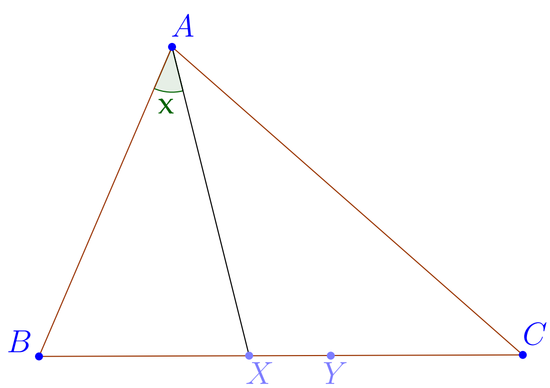
Pour ABC acutangle, trouver les valeurs de α telles que A soit équidistant de O et H.

Théorème 4

Soit α tel que $0^\circ < \alpha < 180^\circ$. Alors, si x et y sont des angles entre 0 et α, $\frac{\sin(\alpha-x)}{\sin x} = \frac{\sin(\alpha-y)}{\sin y}$ implique $x = y$.

Démonstration

On peut dériver et montrer que la fonction $x \mapsto \frac{\sin(\alpha-x)}{\sin x}$ est strictement décroissante.



Plus géométriquement, soit $\widehat{BAC} = \alpha$, X et Y sur (BC) tels que $\widehat{BAX} = x$ et $\widehat{BAY} = y$.
En utilisant la loi des sinus, $\frac{\sin(\alpha-x)}{\sin x} = \frac{\sin \widehat{ACB} \cdot \frac{CX}{AX}}{\sin \widehat{ABC} \cdot \frac{BX}{AX}} = \frac{CX}{BX} \cdot \frac{\sin \widehat{ACB}}{\sin \widehat{ABC}}$. De même, $\frac{\sin(\alpha-y)}{\sin y} = \frac{CY}{BY} \cdot \frac{\sin \widehat{ACB}}{\sin \widehat{ABC}}$.
D'où $\frac{CX}{BX} = \frac{CY}{BY}$, ce qui implique par monotonie $X = Y$, i.e. $x = y$.

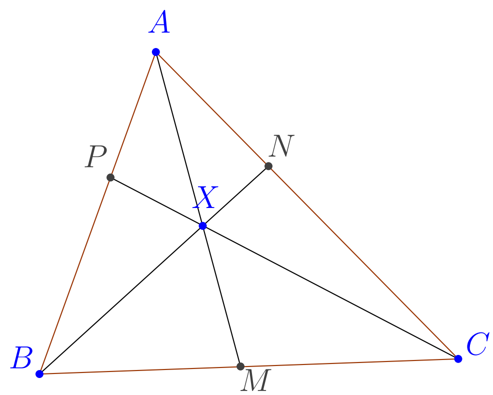
Exercice 6

Soit ABCDE un pentagone vérifiant $BC = CD = DE$ dont chacune des diagonales est parallèle au côté correspondant. Montrer que le pentagone est régulier.

Théorème 5 (Céva)

Soit ABC un triangle et $M \in (BC)$, $N \in (CA)$, $P \in (AB)$ des points sur ses côtés. Montrer que (AM), (BN) et (CP) sont concourantes ssi $\frac{\sin \widehat{ABN}}{\sin \widehat{CBN}} \cdot \frac{\sin \widehat{BCP}}{\sin \widehat{ACP}} \cdot \frac{\sin \widehat{CAM}}{\sin \widehat{BAM}} = -1$ (Céva trigonométrique), et ssi $\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN} = -1$ (Céva longueur).

Démonstration



Comme dans le théorème 4 on montre avec la loi des sinus que $\frac{\sin \widehat{ABN}}{\sin \widehat{CBN}} = \frac{AN}{CN} \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma}$. En multipliant toutes les égalités similaires, on obtient $\frac{\sin \widehat{ABN}}{\sin \widehat{CBN}} \cdot \frac{\sin \widehat{BCP}}{\sin \widehat{ACP}} \cdot \frac{\sin \widehat{CAM}}{\sin \widehat{BAM}} = \left(\frac{AP}{BP} \cdot \frac{BM}{CM} \cdot \frac{CN}{AN}\right)^{-1}$. Il suffit donc de montrer Ceva-trigonométrique.

De plus, si les droites sont concourantes en un point X, en utilisant la loi des sinus dans les triangles ABX, BCX et CAX, $\frac{\sin \widehat{ABN}}{\sin \widehat{CBN}} \cdot \frac{\sin \widehat{BCP}}{\sin \widehat{ACP}} \cdot \frac{\sin \widehat{CAM}}{\sin \widehat{BAM}} = \frac{\sin \widehat{ABX}}{\sin \widehat{BAX}} \cdot \frac{\sin \widehat{CAX}}{\sin \widehat{ACX}} \cdot \frac{\sin \widehat{BCX}}{\sin \widehat{CBX}} = \frac{AX}{BX} \cdot \frac{CX}{XA} \cdot \frac{XB}{XC} = -1$.

Pour la réciproque, il suffit de considérer un point P' tel que (AM), (BN) et (CP') soient concourantes et d'appliquer le théorème 4 à l'angle $\hat{C}$ puisque d'après le sens direct, $\frac{\sin \widehat{BCP'}}{\sin \widehat{ACP'}} = \left(\frac{\sin \widehat{ABN}}{\sin \widehat{CBN}} \cdot \frac{\sin \widehat{CAM}}{\sin \widehat{BAM}}\right)^{-1} = \frac{\sin \widehat{BCP}}{\sin \widehat{ACP}}$.

Exercice 7

Montrer que les médianes (resp. bissectrices resp. hauteurs) d'un triangle sont concourantes.

Exercice 8

Soit ABC un triangle et A' le centre du carré inscrit dans ABC ayant un côté sur (BC). On définit de même B' et C'. Montrer que (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes.

Exercice 9

Soit ABC un triangle et (MN) une droite parallèle à (BC) avec $M \in (AB)$ et $N \in (AC)$. (BN) et (CM) s'intersectent en P. Soit Q le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits à BMP et CPN. Montrer que $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$.

Il est intéressant de voir que (par la même démonstration), le théorème de Ceva se généralise DANS LE SENS DIRECT à un polygone. Sa réciproque est fausse en toute généralité, mais on peut néanmoins appliquer un principe similaire : on peut réassembler une à une les pièces d'une figure où la condition sur les sinus est vérifiée.

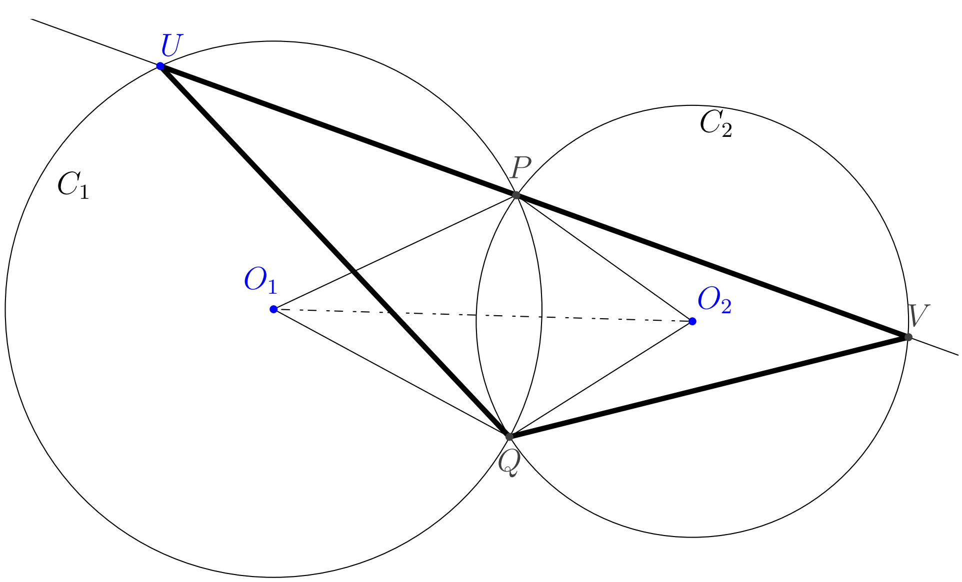
Prenons des triangles $X_1A_1B_1$, $X_2A_2B_2$, ..., $X_nA_nB_n$ vérifiant $\hat{X}_1 + \cdots + \hat{X}_n = 360°$ et $\frac{\sin \hat{A}_1}{\sin \hat{B}_1} \cdot \cdots \cdot \frac{\sin \hat{A}_n}{\sin \hat{B}_n} = 1$. On place le premier triangle avec comme sommet $X_1 = X$. On colle ensuite le deuxième triangle (ou un agrandissement/une réduction) au côté $[XB_1]$ du premier triangle : on obtient $X_2 = X$ et $A_2 = B_1$. On continue de même jusqu'à finalement obtenir $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = X$, $A_2 = B_1$, $A_3 = B_2$, ... , $A_n = B_{n-1}$. Alors, la condition sur les angles assure que $[XB_n) = [XA_1)$ et celle sur les sinus assure que (en utilisant successivement la loi des sinus dans tous les triangles) $XB_n = XA_1$. D'où $B_n = A_1$: on peut construire une figure fermée sous ces conditions. C'est le principe des puzzles vivants.

Exercice 10 - Théorème de Morley

Les points d'intersections naturels des trissectrices d'un triangle forment un triangle équilatéral.

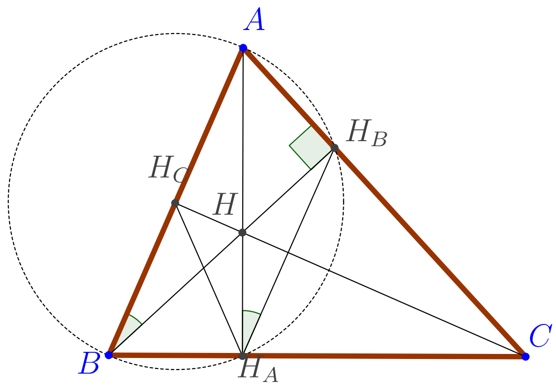
Solutions

Solution de l'exercice 1



$\widehat{UQV} = 180° - \widehat{QUP} - \widehat{QVP} = 180° - 1/2 \cdot \widehat{QO_1P} - 1/2 \cdot \widehat{QO_2P} = 180° - \widehat{O_2O_1Q} - \widehat{QO_2O_1} = \widehat{O_1QO_2}$.

Solution de l'exercice 2



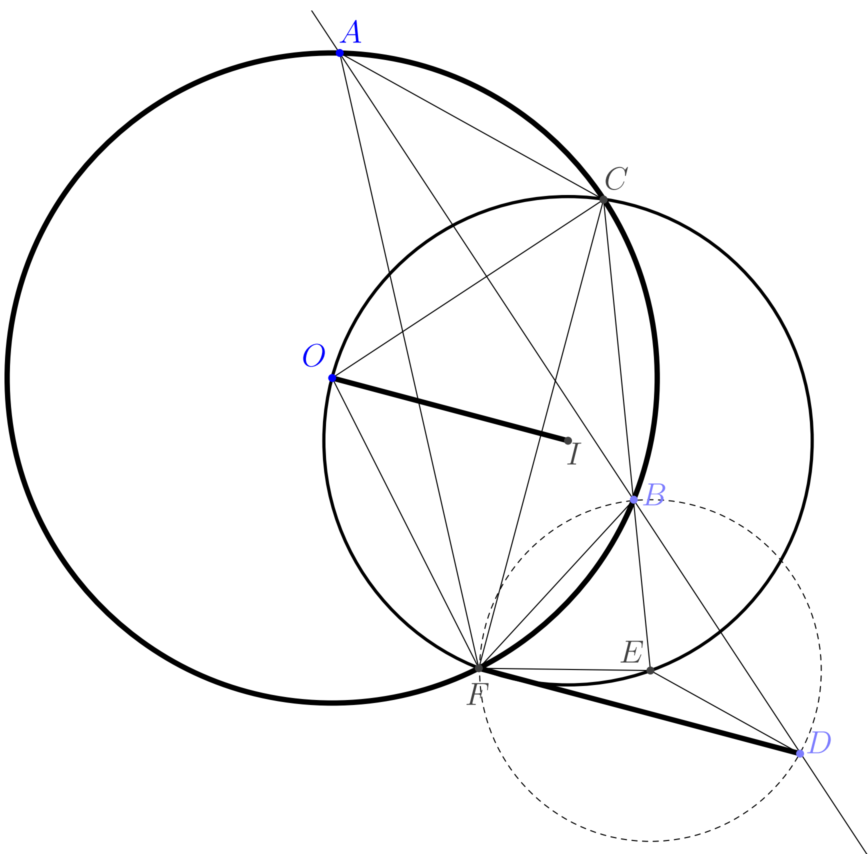
Comme $\widehat{AH_AB} = 90° = \widehat{AH_BB}$, A, H_B, H_A et B sont cocycliques.

Donc $\widehat{H_BH_AH} = \widehat{H_BH_AA} = \widehat{H_BBA}$. De même, $\widehat{H_CH_AH} = \widehat{H_CCA}$. Or, $\widehat{H_CCA} = 90° - \widehat{BAC} = \widehat{H_BBA}$.

Ainsi, $\widehat{H_BH_AH} = \widehat{H_CH_AH}$, donc H est sur la bissectrice de $\widehat{H_BH_AH_C}$.

On montre de même que H est sur la bissectrice des deux autres angles, d'où la conclusion !

Solution de l'exercice 3



(OI) est la médiatrice de $[CF]$. Il suffit donc de prouver que $\widehat{CFD} = 90°$.

Soit $x = \widehat{FAB}$ et $y = \widehat{BAC}$.

En utilisant le parallélisme, on sait que $y = \widehat{EDB}$. On sait de plus que $y = \widehat{ABC} = \widehat{DBE}$. On sait également que $y = \widehat{ABC} = \widehat{AFC}$. Enfin, par le théorème de l'angle inscrit, $y = \widehat{CFB}$. De même, $x = \widehat{FCB}$.

D'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{COF} = 2\cdot(x+y)$. Donc, en considérant le triangle isocèle COF, $\widehat{OFC} = \widehat{OCF} = 90° - x - y$.

Ainsi, $\widehat{OCE} = \widehat{OCF} + \widehat{FCB} = 90° - y$. O, C, E et F étant cocycliques, on en déduit $\widehat{OFE} = 90° + y$.

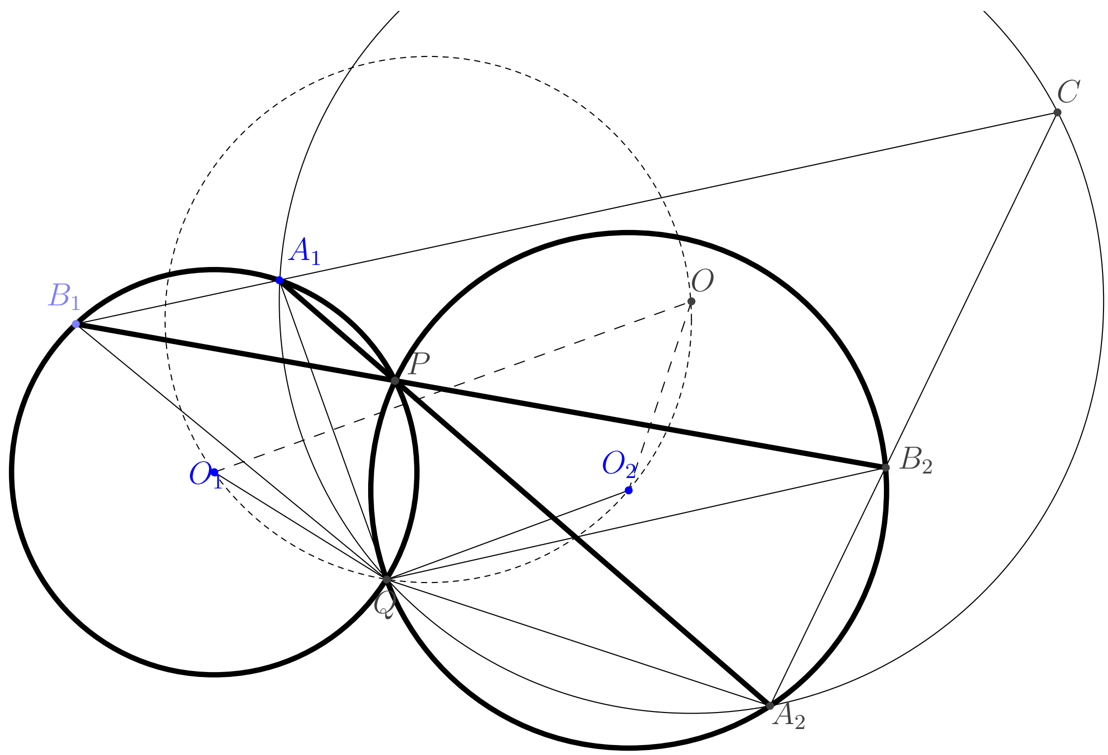
Donc $\widehat{BFE} = \widehat{OFE} - \widehat{OFC} - \widehat{CFB} = x + y$.

Or, dans le triangle BFA, $\widehat{DBF} = \widehat{BFC} + \widehat{CFA} + \widehat{BAF} = x + 2y$. D'où $\widehat{FBE} = \widehat{FBD} - \widehat{EBD} = x + y$.

Ainsi, $\widehat{EBD} = \widehat{EDB} = y$ et $\widehat{EBF} = \widehat{EFB} = x + y$, donc E est le centre du cercle circonscrit de BDF et $\widehat{EFD} = 90° - (x + y) - y = 90° - x - 2y$.

D'où $\widehat{CFD} = \widehat{CFB} + \widehat{BFE} + \widehat{EFD} = 90°$. CQFD

Solution de l'exercice 4



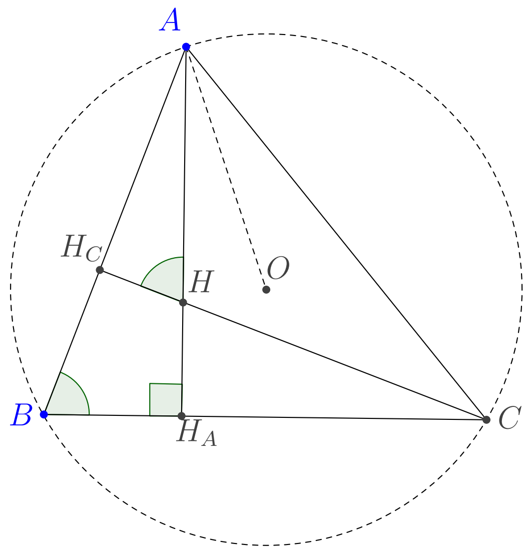
D'après l'exercice 1, on sait que $\widehat{A_1QA_2} = \widehat{B_1QB_2} = \widehat{O_1QO_2}$ avec O_1 et O_2 les centres respectifs de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

En particulier, en utilisant le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{A_1QA_2} = \widehat{B_1QB_2} = \widehat{B_1QP} + \widehat{PQB_2} = \widehat{CA_1P} + \widehat{CA_2P} = 180° - \widehat{A_1CA_2}$.

A_1, A_2, C et Q sont donc cocycliques. Soit O le centre de ce cercle. (OO_1) est la médiatrice de $[A_1Q]$ et (OO_2) celle de $[A_2Q]$. D'où $\widehat{O_1OO_2} = 180° - \widehat{A_1QA_2} = 180° - \widehat{O_1QO_2}$.

O est donc sur le cercle circonscrit à QO_1O_2, qui est fixe. CQFD

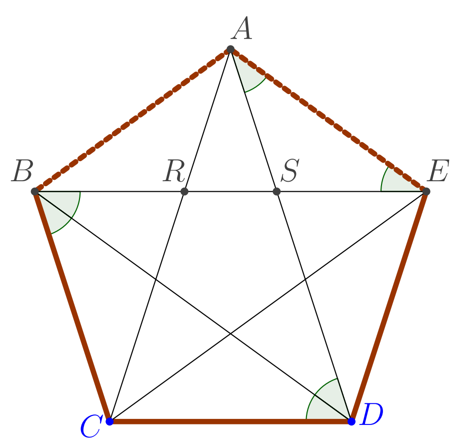
Solution de l'exercice 5



Si $AH = AO = R$, $AH_C = \sin\beta \cdot R$ (triangle rectangle AH_CH), d'où $AC = \frac{sin\beta \cdot R}{\cos\alpha}$ (triangle rectangle ACH_C). Or $AC = 2R.\sin\beta$ (loi des sinus).

On en déduit $\cos\alpha = 1/2$, i.e. $\alpha = 60°$. La réciproque est analogue.

Solution de l'exercice 6



De par les parallèles et les triangles isocèles, $\widehat{AEB} = \widehat{EBD} = \widehat{BDC} = \widehat{DBC} = \widehat{ADB} = \widehat{EAD} := \alpha$, $\widehat{ABE} = \widehat{BEC} = \widehat{ECD} = \widehat{CED} = \widehat{ACE} = \widehat{BAC} := \beta$ et $\widehat{BCA} = \widehat{CAD} = \widehat{ADE} := \gamma$.

Soient R et S les points d'intersection de (AC) et (AD) avec (BE). En utilisant des parallélogrammes, $BS = CD = RE$, d'où $BR = SE$, d'où $AR = AS$, d'où $2\alpha = 2\beta$, d'où $\alpha = \beta$. Montrons que $\alpha = \gamma$.

Dans ACD, $4\alpha + \gamma = 180°$. Or, par la loi des sinus, $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{AE}{DE} = \frac{AE}{CD} = \frac{AE}{RE} = \frac{\sin(180°-2\alpha-\gamma)}{\sin(\alpha+\gamma)} = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin(\alpha+\gamma)}$.

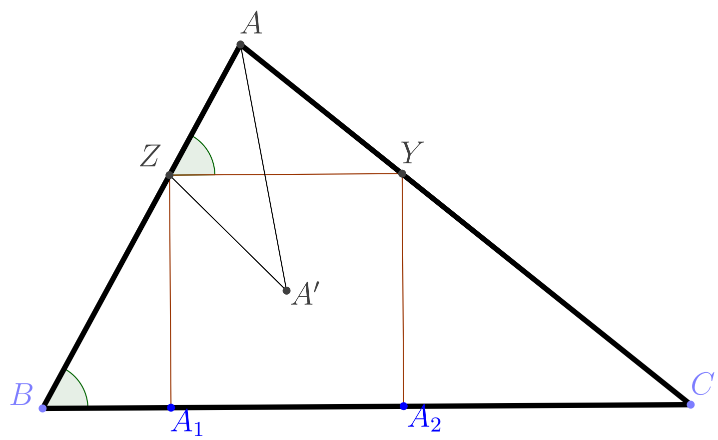
D'où $\frac{\sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha} = \frac{\sin(2\alpha)}{\sin\gamma}$, d'où la conclusion puisque $(\alpha+\gamma)+\alpha = (2\alpha)+\gamma < 180°$.

On peut aussi utiliser la cocyclicité des points $ABCE$ (car $\widehat{BAC} = \widehat{BEC}$), d'où $\widehat{CBE} = \widehat{CAE}$, i.e. $\alpha = \gamma$.

Solution de l'exercice 7

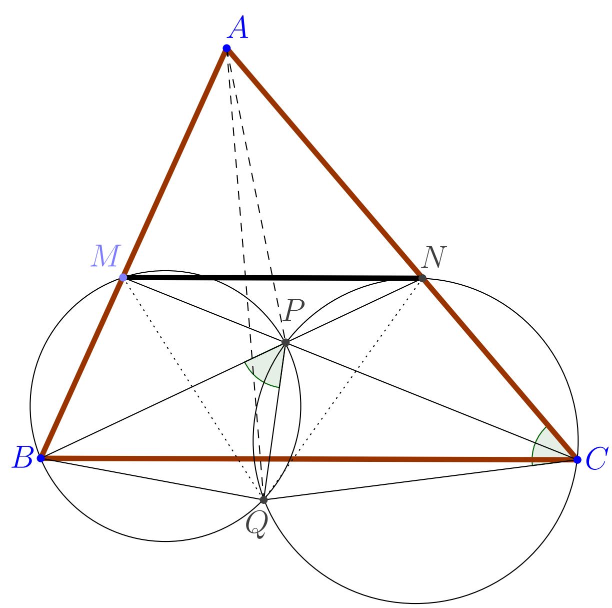
Ceva-longueur pour les médianes, Ceva-trigo pour les bissectrices et hauteurs.

Solution de l'exercice 8



Soit A_1A_2YZ le carré de l'énoncé, avec $A_1, A_2 \in [BC]$, $Y \in [CA]$, $Z \in [AB]$. Pour pouvoir appliquer Ceva-trigo, on utilise la loi des sinus dans $AA'Z$: $\sin \widehat{BAA'} = \sin \widehat{AZA'} \cdot \frac{A'Z}{AA'} = \sin(\beta + 45°) \cdot \frac{A'Z}{AA'}$. De même, $\sin \widehat{CAA'} = \sin(\gamma + 45°) \cdot \frac{A'Y}{AA'}$. Donc $\frac{\sin \widehat{BAA'}}{\sin \widehat{CAA'}} = -\frac{\sin(\beta+45°)}{\sin(\gamma+45°)}$. Le produit sur les termes analogues pour B' et C' concluent.

Solution de l'exercice 9



D'après le théorème 4, il suffit de montrer que $\frac{\sin \widehat{BAQ}}{\sin \widehat{QAC}} = \frac{\sin \widehat{PAC}}{\sin \widehat{BAP}}$.

Or, d'après Ceva-trigo autour de Q, $\frac{\sin \widehat{BAQ}}{\sin \widehat{QAC}} = \left(\frac{\sin \widehat{ACQ}}{\sin \widehat{QCB}} \cdot \frac{\sin \widehat{CBQ}}{\sin \widehat{QBA}}\right)^{-1}$.

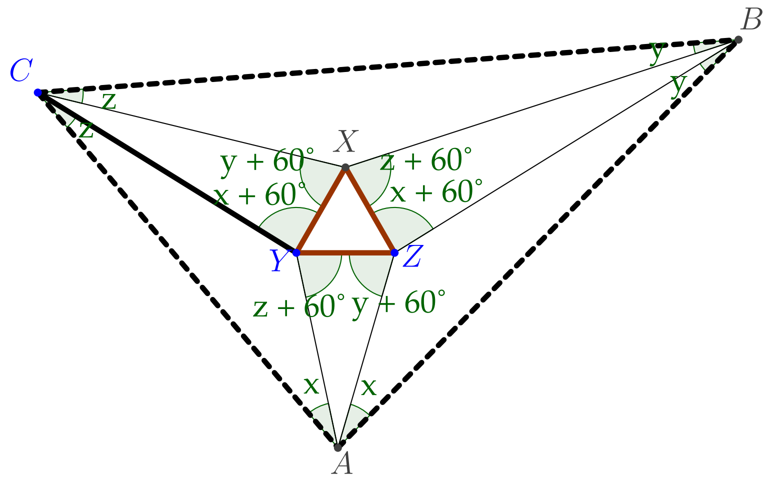
De même, Ceva-trigo autour de P montre que $\frac{\sin \widehat{PAC}}{\sin \widehat{BAP}} = \left(\frac{\sin \widehat{PBA}}{\sin \widehat{CBP}} \cdot \frac{\sin \widehat{BCP}}{\sin \widehat{PCA}}\right)^{-1}$.

Il suffit donc de montrer que $\frac{\sin\widehat{ACQ}}{\sin\widehat{QCB}}\cdot\frac{\sin\widehat{CBQ}}{\sin\widehat{QBA}}=\frac{\sin\widehat{PBA}}{\sin\widehat{CBP}}\cdot\frac{\sin\widehat{BCP}}{\sin\widehat{PCA}}$. En utilisant les parallèles ainsi que le théorème de l'angle inscrit, cela s'écrit aussi $\frac{\sin\widehat{BPQ}}{\sin\widehat{QCB}}\cdot\frac{\sin\widehat{CBQ}}{\sin\widehat{QPC}}=\frac{\sin\widehat{PQM}}{\sin\widehat{PNM}}\cdot\frac{\sin\widehat{PMN}}{\sin\widehat{PQN}}$

Comme d'après le théorème de l'angle inscrit $\widehat{QBP}=\widehat{QMP}$ et $\widehat{QCP}=\widehat{QNP}$, c'est aussi équivalent à $\frac{\sin\widehat{BPQ}}{\sin\widehat{QPC}}\cdot\frac{\sin\widehat{PCQ}}{\sin\widehat{QCB}}\cdot\frac{\sin\widehat{CBQ}}{\sin\widehat{QBP}}=\frac{\sin\widehat{PMN}}{\sin\widehat{QMP}}\cdot\frac{\sin\widehat{PNQ}}{\sin\widehat{MNP}}\cdot\frac{\sin\widehat{PQM}}{\sin\widehat{NQP}}$, ce qui est vrai puisque les deux membres de l'égalité valent 1 d'après Céva autour de Q dans PBC et autour de P dans MNQ. CQFD

Solution de l'exercice 10

Notons x, y et z le tiers des angles du triangle.

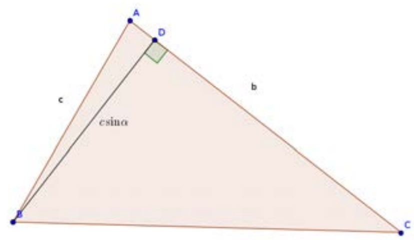


Considérons les pièces de puzzle suivantes : un triangle XZY équilatéral, un triangle XYC d'angles $\hat{X}=y+60°$, $\hat{Y}=x+60°$ et $\hat{C}=z$ (dont la somme fait bien $180°$), un triangle XCB d'angles $\hat{X}=180°-y-z$, $\hat{C}=z$ et $\hat{B}=y$, un triangle XBZ d'angles $\hat{X}=z+60°$, $\hat{B}=y$ et $\hat{Z}=x+60°$, un triangle ZAB d'angles $\hat{Z}=180°-x-y$, $\hat{B}=y$ et $\hat{A}=x$, un triangle d'angle ZAY d'angles $\hat{Z}=y+60°$, $\hat{A}=x$ et $\hat{Y}=z+60°$, un triangle YAC d'angles $\hat{Y}=180°-x-z$, $\hat{A}=x$ et $\hat{C}=z$. Les conditions pour former le puzzle autour de X sont vérifiées : la somme des $\hat{X}$ vaut bien $360°$ et le point B défini par les triangles XYC et XCB vérifie bien : $\frac{XB}{XZ}=\frac{\sin(x+60^{\circ})}{\sin y}$ vu que $\frac{XB}{XZ}=\frac{XB}{XC}\cdot\frac{XC}{XY}=\frac{\sin z}{\sin y}\cdot\frac{\sin(x+60^{\circ})}{\sin z}$. On obtient donc un quadrilatère $ZYCB$ contenant X. On peut compléter ce puzzle par celui autour de Z (pour les mêmes raisons) puis autour de Y, en s'assurant que l'on retombe bien sur le point C du départ (puisque le triangle CXY a les mêmes angles qu'au départ). On obtient donc un triangle ABC contenant un triangle XYZ vérifiant toutes les conditions d'angles précédentes. En particulier, le triangle XYZ est le triangle des trisectrices de ABC, et il est équilatéral. Or, le triangle ABC a par construction les mêmes angles que le triangle d'origine et peut donc être agrandi (ou réduit) pour obtenir le triangle d'origine. Ce faisant, le triangle des trisectrices restera équilatéral CQFD

2 après-midi : Razvan Barbulescu

Dans ce qui suit, a, b, c désigne les longueurs des côtés opposés de A, B et respectivement C. G est le centre de gravité, H est l'orthocentre, I le centre du cercle inscrit (intersection des

FIGURE 1 – Formule de l'aire.



bissectrices) et O est le centre du cercle circonscrit. On note α, β et γ les angles de A, B et C.

Théorie

Aires - Définition

Étant donné un triangle de base b et de hauteur h on appelle aire du triangle la quantité $\frac{bh}{2}$. Plus généralement, on définit l'aire d'un polygone comme la somme des aires de n'importe quel recouvrement de triangles.

Théorème

L'aire vérifie les formules suivantes :

$$\text{aire}(ABC) = \frac{bc\sin A}{2}$$

$$(\text{Héron}) \quad \text{aire}(ABC) = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Démonstration. Dans la figure 1 on voit que la hauteur vaut $c\sin A$. D'où $\text{aire}(ABC) = \frac{bc\sin A}{2}$. En élevant au carré on trouve $\text{aire}(ABS)^2 = \frac{(2bc)^2}{16}(\sin\alpha)^2$. On se propose d'éliminer le sinus pour obtenir une formule ne faisant intervenir que des longueurs. D'après la formule d'Al Kashi on a $\cos\alpha = \frac{a^2-b^2-c^2}{2bc}$. On remplace $(\sin\alpha)^2 = 1-(\cos\alpha)^2$ par sa valeur. Ainsi on a

$$(\text{aire}\, ABC)^2 = \frac{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}{16}.$$

Ensuite $p(p-a) = \frac{1}{4}\left[(b+c)^2-a^2\right]$ et $(p-b)(p-c) = \frac{1}{4}\left[a^2-(b-c)^2\right]$.

Donc $p(p-a)(p-b)(p-c) = -\frac{1}{16}\left[(a^2-b^2-c^2)^2-2(bc)^2\right] = \text{aire}(ABC)^2$. □

Théorème (Triangles à hauteur commune)

Si deux triangles T_1 et T_2 ont une hauteur commune et si leurs bases valent b_1 et respectivement b_2, alors $\frac{\text{aire}\, T_1}{\text{aire}(T_2)} = \frac{b_1}{b_2}$.

FIGURE 2 – des triangles à hauteur commune.

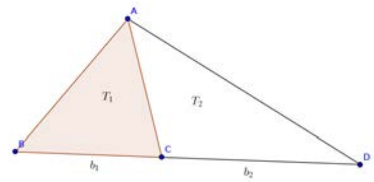
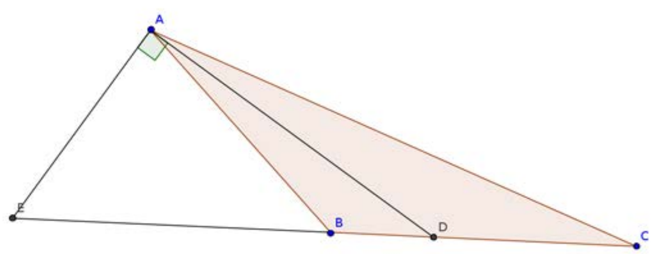


FIGURE 3 – Théorème de la bissectrice



Démonstration. Si on note h la hauteur commune, alors $\frac{\text{aire}(T_1)}{\text{aire}(T_2)} = \frac{hb_1/2}{hb_2/2} = \frac{b_1}{b_2}$. □

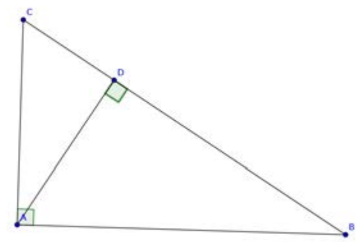
Théorème (de la bissectrice)

Soit D le pied de la bissectrice issue de A dans le triangle ABC et soit E le pied de la bissectrice extérieure de A (c-à-d de la droite perpendiculaire à la bissectrice) avec BC. Montrer l'inégalité suivante :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}.$$

Démonstration. Par le Théorème des triangles à hauteur commune on a $\frac{DB}{DC} = \frac{\text{aire}(DAB)}{\text{aire}(DAC)}$. Si on note t la longueur de la bissectrice, on a $\text{aire}(DAB) = \frac{tc \sin \frac{\alpha}{2}}{2}$ et $\text{aire}(DAC) = \frac{tb \sin \frac{\alpha}{2}}{2}$. Donc $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$. De nouveau le Théorème des triangles à hauteur commune donne $\frac{EB}{EC} = \frac{\text{aire}(EAB)}{\text{aire}(EAC)}$. Si on note $e = EA$, alors on a $\text{aire}(EAB) = \frac{zc \sin(90° - \frac{\alpha}{2})}{2}$ et $\text{aire}(EAC) = \frac{zb \sin(90° + \frac{\alpha}{2})}{2}$. Comme les angles $90° - \frac{\alpha}{2}$ et $90° + \frac{\alpha}{2}$ sont supplémentaires, ils ont le même sinus. S'où $\frac{EB}{EC} = \frac{AB}{AC}$. □

FIGURE 4 – Théorème de la hauteur



Triangles semblables

Les triangles semblables sont bien connus. Il faut souligner qu'on peut montrer que deux droites sont parallèles à l'aide du Théorème de Thalès. On illustre l'utilisation des triangles semblables par deux théorèmes.

Théorème (de la hauteur)

Soit ABC un triangle rectangle en A. On note D le pied de la hauteur de A sur BC. Alors on a $AB^2 = BD \cdot BC$ et $AD^2 = BD \cdot DC$.

Démonstration. Les triangles ABD et CBA ont deux angles communs, donc ils sont semblables. Ainsi $\frac{AB}{CB} = \frac{BD}{AB}$. De même, ABD et CAD sont eux aussi semblables, donc $\frac{AD}{BD} = \frac{DC}{DA}$. □

Théorème (Ménélaüs)

Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points pris respectivement sur la droite BC, CA et AB. Alors les points P, Q, R sont colinéaires si et seulement si on a

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = -1$$

où les longueurs sont considérées algébriquement.

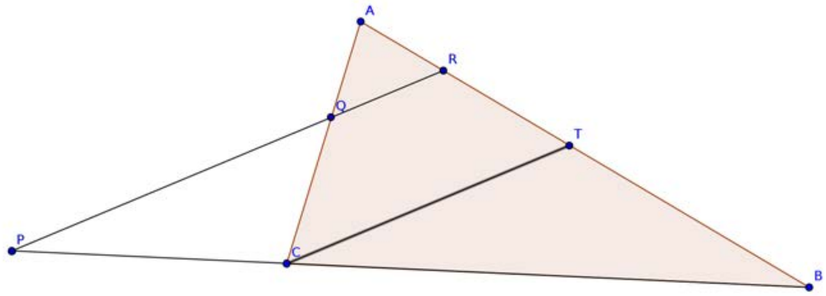
Démonstration. Soit S l'intersection de PQ avec AB. On se propose d'exprimer le produit de l'énoncé en fonction de segments sur la droite AB. Pour cela on trace la parallèle d par C à PQ et on note T l'intersection de d et AB. D'après le Théorème de Thalès on a, $\frac{BP}{PC} = \frac{BS}{ST}$ et $\frac{CQ}{QA} = \frac{TS}{SA}$, d'où

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AS}{SB} = \frac{BS}{ST} \cdot \frac{TS}{SA} \cdot \frac{AS}{SB} = -1.$$

Par conséquent les points P, Q, R sont alignés si et seulement si on a $\frac{AR}{RB} = \frac{AS}{SB}$, soit $R = S$. □

Exercices

FIGURE 5 – Théorème de Ménélaus



Exercice 1

Soit $ABCD$ un parallélogramme. On prend M et N sur $[AD]$ de façon que M est entre A et N. On note O l'intersection de BM et CN. Montrer que $\text{aire}(AMO) + \text{aire}\, OND = \text{aire}\, MNC$.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un trapèze avec $AB \parallel DC$ dont les diagonales sont perpendiculaires et se coupent en O. On prend M et N sur les demi-droites $[OA$ et $[OB$ tels que les angles BMD et ANC sont droits. On appelle E le milieu de $[MN]$. Montrer :

1. Les triangles OAB et ONM sont semblables ;
2. Les droites OE et AB sont perpendiculaires.

Exercice 3

Quelle est l'aire maximale d'un triangle ABC dont les médianes en A et B ont 2cm et 1cm ?

Exercice 4

Soit le triangle ABC et P le milieu du côté $[BC]$. On trace une parallèle MN à BC avec $M \in AB$ et $N \in AC$. On appelle Q l'intersection de MP et BN. On note R le pied de la perpendiculaire de Q sur AC. On pose T l'intersection de QR avec la parallèle par B à AC. Montrer

1. $MR \parallel TP$;
2. $\angle MRQ = \angle PRQ$.

Exercice 5

Sur les côtés AB et AD du losange $ABCD$ on considère deux points E et F tels que $AE = DF$. Les droites BC et DE se coupent en P et les droites CD et BF s'intersectent en Q. Montrer que :

FIGURE 6 – Exercice 1

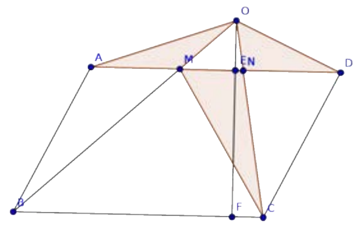


FIGURE 7 – Exercice 2

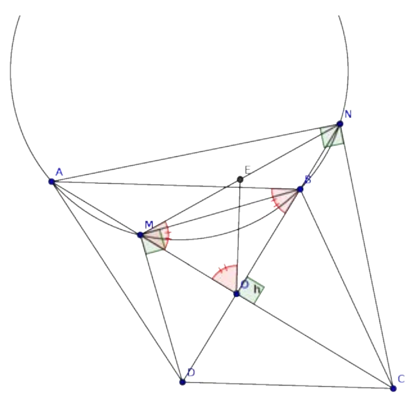
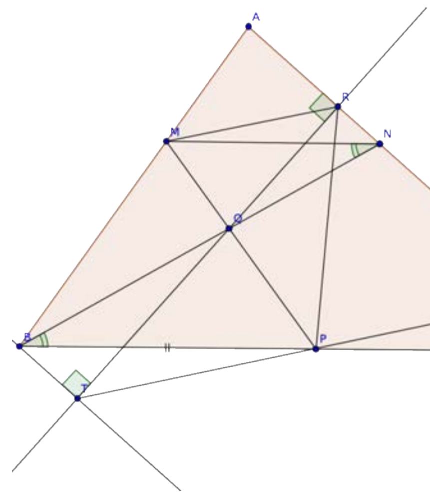


FIGURE 8 – Exercice 4



1. $\frac{PE}{PD} + \frac{QF}{QB} = 1$;
2. les points P, A et Q sont alignés.

Exercice 6

Le trapèze $ABCD$ est rectangle et orthodiagonal. L'angle A est droit et $[AB]$ est la grande base. Les diagonales se coupent en O. $[OE$ est la bissectrice de $\angle AOD$, $E \in]AD[$ et $EF \parallel AB$, $F \in]BC[$. On note P et Q les intersections de EF avec AC et respectivement BD. Montrer que :

1. $EP = QF$;
2. $AD = EF$.

Solutions

Solution de l'exercice 1

On note E et F les pieds de la perpendiculaire commune de O sur AD et BC. On note $h = OE$ et $H = OF$. Comme les triangles OME et OBF sont semblables, $\frac{h}{H} = \frac{OM}{OB}$. Puisque les triangles OAD et OBC on des bases de même longueurs $\text{aire}(OAD) = \frac{h}{H}\,\text{aire}\,OBC$. D'autre part, puisque les triangles OMC et OBC on la même hauteur, $\text{aire}(OMC) = \frac{OM}{OB}\,\text{aire}\,OBC$. Donc $\text{aire}\,OAD = \text{aire}\,OMC$. En soustrayant $\text{aire}(OMN)$ des deux côtés, on a $\text{aire}(AMO) + \text{aire}\,OND = \text{aire}\,MNC$.

Solution de l'exercice 2

Le théorème de la hauteur dans le triangle rectangle ANC donne $ON^2 = AO \cdot OC$. De manière analogue $OM^2 = BO \cdot OD$. Comme les triangles OAB et OCD sont semblables, $\frac{OA}{OB} = \frac{OC}{OD}$. Donc, $\left(\frac{ON}{OM}\right)^2 = \left(\frac{OA}{OB}\right)^2$. Comme, en plus, les triangles OAB et OMN ont un angle commun, $\triangle OAB \sim \triangle OMN$. Maintenant, notons $\alpha = \angle AOE$. Comme, $\triangle MON$ est rectangle, le milieu E de son hypoténuse est centre de son cercle circonscrit, donc le triangle $\triangle OMN$ est

FIGURE 9 – Exercice 5

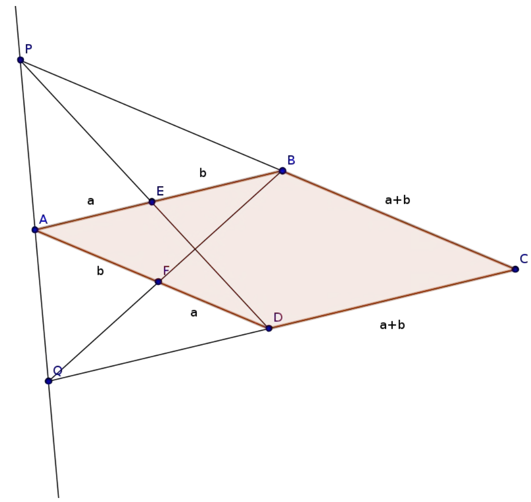
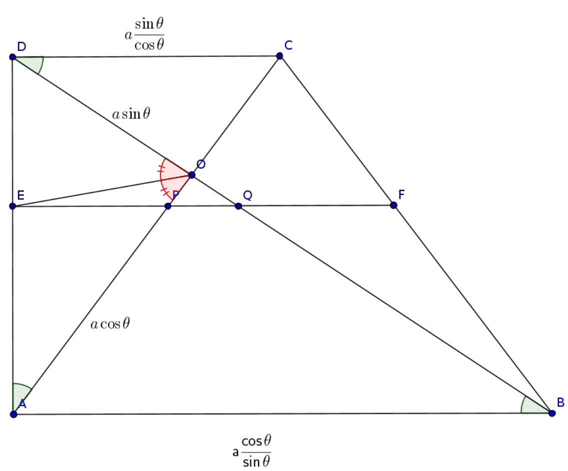


FIGURE 10 – Exercice 6



isocèle, d'où $\angle OMN = \alpha$. Puisque $\triangle OMN \sim \triangle OBA$, $\angle ABO = \alpha$. Comme le triangle OMN est rectangle $\angle EON = 90° - \alpha$. Donc OE et AB se coupent en angle droit.

Solution de l'exercice 3

On appelle G le centre de gravité du triangle ABC. On sait que $\mathrm{aire}(ABC) = 3\,\mathrm{aire}(ABG)$. Or $\mathrm{aire}(ABG) = \frac{1}{2}AG \cdot BG \cdot \sin\angle([GA,[GB)$. Comme les médianes se coupent dans un rapport de 2 : 1, $AG \cdot BG = \frac{8}{9}$. Donc $\mathrm{aire}(ABG) \leq \frac{4}{9}$ avec égalité quand $AG \perp BG$. Donc l'aire maximale de ABC vaut $\frac{4}{3}$.

Solution de l'exercice 4

Remarquons que $\triangle RQN \sim \triangle TQB$, d'où $\frac{RQ}{TQ} = \frac{NQ}{BQ}$. De même $\triangle MQN \sim \triangle PQB$, $\frac{NQ}{BQ} = \frac{MQ}{PQ}$. Le deux relations donnent $\frac{RQ}{TQ} = \frac{MQ}{PQ}$. Donc, les triangles MQR et PQT sont semblables, d'où $MR \parallel TP$. On note S l'intersection de TP avec AC. Comme $\triangle BTP \sim \triangle CSP$, P est le milieu de TS. Or, $\triangle TRS$ est rectangle, donc $RP = TP$ et alors $\angle PRQ = \angle RTP$. Puisque $MR \parallel TP$, $\angle MRQ = \angle RTP$. Donc $\angle MRQ = \angle PRQ$.

Solution de l'exercice 5 On note $a = AE = DF$ et $b = BE = AF$. Alors $CD = BC = a + b$. Comme $BE \parallel CD$, le Théorème de Thalès donne $\frac{PE}{PD} = \frac{b}{a+b}$. De même, $DF \parallel BC$, donc $\frac{QF}{QB} = \frac{a}{a+b}$. Ainsi $\frac{PE}{PD} + \frac{QF}{QB} = \frac{b}{a+b} + \frac{a}{a+b} = 1$. Maintenant, puisque $\frac{PD}{PE} = \frac{a+b}{b} = \frac{DA}{AF}$, $EF \parallel PA$. De manière analogue, $\frac{BF}{BQ} = \frac{b}{a+b} = \frac{BE}{BA}$, donc $EF \parallel AQ$. Ainsi $AP \parallel AQ$, donc A, P et Q sont alignés.

Solution de l'exercice 6

Comme $PF \parallel AB$, $\frac{AP}{AC} = \frac{BF}{BC}$. Ensuite, comme $EP \parallel DC$, $\frac{EP}{DC} = \frac{AP}{AC}$ (*). De même $FQ \parallel DC$, donc $\frac{FQ}{DC} = \frac{BF}{BC}$ (**). De (*) et (**) on trouve $EP = QF$. On note $a = AD$ et $\theta = \angle DAO$. Etant donné les angles droits, on en déduit que $\angle ODC = \angle OBA = \theta$. Alors $DO = a\sin\theta$, $AO = a\cos\theta$, $AB = a\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$ et $DC = a\tan\theta$. Par le Théorème de la bissectrice, $\frac{DE}{EA} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. Comme $EP \parallel DC$, $EP = \frac{\cos\theta}{\cos\theta+\sin\theta}a\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$. De même, $PF \parallel AB$, donc $PF = a\frac{\cos\theta}{\sin\theta} \cdot \frac{\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$. En sommant, on obtient $EF = a\frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}(\sin\theta + \cos\theta) = a = AD$.

4 Vendredi : Test final

1 Enoncé

Durée : 3 heures.

Chaque exercice est noté sur 7 points.

Vous devez démontrer ce que vous affirmez. N'hésitez pas à écrire les idées de démonstration que vous avez : même si la démonstration est incomplète, une idée juste peut faire gagner des points.

Aucun document n'est autorisé, pas même les calculatrices (ni les téléphones).

Rédigez des **exercices différents sur des feuilles différentes.** N'oubliez pas vos **nom et prénom sur chaque feuille.**

Rédigez clairement et lisiblement vos solutions !

Exercice 1

Montrer que pour tout entier n la fraction $\frac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 2

$2n+1$ élèves jouent avec des pistolets à eau. L'arbitre attend que les distances entre les différentes paires soient toutes distinctes. Quand l'arbitre siffle, chacun tire sur l'élève le plus proche. Montrer que :

1. il y a deux élèves qui se tirent mutuellement dessus ;

2. il y a un élève qui n'est pas visé.

Exercice 3

Soient D et E sur le côté $[AB]$ du triangle ABC tels que $\frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EB} = \left(\frac{AC}{CB}\right)^2$.

Montrer que :

1. $\frac{AE}{EB} = \frac{AC \sin(\widehat{ACE})}{BC \sin(\widehat{ECB})}$;

2. $\widehat{ACD} = \widehat{BCE}$.

2 Solution

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

Cela revient à montrer que le PGCD de $21n+4$ et $14n+3$ est toujours 1. On peut utiliser l'algorithme d'Euclide :

$$21n + 4 = 1 \times (14n + 3) + (7n + 1)$$

$$14n + 3 = 2 \times (7n + 1) + 1$$

1 est donc le dernier reste non nul : en remontant l'algorithme, $1 = (14n+3) - 2 \times (7n+1) = 3 \times (14n+3) - 2 \times (21n+4)$, donc tout diviseur commun de $14n+3$ et $21n+4$ divise 1.

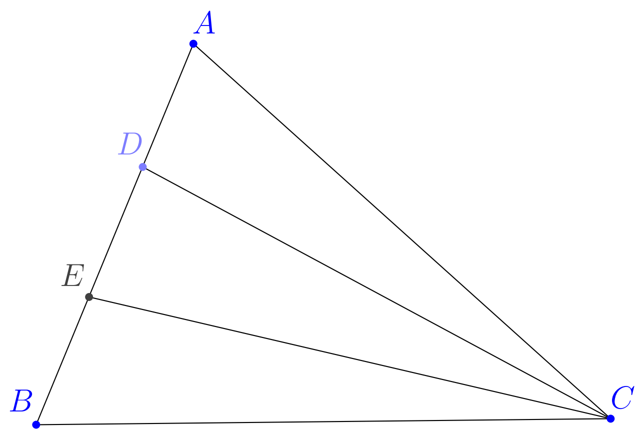
Cet exercice était le problème 1 de la première Olympiade Internationale de Mathématiques (1959).

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

Parmi les distances entre les élèves, toutes distinctes, l'une est plus petite que toutes les autres. Les deux élèves qui se trouvent à cette distance minimale l'un de l'autre se tireront nécessairement mutuellement dessus, étant donné les règles du jeu.

La seconde question se démontre par récurrence. L'hypothèse de récurrence est vérifiée lorsque $2n+1=3$: parmi les trois élèves, deux se tirent mutuellement dessus et le troisième n'est visé par personne. Supposons que cette hypothèse de récurrence est vraie pour $2n-1$ élèves, et considérons $2n+1$ élèves : deux d'entre eux, A et B, se tirent mutuellement dessus. Soit aucun des autres ne tire ni sur A ni sur B, et les autres constituent un groupe de $2n-1$ élèves auquel s'applique l'hypothèse de récurrence. Soit au moins un des autres élèves tire soit sur A soit sur B, et parmi les $2n+1$ tirs, deux au moins ont la même cible A ou B, donc ces $2n+1$ tirs ont au plus $2n$ cibles distinctes : un élève au moins n'est pas parmi ces $2n$ cibles.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>



Dans le triangle AEC, la loi des sinus permet d'écrire : $\frac{AE}{AC} = \frac{\sin\widehat{ACE}}{\sin\widehat{AEC}}$, tout comme, dans le triangle ECB, $\frac{EB}{BC} = \frac{\sin\widehat{ECB}}{\sin\widehat{BEC}}$. Or $\sin\widehat{AEC} = \sin\widehat{BEC}$, donc le quotient des deux relations précédentes équivaut bien à : $\frac{AE}{EB} = \frac{AC.\sin\widehat{ACE}}{BC.\sin\widehat{ECB}}$.

On peut en dire autant de : $\frac{AD}{DB} = \frac{AC.\sin\widehat{ACD}}{BC.\sin\widehat{DCB}}$. En multipliant ces deux relations, on obtient : $\frac{AE}{EB}.\frac{AD}{DB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2 \frac{\sin\widehat{ACE}.\sin\widehat{ACD}}{\sin\widehat{ECB}.\sin\widehat{DCB}}$. Or par hypothèse $\frac{AE}{EB}.\frac{AD}{DB} = \left(\frac{AC}{BC}\right)^2$. On en déduit : $\frac{\sin\widehat{ACE}}{\sin\widehat{ECB}} = \frac{\sin\widehat{DCB}}{\sin\widehat{ACD}}$. Il suffit, dès lors, d'appliquer le théorème 4 du cours de Jean-François Martin (p. 37) pour en déduire que $\widehat{ACD} = \widehat{BCE}$, vu que $\widehat{ACE} + \widehat{ECB} = \widehat{ACB} = \widehat{DCB} + \widehat{ACD}$, et que cette somme est strictement comprise entre 0° et 180°.

V. Avancés

1 Mardi : Combinatoire

1 matin : Pierre Bornsztein

Réflexions sur le principe du maximum (ou du minimum).

Exercice 1
Le plan est rapporté à un repère orthonormé. A chaque point à coordonnées entières, on attribue un entier naturel qui est la moyenne arithmétique des entiers attribués à ses quatre voisins (ceux situés à une distance unité). Prouver qu'on a attribué le même nombre à chaque point.

Exercice 2
Lors d'une soirée, aucun garçon n'a dansé avec chacune des filles, et chaque fille a dansé avec au moins un garçon.
Prouver qu'il existe deux garçons g, g' et deux filles f, f' tels que g ait dansé avec f mais pas avec f', et g' ait dansé avec f' mais pas avec f.

Exercice 3
Douze candidats au poste de maire participent à un débat télévisé. Au bout d'un moment, l'un d'eux déclare "jusque là, on a menti une seule fois." Un deuxième dit alors "Maintenant, cela fait deux fois." Un troisième s'exclame alors "Trois fois, maintenant" et ainsi de suite jusqu'au douzième qui affirme qu'avant lui on a menti douze fois. Le présentateur arrête alors la discussion. Sachant qu'au moins un des candidats a correctement annoncé combien de fois on avait menti avant sa prise de parole, déterminer combien de candidats ont menti au total.

Exercice 4
On considère $2n$ points du plan, trois quelconques jamais alignés. On suppose que n sont colorés en rouge, et les n autres en bleu. Montrer que l'on peut tracer n segments, deux à deux sans point commun, de sorte que tout point rouge soit relié à un point bleu et que tout point bleu soit relié à un point rouge.

Exercice 5
Soit $n > 0$ un entier. Chacune des n filles d'un groupe est la seule à connaître un certain potin. Pour partager leurs informations, elles se téléphonent deux à deux, mais à chaque fois, seule l'une parle et l'autre ne fait qu'écouter toutes les informations que son amie lui transmet.

Déterminer le nombre minimal de coups de téléphone suffisant pour que chacune des filles connaisse tous les potins.

Exercice 6
Trois pays ont chacun envoyé n mathématiciens à une conférence. Chaque mathématicien a des échanges avec $n+1$ des mathématiciens qui ne sont pas de son pays. Prouver qu'il existe trois mathématiciens qui ont deux à deux eu des échanges.

Exercice 7
Dans chaque case d'un tableau $n \times n$ est inscrit un nombre réel $(n \geq 2)$.
Lorsque l'on calcule la somme des deux plus grands nombres d'une même ligne, on trouve toujours le même résultat a. Lorsque l'on calcule la somme des deux plus grands nombres d'une même colonne, on trouve toujours le même résultat b. Prouver que $a = b$.

Exercice 8
Soit P un 2003-gone convexe tel que, pour tout sommet A de P, les 2000 diagonales issues de A divisent l'angle $\widehat{A}$ en 2001 angles égaux.
Prouver que P est un polygone régulier.

Exercice 9
Une unité de mesure est choisie dans le plan. On appelle réseau l'ensemble des points d'intersection de deux familles infinies de parallèles équidistantes. Prouver que si $\mathcal{P}$ est un n-gone régulier convexe, avec $n \geq 3$, dont tous les sommets appartiennent à un réseau donné, alors $n \in \{3, 4, 6\}$.

Exercice 10 (Théorème de Sylvester)
Soit E un ensemble fini non vide de points du plan tel que toute droite passant par deux points de E en contienne au moins un troisième.
Prouver que E est contenu dans une droite.

Exercice 11
Prouver que toute suite infinie de réels contient une sous-suite infinie monotone.

Exercice 12
Soit $a_1, ..., a_{2n+1}$ des entiers qui vérifient la propriété suivante :
Si l'un quelconque d'entre eux est omis, on peut répartir les autres en deux groupes de n nombres de sorte que les sommes des éléments des deux groupes soient égales.
Prouver que tous les a_i sont égaux.

Exercice 13
Soit $n > 0$ un entier. Un disque est divisé en $2n$ secteurs égaux. La moitié d'entre eux sont coloriés en rouge et les autres en bleu. A partir de secteurs arbitraires, les secteurs bleus sont numérotés de 1 à n dans le sens direct, alors que les secteurs rouges sont numérotés de 1 à n dans le sens indirect. Prouver qu'il existe un demi-disque formé de secteurs numérotés de 1 à n dans un certain ordre.

Exercice 14
Soit P un polygone simple (c.à.d. dont les côtés ne s'intersectent pas) ayant au moins quatre sommets.
Prouver que P possède une diagonale intérieure.

Solutions

Solution de l'exercice 1

L'ensemble des nombres attribués est une partie non vide de $\mathbb{N}$ et admet donc un plus petit élément. Soit donc m le plus petit des nombres attribués et A un point à qui on a attribué m. Si a, b, c, d sont les quatre nombres attribués aux voisins de A, on a donc $a, b, c, d \geq m$ par minimalité de m, d'où $\frac{a+b+c+d}{4} \geq m$ l'inégalité étant stricte si l'un des nombres a, b, c, d n'est pas égal à m. Or, par construction, on doit justement avoir $\frac{a+b+c+d}{4} = m$, donc $a = b = c = d = m$. Cela assure que les quatre voisins d'un point à qui a été attribué le nombre m ont eux aussi reçu le nombre m. Considérons un point B quelconque du plan, à coordonnées entières. Il est clair qu'en passant d'un point à coordonnées entières à un de ses voisins, on peut trouver un chemin de longueur finie qui relie A à B. Le résultat ci-dessus permet d'affirmer qu'à partir de A, et de proche en proche, tous les points du chemin auront reçu le nombre m. En particulier, B a reçu m. Puisque B est arbitraire, c'est donc que tout point du plan à coordonnées entières a reçu le nombre m.

Solution de l'exercice 2

Soit g un garçon qui a dansé avec le maximum de filles. On sait qu'il existe une fille f' qui n'a pas dansé avec g. De même, on sait qu'il existe un garçon g' qui a dansé avec f'. Parmi toutes les filles qui ont dansé avec g il doit en exister au moins une qui n'a pas dansé avec g', sans quoi g' aurait dansé avec au moins une fille de plus que g, en contradiction avec la maximalité de g. On choisit donc f parmi les filles qui ont dansé avec g mais pas avec g', et c'est gagné.

Solution de l'exercice 3

On note $C_1, ..., C_{12}$ les candidats dans l'ordre de leur prise de parole. Puisqu'au moins un a dit la vérité, on peut considérer le plus petit entier k tel que C_k ait dit la vérité (i.e. C_k est le premier à avoir dit la vérité). Par minimalité de k, tous ceux qui ont parlé avant lui ont menti. De plus, puisque C_k a dit la vérité, il y a eu exactement k mensonges avant sa prise de parole et donc exactement k mensonges après. Du coup, C_{k+1} a menti en disant qu'il y avait eu $k+1$ mensonges avant sa prise de parole, et y a donc eu justement $k+1$ mensonges après que C_{k+1} ait parlé. Donc, C_{k+2} a menti en disant qu'il y avait eu $k+2$ mensonges avant sa prise de parole, et y a donc eu justement $k+2$ mensonges après que C_{k+2} ait parlé, et ainsi de suite. Ainsi, tous les candidats qui ont parlé après C_k ont menti.
Et, finalement, seul C_k a dit la vérité. Il y a donc eu 11 menteurs.

Remarque. En fait, on peut préciser un peu la situation. En effet, si $k \geq 2$ alors, avec les notations ci-dessus, on sait que C_k a dit la vérité et qu'il y a eu exactement k mensonges avant sa prise de parole. En tenant compte du mensonge de C_{k-1}, c'est qu'il y avait donc eu exactement $k-1$ mensonges avant que C_{k-1} ne parle. Mais alors, C_{k-1} a dit la vérité, en contradiction avec la minimalité de k. Par suite, on doit avoir $k = 1$, ce qui signifie que c'est le premier candidat à avoir parlé qui est le seul à avoir dit la vérité.

Solution de l'exercice 4

Comme il n'existe qu'un nombre fini de points, il n'y a qu'un nombre fini de couplages des n points rouges avec les n points bleus. On considère alors un couplage pour lequel la somme des longueurs des segments est minimale.
Par l'absurde : supposons que, dans ce couplage minimal, il existe deux des segments qui s'intersectent.

Soit R, R' deux points rouges distincts, B, B' deux points bleus tels que les segments $[RB]$ et $[R'B']$ aient été tracés, et qui s'intersectent. Comme il n'y a pas trois points alignés et que les segments ont des extrémités deux à deux distinctes, c'est donc qu'il existe un point $I \in]RB[$ et $]R'B'[$. Mais alors, d'après l'inégalité triangulaire, on a
$BR' < BI + IR'$ et $B'R < B'I + IR$
d'où $BR' + B'R < BR + B'R'$.
Par suite, si l'on couple B avec R' et B' avec R, sans changer les autres couples, on obtient un nouveau couplage dont la somme des longueurs est strictement plus petite que celle de notre couplage minimal, ce qui est impossible.
Et donc, dans ce couplage minimal, il n'existe pas deux des segments qui s'intersectent, ce qui fournit une solution au problème.

Solution de l'exercice 5
Considérons un échange de coups de téléphone qui conduise à ce que chacune des filles soit au courant de tout. On appelle f la première fille à être au courant de tout.
Clairement, avant que f ait tout appris, il y a eu au moins $n-1$ coups de téléphone, un pour récupérer chacune des $n-1$ informations qu'elle ne connaissait pas (mais pas forcément directement vers f). D'autre part, dès que f sait enfin tout et qu'elle est la première fille dans ce cas, chacune des $n-1$ autres filles doit encore attendre au moins un coup de téléphone pour faire partie du club des personnes avisées (pas forcément donné par f). Ainsi, il faut au moins $2(n-1)$ coups de téléphone pour que chacune des filles connaisse tous les potins.
Réciproquement, il est facile de voir que cela est effectivement réalisable en $2(n-1)$ coups de téléphone : chacune des $n-1$ filles téléphone à une certaine fille f fixée à l'avance. Puis, f retéléphone à chacune d'elles.

Solution de l'exercice 6
On note A, B, C les trois pays. Parmi tous les mathématiciens, on peut considérer celui qui a eu le plus d'échanges avec des mathématiciens d'un même pays (s'il y a plusieurs tels mathématiciens, on choisit n'importe lequel d'entre eux). Sans perte de généralité, on peut supposer que ce maximum est m, qu'il s'agit du mathématicien a du pays A, et que ces m échanges ont eu lieu avec des mathématiciens de B. Puisqu'il n'y a que n mathématiciens de B à cette conférence, on a $m \leq n$. Et, comme a a eu $n+1$ échanges, il existe donc un mathématicien c du pays C qui a eu un échange avec a.
Par l'absurde : supposons que c n'ait eu d'échange avec aucun des m mathématiciens de B qui ont eu chacun un échange avec a.
Alors, c n'a pu avoir qu'au plus $n-m$ échanges avec des mathématiciens de B, et donc au moins $n+1-(n-m) = m+1$ échanges avec des mathématiciens de A. Cela contredit la maximalité de m.
Ainsi, il existe un mathématicien $b \in B$ qui a eu des échanges avec a et avec c. Ces trois mathématiciens a, b, c assurent la conclusion.

Solution de l'exercice 7
Par l'absurde : supposons que $a \neq b$.
Par symétrie des rôles, on peut supposer que $a > b$.
On dira que le nombre x est *gros* si $x > \frac{b}{2}$. Puisque la somme des deux plus grands nombres d'une même ligne vaut toujours a, avec $a > b$, c'est donc que le plus grand nombre de chaque ligne est un gros nombre et que chaque ligne contient au moins un gros nombre. En particulier, il y a donc au moins n gros nombres. Mais, il ne peut y avoir deux gros nombres dans une

même colonne, sans quoi la somme des deux plus grands nombres d'une telle colonne serait strictement supérieure à b, en contradiction avec l'énoncé. Ainsi, il ne peut y avoir plus de n gros nombres.
Finalement, il y a exactement n gros nombres, un par ligne et un par colonne.
Soit alors g le plus petit des gros nombres. Il existe donc m situé sur la même ligne que g tel que $m + g = a$ et m n'est pas un gros nombre. Dans la colonne de m, il existe donc un gros nombre G et un autre nombre m' tels que $G + m' = b$. Mais, $G > m$ (puisque m n'est pas gros) et m' est le second plus grand nombre de la colonne commune à G et m, donc $m' \geq m$. Enfin, par minimalité de g, on a $G \geq g$.
Mais alors $b = G + m' \geq g + m = a$, en contradiction avec $a > b$.
Et donc, on a $a = b$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>
Il y a des approches plus géométriques, mais la solution qui suit a le mérite d'être particulièrement efficace :
Appelons $A_1, ..., A_{2003}$ les sommets du polygone dans l'ordre trigonométrique (les indices sont considérés modulo 2003), et $\alpha_i = \widehat{A_{i-1}A_iA_{i+1}}$ pour tout i.
Ainsi, par hypothèse, les angles du triangle $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ valent $\frac{\alpha_{i-1}}{2001}, \alpha_i$ et $\frac{\alpha_{i+1}}{2001}$,
d'où $\alpha_i + \frac{\alpha_{i-1}+\alpha_{i+1}}{2001} = \pi$.
On pose $\beta_i = \alpha_i - \frac{2001}{2003}\pi$ pour tout i, et l'égalité précédente implique $\beta_{i+1} + \beta_{i-1} = -2001\beta_i$, puis $2001|\beta_i| \leq |\beta_{i+1}| + |\beta_{i-1}|$.
Soit alors j un indice pour lequel $|\beta_j|$ est maximal. On a donc $2001|\beta_j| \leq |\beta_{j+1}| + |\beta_{j-1}| \leq 2|\beta_j|$, d'où l'on déduit que $\beta_j = 0$. La maximalité de $|\beta_j|$ assure alors que $\beta_i = 0$ pour tout i, et donc $\alpha_i = \frac{2001}{2003}\pi$ pour tout i.
Ainsi, les angles intérieurs aux sommets de P sont tous égaux, et les triangles $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ sont tous isocèles, donc les côtés de P sont tous de même longueur.
Et finalement, P est un polygone régulier.

<u>Remarque.</u>
Le lecteur intéressé pourra vérifier que le résultat reste vrai si l'on remplace 2003 par $n \geq 5$, mais pas si P est un quadrilatère.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>
Soit $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ un repère lié au réseau, de sorte que chaque point du plan appartienne au réseau si et seulement si ses coordonnées dans $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ sont entières. On note h la distance entre deux parallèles consécutives d'une des deux familles de droites qui définissent le réseau, et h' la distance entre deux parallèles consécutives de l'autre famille.
Notons que si M est un point du réseau, tout autre point du réseau est à une distance de M supérieure ou égale à $m = \min(h, h')$, qui est un nombre strictement positif et indépendant de M.

Soit $\mathcal{P} = A_1...A_n$ un n-gone régulier convexe inscrit dans le réseau, de côté de longueur d.
- On suppose que $n \geq 7$:
Pour $i = 1, ..., n$, on pose $\overrightarrow{OB_i} = \overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ où les indices seront toujours considérés modulo n.
En particulier, pour tout i, on a
$OB_i = d$ et $(\overrightarrow{OB_i}; \overrightarrow{OB_{i+1}}) = (\overrightarrow{A_iA_{i+1}}; \overrightarrow{A_{i+1}A_{i+2}}) = \frac{2\pi}{n} \pmod{2\pi}$.
Et donc, le polygone $\mathcal{P}' = B_1...B_n$ est un n-gone régulier convexe.

D'autre part, puisque les points O, A_i et A_{i+1} ont des coordonnées entières dans $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, il en est de même de B_i, ce qui assure que B_i est un point du réseau. Ainsi, le polygone $\mathcal{P}'$ est inscrit dans le réseau. On note d' la longueur de son côté. Puisque d est le rayon du cercle circonscrit à $\mathcal{P}'$, le théorème d'Al-Kashi dans le triangle OB_1B_2 conduit directement à $d' = qd$ où $q = \sqrt{2(1-\cos(\frac{2\pi}{n}))}$. Or, comme $n \geq 7$ on a $0 < \frac{2\pi}{n} < \frac{\pi}{3}$ et donc $\cos(\frac{2\pi}{n}) > \frac{1}{2}$. Dans ces conditions, on a $q \in]0;1[$.
En recommençant le raisonnement ci-dessus à partir de $\mathcal{P}'$ puis des autres n-gones réguliers convexes inscrits dans le réseau obtenus à chaque étape, on en déduit que, pour tout entier $k \geq 0$, il existe un n-gone régulier convexe inscrit dans le réseau et de côté de longueur $d_k = dq^k$. Comme $q \in]0;1[$, il existe alors un entier $k \geq 0$ tel que $dq^k < m$, ce qui est absurde puisque d_k est la distance entre deux points (distincts) du réseau. Par conséquent, pour $n \geq 7$, il n'existe pas de n-gones réguliers convexes inscrits dans le réseau.
- Si $n = 5$, on note B_1 l'intersection des diagonales $[A_2A_4]$ et $[A_3A_5]$, et les points B_2, B_3, B_4, B_5 sont définis de manière analogue. Il est alors facile de vérifier que $B_1B_2B_3B_4B_5$ est un pentagone régulier convexe. De plus, $A_1A_5B_1A_2$ est un parallélogramme donc $\overrightarrow{A_1A_5} = \overrightarrow{A_2B_1}$, ce qui assure à nouveau que B_1 est un point du réseau. Il en est de même de B_2, B_3, B_4, B_5, d'où $B_1B_2B_3B_4B_5$ est un pentagone régulier convexe inscrit dans le réseau. Enfin, on a encore $B_1B_2 = qA_1A_2$ avec $q \in]0;1[$. Le raisonnement ci-dessus s'adapte alors afin d'obtenir la même contradiction.

Et finalement, si $\mathcal{P}$ est un n-gone régulier convexe, avec $n \geq 3$, dont tous les sommets appartiennent à un réseau donné, alors $n \in \{3,4,6\}$.

Remarque.
Il est facile de vérifier que pour chacune des valeurs $n = 3, 4, 6$, il existe un réseau dans lesquel on puisse inscrire un n-gone régulier convexe. Il est laissé au lecteur le plaisir de prouver que, par contre, il n'existe pas de réseau dans lequel on puisse inscrire à la fois un triangle équilatéral, un carré et un hexagone régulier.

Solution de l'exercice 10
Par l'absurde : supposons que les points de E ne soient pas tous alignés.
Il existe donc un ensemble fini non vide de triangles non dégénérés dont les trois sommets appartiennent à E. Parmi eux, on en choisit un dont une des hauteurs est minimale. Disons que le triangle est ABC et que $AH = d$ est minimale, où H est le pied de la hauteur issue de A dans ABC.
Puisque (BC) passe par deux points de E, cette droite contient au moins un autre point de E, ce qui assure qu'il y a deux points de E sur (BC) qui sont du même côté de H (éventuellement H est l'un d'eux). Sans perte de généralité, on peut supposer qu'il s'agisse des points X et Y, avec $X \in [HY]$.
Or, dans un triangle, la plus petite hauteur est toujours perpendiculaire au plus grand côté (le produit de la hauteur et du côté opposé donne deux fois l'aire du triangle) et donc issue du sommet en lequel on trouve le plus grand angle. Par notre choix, on a $\widehat{AXY} \geq \frac{\pi}{2}$ et l'angle en X est alors le plus grand (strictement) des angles dans AXY. La hauteur issue de X dans AXY est donc strictement inférieure à celle issue de A, en contradiction avec la minimalité de d.
Ainsi, dans tous les cas, on obtient une contradiction. Cela entraine que tous les points de E sont alignés.

Remarque.

Que l'on ne s'y trompe pas : cette preuve est très simple mais il a fallu près de 50 ans pour la trouver...

<u>*Solution de l'exercice 11*</u>
Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite infinie de réels et $E = \{u_n / \text{ si } k > n \text{ alors } u_k < u_n\}$
- Si E est infini alors la sous-suite de $(u_n)_{n\geq 0}$ formée des éléments de E est strictement décroissante, ce qui conclut dans ce cas.
- Si E est fini ou vide, on note p le plus grand indice d'un élement de E (avec $p = -1$ si E est vide). On pose alors $v_1 = u_{p+1}$ et, par définition de p, on a $u_{p+1} \notin E$. Cela signifie qu'il existe $k > p+1$ tel que $u_k \geq u_{p+1}$. Choisissons le plus petit entier k qui vérifie cette propriété et on pose $v_2 = u_k$, d'où $v_2 \geq v_1$. Puisque $k > p+1$, on a donc $u_k \notin E$ et on peut recommencer le même raisonnement. Une récurrence immédiate conduit alors à l'existence d'une suite strictement croissante d'indices $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que la sous-suite $(u_{a_n})_{n\geq 0}$ soit croissante, ce qui conclut dans ce cas.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u>
Par l'absurde : supposons qu'il existe des entiers $a_1, ..., a_{2n+1}$ non tous égaux qui vérifient les conditions de l'énoncé.

Parmi tous les $(2n+1)$-uplets possibles de tels nombres, on peut en choisir un tel que $\sum_{i=1}^{2n+1} |a_i|$ soit minimale.
Posons $S = a_1 + ... + a_{2n+1}$.
Pour tout i, par hypothèse, il est possible de répartir les a_j tels que $i \neq j$ en deux groupes de n nombres de même somme. On note s_i cette somme commune. Alors $S = a_i + 2s_i$ pour tout i.
Ainsi, les a_i ont tous la même parité (qui est celle de S).
S'ils sont tous pairs, alors il est facile de vérifier que les entiers $\frac{a_1}{2}, ..., \frac{a_{2n+1}}{2}$ ne sont pas tous égaux et vérifient les conditions de l'énoncé. Pourtant, on a $\sum_{i=1}^{2n+1} \left|\frac{a_i}{2}\right| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2n+1} |a_i|$ et le caractère minimal des a_i entraine alors que $\sum_{i=1}^{2n+1} |a_i| = 0$, puis que $a_i = 0$ pour tout i, en contradiction avec le fait que les a_i ne sont pas tous égaux.
S'ils sont tous impairs, on vérifie cette fois que les entiers $\frac{a_1-1}{2}, ..., \frac{a_{2n+1}-1}{2}$ ne sont pas tous égaux et vérifient les conditions de l'énoncé. Mais, pour tout entier $x \neq 0$, on a $|\frac{x-1}{2}| \leq |x|$ avec égalité si et seulement si $x = -1$. Or, nous sommes dans le cas où les a_i sont tous impairs donc aucun n'est égal à 0, et nous avons supposé qu'ils n'étaient pas tous égaux, donc ils ne peuvent être tous égaux à -1. Par suite, on a $\sum_{i=1}^{2n+1} \left|\frac{a_i - 1}{2}\right| < \sum_{i=1}^{2n+1} |a_i|$, en contradiction avec le caractère minimal des a_i.
Dans tous les cas, nous avons obtenu une contradiction, et cela conclut.

<u>Remarque.</u>
Il est facile de vérifier que le résultat reste vrai si l'on suppose que les a_i sont rationnels : il suffit de les multiplier tous par un même coefficient pour se ramener au cas ci-dessus.
En fait, le résultat reste vrai même si les a_i sont juste supposés réels, mais cela utilise des notions d'algèbre linéaire qui sortent du cadre de ce polycopié.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u>

On note b_i (resp. r_i) le secteur bleu (resp. rouge) qui porte le numéro i, et ces numéros sont considérés modulo n. Pour tout i, les secteurs b_i et r_i sont séparés par deux groupes de secteurs, selon que l'on tourne dans un sens ou dans l'autre. Parmi ces deux groupes, le plus petit nombre de secteurs qui séparent b_i et r_i sera appelé *la distance entre* b_i *et* r_i, que l'on notera d_i. Parmi les nombres $d_1, ..., d_n$, on choisit le plus petit d'entre eux (ou l'un des plus petits si cette valeur apparaît plusieurs fois), disons d_m. Supposons que si l'on tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, on rencontre r_m puis d_m secteurs, puis b_m (l'autre cas se résout de façon similaire).
Par l'absurde : supposons que, parmi les d_m secteurs qui séparent b_m et r_m, il y en ait au moins un de chaque couleur.
Alors $d_m \geq 2$ et l'ordre de numérotation impose que l'un de ces secteurs est b_{m-1} et un autre est r_{m-1}. Mais alors $d_{m-1} \leq d_m - 2$, ce qui contredit la minimalité de d_m.
Ainsi, les d_m secteurs qui séparent b_m et r_m sont d'une même couleur et, si $d_m \geq 1$ l'ordre de numérotation impose qu'ils portent les numéros $m-1, m-2, ..., m-d_m$.
- S'ils sont bleus ou si $d_m = 0$, on considère le demi-disque D qui contient r_m et les d_m secteurs ci-dessus, mais qui ne contient pas b_m. Soit k le nombre total de secteurs bleus contenus dans D. L'ordre de numérotation impose alors que D contienne les secteurs bleus de numéros $m-k, ..., m-d_m, ..., m-2, m-1$. D'autre part, D contient exactement $n-k$ secteurs rouges, qui portent les numéros $m, m+1, ..., m+n-k-1$. Et ainsi, le demi-disque D convient.
- S'ils sont rouges, on raisonne de la même façon avec le demi-disque D' qui contient b_m et les d_m secteurs ci-dessus, mais qui ne contient pas r_m.

Solution de l'exercice 14
Comme P est borné et n'a qu'un nombre fini de sommets, il existe une droite d qui n'a aucun point commun avec P et qui n'est parallèle à aucune des droites reliant deux des sommets de P. Ce choix de d assure alors que, parmi les sommets de P, il en existe un et un seul dont la distance à d soit minimale. On appelle A ce sommet, et on désigne par B et C les deux sommets voisins de A le long du bord de P. Soit Δ la parallèle à d qui passe par A. Alors, tout le polygone P est dans un même demi-plan ouvert délimité par Δ (sauf A qui est sur Δ), et on a alors $\widehat{BAC} < \pi$ (l'idée est d'isoler une "pointe" de P).
Soit S l'ensemble des sommets de P autres que A, B, C qui sont à l'intérieur ou sur les bords du triangle ABC.
Si S est vide alors, comme P n'est pas un triangle, le segment $[BC]$ est bien une diagonale, et elle est intérieure à P.
Si S n'est pas vide, il est tout de même fini et il existe donc un point, disons D, dont la distance à (BC) est maximale. Cette fois, c'est $[AD]$ qui est une diagonale intérieure à P.
En effet, par l'absurde, supposons que $[AD]$ ne soit pas intérieure à P.
Alors, c'est qu'un côté $[XY]$ de P coupe $[AD]$, et l'un des points X ou Y, disons X, est du même côté que D de (BC), mais à une distance de (BC) strictement supérieure à celle de D. Le caractère maximal de D entraine donc que X n'est pas dans S, ce qui implique que $[XY]$ coupe également $[AB]$ ou $[AC]$. Cela contredit que P soit simple.
Ainsi, dans tous les cas, on a trouvé une diagonale intérieure à P, ce qui conclut.

2 après-midi : Pierre Bertin

Généralités sur les graphes

Définition 1. Un graphe $\mathcal{G}$ est composé d'un ensemble de sommets $\mathcal{S}$ et d'un ensemble d'arêtes $\mathcal{A}$.

1. On dit que $\mathcal{G}$ est connexe si pour tous sommets x et y il existe un chemin allant de x à y en passant par des arêtes.
2. le degré d'un sommet x noté $d(x)$ est le nombre d'arêtes sortant de x.
3. $\sum d(x) = 2A$ (où $A =$ nombre total d'arêtes).

Exercice 1
Un petit village en forêt comporte 100 habitants et une Schtroumpfette. Montrer qu'il existe un nombre pair de Schtroumpfs qui ont un nombre impair d'amis (on considère que l'amitié est réciproque).

Exercice 2
Montrer qu'un graphe à n sommets qui ont tous un degré supérieur ou égal à 2 possède un cycle. Montrer qu'un graphe à n sommets qui a au moins n arêtes possède un cycle.

Exercice 3
On considère le réseau ferré de la Bordurie. La capitale Szohôd est reliée à 60 villes et chaque ville est reliée à exactement 6 autres villes. De plus il est possible de voyager de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre en train. Montrer qu'il est possible de fermer 30 lignes sortant de la capitale en préservant la capacité de voyager d'un ville à l'autre.

Exercice 4
Dans un stage de 44 élèves, montrer qu'il en existe au moins 2 qui ont un nombre pair (éventuellement nul) de connaissances communes dans le groupe.

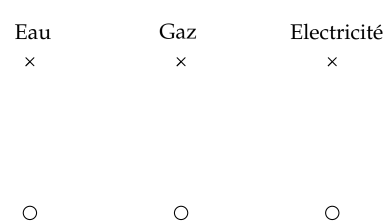
Exercice 5
Dans un tableau $n \times n$ on écrit des entiers de telle sorte qu'il n'existe pas deux lignes identiques. Montrer que l'on peut supprimer une colonne de telle sorte que dans le tableau $n \times (n-1)$ restant il n'y a pas deux lignes pareil.

Graphes planaires

Définition 2. Un graphe planaire est un graphe que l'on peut dessiner dans le plan sans que deux arêtes se coupent.

Formule d'Euler : si $\mathcal{G}$ est un graphe planaire connexe, alors $S + F = A + 2$.

Exercice 6
On veut raccorder 3 maisons à trois usines : l'eau, le gaz et l'électricité, sans que les conduites se croisent. Est-ce possible ?



Exercice 7
Soit $\mathcal{G}$ un graphe planaire avec un nombre fini de sommets. Montrer qu'il existe un point de $\mathcal{G}$ de degré ne dépassant pas 5.

Exercice 8
Les 11 villes de Syldavie sont reliées deux à deux soit par une route, soit par une voie ferrée. Montrer qu'il existe deux routes qui se croisent ou deux voies ferrées qui se croisent.

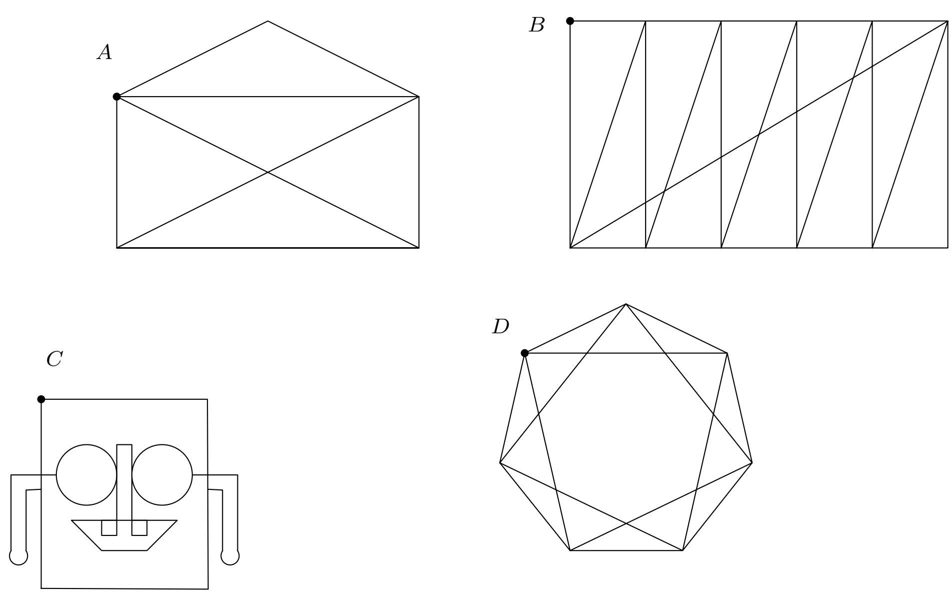
Exercice 9
On considère le graphe $\mathcal{G}_n$ dont les sommets sont les entiers de 1 à n. Deux points a et b sont reliés ssi $a+b$ est premier. Pour quels n le graphe $\mathcal{G}_n$ est-il planaire ?

Chemins sur les graphes

Définition 3. Un graphe est dit *eulérien* s'il existe un chemin qui passe une et une seule fois par toutes les arêtes. Un graphe est dit *hamiltonien* s'il existe un chemin qui passe une et une seule fois par tous les sommets.

Théorème
Un graphe est eulérien ssi le nombre de sommets de degré impair est soit 0 soit 2.

Exercice 10
Parmi les figures suivantes, lesquelles peut-on tracer sans lever le crayon et sans repasser sur les traits ?



Exercice 11
On considère un échiquier $4 \times n$ sur lequel est posé un cavalier. Montrer que le cavalier ne peut pas faire un cycle (c'est à dire qu'il revient à sa case départ) qui passe une et une seule fois par toutes les cases.

Exercice 12

Les $2n$ supervillains de la "Legion of Doom" veulent s'asseoir autour de la table ronde de leur quartier général, mais certains d'entre eux sont ennemis. Cependant chacun a au plus $n-1$ ennemis. Montrer que Lex Luthor peut les placer de telle sorte que deux ennemis ne sont jamais côte à côte.

Solutions

Solution de l'exercice 1
On va utiliser la formule $\sum d(x) = 2A$.

$$\sum_{x\in\mathcal{S};d(x)\text{ pair}} d(x) + \sum_{x\in\mathcal{S};d(x)\text{ impair}} d(x) = 2A.$$

Le premier terme est pair et $2A$ est pair donc le terme restant est pair lui aussi. Une somme de nombres impairs est paire ssi le nombre de terme est pair, il y a donc un nombre pair de sommets de degré impair.

Solution de l'exercice 2
Prenons un graphe dont tous les sommets sont de degré ≥ 2 et baladons nous. À chaque sommet on prend une arête différente de celle de laquelle on vient (ce qui est toujours possible puisque les degrés sont ≥ 2) et on s'arrête dès que l'on revient à un point déjà visité. Quand on arrive à un point déjà visité, c'est qu'on a fait un cycle.
Pour la deuxième question, nous allons faire une démonstration par récurrence. Le seul graphe à 3 sommets et 3 arêtes est le triangle, qui a bien un cycle. Ensuite, supposons que la propriété est vraie pour n et prenons un graphe à $n+1$ sommets et au moins $n+1$ arêtes. Par la question précédente, si tous les points sont de degré ≥ 2 alors il existe un cycle et on a fini. Sinon, cela signifie qu'il y a un sommet de degré 1 (ou 0). Si on supprime ce sommet et (éventuellement) l'arête qui en sort, on se retrouve avec un graphe à n sommets et au moins n arêtes, qui contient un cycle par l'hypothèse de récurrence.

Solution de l'exercice 3
Voyons ce qui se passe lorsqu'on retire la capitale de la carte. Les villes restantes sont partagées en petits îlots séparés. Dans chaque composante connexes, le degré des sommets est 5 si la ville était connectée à la capitale, et 6 sinon. Comme le nombre de sommets de degré impair est pair, il y a un nombre pair de villes qui étaient connectées à la capitale, et donc au moins 2. À présent on va remettre la capitale et ne rouvrir qu'une voie qui va de la capitale vers un îlot. Ainsi on a rouvert moins de la moitié des voies sortant de la capitale, et il est possible de relier toutes les ville.

Solution de l'exercice 4
Traçons le graphe des connaissances : chaque sommet correspond à un élève et deux sommets sont reliés si les élèves se connaisent. On appellera un lien entre x et y un chamin de longueur 2 entre x et y. Nous voulons prouver qu'il existe deux sommets reliés par un nombre pair de liens. Raisonnons par l'absurde et supposons que deux personnes ont toujours un nombre impair de connaissances en commun. Prenons un sommet x et notons $\mathcal{S}_x$ l'ensemble des sommets voisins de x. Un lien reliant x à un autre sommet a toujours pour point intermédiaire un sommet de $\mathcal{S}_x$. Prenons un sommet $y \in \mathcal{S}_x$. Par hypothèse, il y a un nombre impair de liens

reliant x et y et donc dans le sous graphe restreint à $\mathcal{S}_x$, y est de degré impair. Ainsi, dans $\mathcal{S}_x$, tous les sommets sont de degré impair, par la propriété de l'exo 1, il y a donc un nombre pair de sommets, x est de degré pair. Comme ceci est vrai pour n'importe quel sommet, cela signifie que tous les sommets sont de degré pair.
Maintenant nous allons nous intéresser aux sommets $\mathcal{T}_x$ qui ne sont ni x, ni reliés à x. Le graphe est constitué de $x \cup \mathcal{S}_x \cup \mathcal{T}_x$. Chaque point de $\mathcal{S}_x$ est de degré pair et est relié à x et à un nombre impair de sommets de $\mathcal{S}_x$, il est donc relié à un nombre pair de sommets de $\mathcal{T}_x$. Mais chaque sommet de $\mathcal{T}_x$ est relié à un nombre impair de sommets de $\mathcal{S}_x$, par notre hypothèse de raisonnement par l'absurde. Il s'ensuit qu'il y a un nombre pair de sommets dans $\mathcal{T}_x$. Mais alors si $|\mathcal{S}_x|$ est pair et $|\mathcal{T}_x|$ est pair, le nombre d'élèves total est impair, ce qui est en contradiction avec notre situation de 44 élèves.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>
Nous allons raisonner par l'absurde. Supposons que pour chaque colonne c_k il existe deux lignes l_i, l_j qui sont identiques partout sauf sur cette colonne. Nous allons dessiner un graphe : chaque sommet correspond à une ligne et chaque arête correspond à une colonne : l'arête k relie deux lignes l_i, l_j qui sont identiques sauf sur la colonne c_k. Nous avons ainsi un graphe avec n sommets et n arêtes. D'après le deuxième exercice, cela signifie qu'il existe un cycle : il existe une suite $k_1, k_2, \ldots, k_t$ et des lignes $l_1, \ldots, l_t$ telles que les deux lignes l_i et l_{i+1} sont identiques sauf sur la colonne c_{k_i}, et l_t et l_1 sont identiques sauf sur c_t. Je vous laisse vérifier que ceci est impossible.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>
Je vais montrer que c'est impossible, c'est-à-dire que le graphe complet bipartite $\mathcal{K}_{3,3}$ n'est pas planaire. Ce graphe a 6 sommets et 9 arêtes. Regardons maintenant les faces. Chaque face a au moins 4 côtés, puisqu'on ne peut pas avoir de triangles, et chaque arête est sur deux faces. Donc $2A \geq 4F$ et $F \leq 4.5$. Mais la formule d'Euler nous donne $F + 6 = 9 + 2$ et donc $F = 5$, ce qui est une contradiction.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>
Chaque face du graphe a au moins 3 côtés, et chaque arête est sur deux faces donc $2A \geq 3F$. Par la formule d'Euler,

$$F + S = A + 2, \implies S \geq A + 2 - \frac{2}{3}A = \frac{1}{3}A + 2.$$

Maintenant supposons que tous sommets sont de degré ≥ 6. Alors

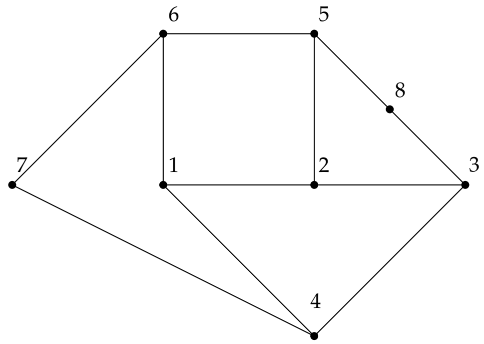
$$2A = \sum d(x) \geq 6S.$$

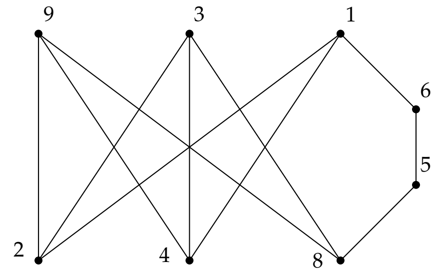
Il est facile de voir que ces deux inégalités sont contradictoires.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>
Il y a 11 villes et 55 liaisons. Par le principe des tiroirs, il y a au moins 28 liaisons de la même nature, par exemple en train. Considérons le graphe du réseau ferré, et supposons qu'il est planaire. Il y a 11 sommets et au moins 28 arêtes. Chaque face a au moins trois côtés, et chaque arête est sur deux faces, donc $2A \geq 3F$ et $F \leq \frac{2}{3}A$. Mais par la formule d'Euler, $F = A+2-S = A - 9 > \frac{2}{3}A$, d'où la contradiction.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

Il est possible de dessiner $\mathcal{G}_8$ dans le plan, mais en arrangeant $\mathcal{G}_9$ on peut retrouver le graphe des trois maisons et des trois usines, qui n'est pas planaire.





<u>*Solution de l'exercice 10*</u>
On peut tracer A, B et D mais pas C.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u>
Considérons le graphe dont les sommets sont les cases de l'échiquier et deux cases sont reliées si un cavalier peut sauter de l'une à l'autre. On cherche un cycle hamiltonien dans ce graphe. Tout d'abord si on colorie les cases de l'échiquer, on voit que le cavalier va alterner case blanche-case noire. Ensuite, on sépare les deux lignes extérieures de l'échiquier $4 \times n$ des deux lignes intérieures. Après chaque case extérieure, le cavalier doit aller vers une case intérieure, et comme on veut faire un cycle, et qu'il y a autant de cases intérieures que de cases extérieures, cela signifie que le cavalier va alterner entre case intérieure et case extérieure. Mais alors cela voudrait dire que toutes les cases extérieures sont blanches et toutes les cases intérieures sont noires, ce qui n'est pas la façon de colorier un échiquier.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u>
Le but de l'exercice est de trouver un cycle hamiltonien dans le graphe des gens qui ne sont pas ennemis.
Regardons une configuration de la table ronde : $AB \dots Z(A)$. Sil y a des ennemis côte à côte, en tournant la table on peut supposer que ce sont A et B. Nous allons supposer que plus loin autour de la table il y a deux personnes A' et B' assises dans cet ordre telles que A et A' soient amies, et de même pour B et B' (je prouverai ce résultat plus tard). Ensuite nous allons faire la substitution suivante :

$$ABC \dots A'B' \dots Z \longrightarrow A(A' \dots CB)B' \dots Z$$

où l'on a renversé l'ordre des gens entre B et A'. Ainsi on a baissé de 1 le nombre de couples ennemis assis côte à côte, et en continuant on peut tous les éliminer. Il nous reste à présent à prouver le résultat : Il existe plus loin autour de la table deux personnes A' et B' assises dans cet ordre telles que A et A' soient amies, et de même pour B et B'. Supposons par l'absurde que ce n'est pas vrai. Alors on aura que chaque ami de A a à sa droite un ennemi de B. Mais A a au moins n amis et B a au plus $n-1$ ennemis, ce n'est donc pas possible.

2 Mercredi : Arithmétique

1 matin : François Lo Jacomo

Rappels divisibilité - congruences

La division euclidienne : pour tout (a, b) couple d'entiers naturels non nuls, il existe (q, r) tels que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$, peut être réitérée sous forme d'algorithme d'Euclide (cf exercice 1) permettant de trouver le plus grand diviseur commun d des deux entiers. En remontant l'algorithme d'Euclide, on trouve la relation de Bézout : $d = au + bv$ avec u et v entiers, ce qui prouve que tout diviseur commun de a et b divise leur PGCD. Cette relation de Bézout permet aussi de démontrer le théorème de Gauss : si a divise bc et a est premier avec b, a divise c.
Dire que $a \equiv b \pmod{c}$ équivaut à dire que $a - b$ est divisible par c. Ceci permet de définir des classes de congruences modulo un entier c (ensemble des nombres congrus à un même $b \pmod{c}$). Si, modulo c, $a \equiv b$ et $a' \equiv b'$, $a + a' \equiv b + b'$, $aa' \equiv bb'$, $a^k \equiv b^k$ pour tout entier k. Si k nombres $c_1, c_2 \ldots c_k$ sont deux à deux premiers entre eux, le système :

$$a \equiv b_1 \pmod{c_1}$$
$$a \equiv b_2 \pmod{c_2}$$
$$\ldots$$
$$a \equiv b_k \pmod{c_k}$$

admet toujours une infinité de solutions de la forme : $a \equiv b \pmod{c_1 c_2 \ldots c_k}$ (théorème chinois). Enfin, si p est un nombre premier, pour tout entier a, $a^p \equiv a \pmod{p}$ (petit théorème de Fermat).

Exercice 1
Quel est le PGCD de 8463 et 1001 ?

Exercice 2
Pour quelles valeurs de p et q entiers strictement positifs pq divise-t-il $3(p-1)(q-1)$?

Exercice 3
Trouver tous les entiers n vérifiant : $n \equiv 3 \pmod{5}$, $n \equiv 4 \pmod{7}$, $n \equiv 5 \pmod{3}$.

Exercice 4
Montrer que pour tout entier k, on peut trouver une infinité d'entiers n tels qu'aucun des nombres $n+1, n+2, \ldots n+k$ ne soit premier.

Exercice 5
Trouver tous les couples de nombres premiers (p, q) tels que pq divise $(2^p - 1)(2^q - 1)$

Equations diophantiennes

Une équation diophantienne est une équation dont on recherche les solutions entières. Les techniques de résolution sont multiples, et certaines de ces équations sont parmi les problèmes les plus difficiles des mathématiques.

Exercice 6
Existe-t-il des entiers x, y tels que $x^6 = 2y^2 + 2$?

Exercice 7
Trouver tous les couples d'entiers naturels (x, y) tels que : $7^x - 3 \times 2^y = 1$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
En posant les divisions euclidiennes, on obtient :

$$8463 = 8 \times 1001 + 455$$

$$1001 = 2 \times 455 + 91$$

$$455 = 5 \times 91 + 0$$

Le PGCD est le dernier reste non nul, à savoir : 91. On peut remonter l'algorithme d'Euclide ci-dessus afin de trouver la relation de Bézout : $91 = 1001 - 2 \times 455 = 1001 - 2 \times (8463 - 8 \times 1001) = 17 \times 1001 - 2 \times 8463$.

Solution de l'exercice 2
Il est nécessaire (mais non suffisant) que p et q divisent tous deux $3(p-1)(q-1)$. Or p est premier avec $p-1$, donc d'après le théorème de Gauss, p doit diviser $3(q-1)$. De même, q, premier avec $q-1$, doit diviser $3(p-1)$. Supposons que $p \geq q$ (puisque p et q jouent des rôles symétriques, on peut supposer cela "sans perte de généralité"). p divise $3(q-1) \leq 3(p-1) < 3p$, donc on peut avoir : soit $3(q-1) = 2p$, soit $3(q-1) = p$. Dans le premier cas, q doit diviser $3(p-1) = 3\left(\frac{3(q-1)}{2} - 1\right) = \frac{9q-15}{2}$, donc a fortiori q doit diviser $9q - 15$, il doit diviser 15, ce qui offre quatre possibilités :
$q = 15$, d'où $p = \frac{3(q-1)}{2} = 21$, or 21×15 ne divise pas $3 \times 20 \times 14$ bien que 21 divise 3×14 et 15 divise 3×20.
$q = 5, p = 6$ qui est effectivement solution : 6×5 divise $3 \times 5 \times 4$.
$q = 3, p = 3$ n'est pas solution, et $q = 1, p = 0$ non plus.
Si maintenant $3(q-1) = p$, q doit diviser $3(p-1) = 3(3(q-1)-1) = 9q - 12$, donc q doit diviser 12 : $q = 12, p = 3(q-1) = 33$ n'est pas solution de l'équation de départ, $q = 6, p = 15$ non plus, mais $q = 4, p = 9$ est bien solution, $q = 3, p = 6$ non, $q = 2, p = 3$ est encore solution, $q = 1, p = 0$ non. Le problème admet donc trois solutions à permutation près : $(6, 5), (4, 9)$ et $(2, 3)$.

Solution de l'exercice 3
$n = 5k_1 + 3$ doit être congru à 4 modulo 7, d'où $5k_1 \equiv 1 \pmod 7$. Ceci est vérifié si $k_1 \equiv 3 \pmod 7$, auquel cas : $n = 5k_1 + 3 = 35k_2 + 18$, et ceci doit être congru à 5 modulo 3 (on aurait pu écrire $\equiv 2$ ou $-1 \pmod 3$, cela revenait au même). Toujours est-il que $35k_2$ doit être congru à $5 - 18 = -13 \pmod 3$, donc $2k_2 \equiv 2 \pmod 3$: $k_2 = 3k_3 + 1$, d'où $n = 5k_1 + 3 = 35k_2 + 18 = 105k_3 + 53$. C'est la solution générale du système : tout n de la forme $105k + 53$

vérifie manifestement les trois congruences de l'énoncé, et d'après le raisonnement ci-dessus, eux seuls sont solutions.

Solution de l'exercice 4

Une démonstration possible consiste à utiliser le théorème chinois : considérons k nombres premiers $p_1, p_2, \ldots p_k$. Le système :

$$n \equiv -1 \pmod{p_1}$$

$$n \equiv -2 \pmod{p_2}$$

$$\ldots$$

$$n \equiv -k \pmod{p_k}$$

admet une infinité de solutions, du type : $n \equiv A \pmod{p_1 p_2 \ldots p_k}$. Dès que n sera supérieur à $p_1 p_2 \ldots p_k$, tous les $n+i$ seront divisibles par p_i tout en étant trop grand pour être égal à p_i, donc ils seront tous non premiers.

Une autre technique de démonstration consiste à expliciter une infinité de nombres vérifiant cette propriété. En l'occurrence, les $n_q = q(k+1)! + 1$. En effet, pour tout i compris entre 1 et k, $(k+1)!$ est divisible par $i+1$, donc $n_q + i = (q(k+1)!+1) + i$ est lui aussi divisible par $i+1$, donc non premier.

Solution de l'exercice 5

Comme, d'après le théorème de Fermat, $2^p \equiv 2 \pmod{p}$, p est premier avec $2^p - 1$, donc p doit diviser $2^q - 1$. De même, q doit diviser $2^p - 1$. On peut supposer que $p \geq q$. L'égalité est exclue, car p ne peut pas diviser $2^p - 1$. $2^p - 1$ est divisible par q, mais $2^{q-1} - 1$ est lui aussi divisible par q, si $q > 2$. Or $q - 1 < p$ est premier avec p, de sorte qu'il existe u et v tels que $(q-1)u = pv + 1$. $2^{(q-1)u} \equiv 1^u \pmod{p}$, $2^{pv} \equiv 1^v \pmod{p}$. En rapprochant ces deux congruences, on devrait avoir : $1 \equiv 2 \pmod{p}$ ce qui est absurde. Donc il n'existe pas de solutions pour lesquelles $p \geq q > 2$. On peut aussi exclure le cas où l'un au moins des deux nombres premiers serait 2, car le nombre pair pq ne pourrait pas diviser le nombre impair $(2^p - 1)(2^q - 1)$. Il n'existe donc pas de couple (p, q) répondant à la question.

Solution de l'exercice 6

D'après le petit théorème de Fermat, pour tout entier x, $x^6 \equiv 0$ ou $1 \pmod{7}$. En revanche, modulo 7, y^2 prend quatre valeurs : $0, 1, 4, 2$, et $2y^2 + 2$ peut prendre lui aussi quatre valeurs : $2, 4, 3, 6$. En particulier, il ne peut prendre ni la valeur 0 ni la valeur 1. Il en résulte que $2y^2 + 2$ ne peut jamais être égal à x^6.

En l'occurrence, on peut démontrer plus simplement l'impossibilité. $2y^2 + 2$ étant pair, x doit lui aussi être pair, ce qui entraîne que x^6 est divisible par $2^6 = 64$. Or $2y^2 + 2$ ne peut pas être divisible par 8. En effet, si y est pair, $y^2 + 1 \equiv 1 \pmod{4}$, et si y est impair, $y^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$: $y^2 + 1$ n'est jamais divisible par 4. Un multiple de 64 ne peut pas être égal à un entier non multiple de 8.

Solution de l'exercice 7

On gagne à écrire différemment l'équation : $7^x - 1 = 3 \times 2^y$. En effet cela permet de factoriser $(7-1)$ dans le membre de gauche, soit : $(7-1)(7^{x-1} + 7^{x-2} + \ldots + 7 + 1) = 3 \times 2^y$, ou encore, en simplifiant par 6 : $7^{x-1} + 7^{x-2} + \ldots + 7 + 1 = 2^{y-1}$. On voit dans l'équation initiale que x ne peut pas être égal à 0. En revanche, il peut être égal à 1, auquel cas $y = 1$. Si $y > 1$,

2^{y-1} est pair, ce qui entraîne que le membre de gauche est pair, donc somme d'un nombre pair de termes (tous impairs), donc que x est pair. On peut donc grouper les termes deux par deux et factoriser : $(7+1)\left(7^{x-2}+7^{x-4}+\ldots+7^2+1\right)=2^{y-1}$, ou encore en simplifiant par 8 : $7^{x-2}+7^{x-4}+\ldots+7^2+1=2^{y-4}$. On voit une seconde solution : $y=4, x=2$. Mais pour $y>4$, 2^{y-4} est pair, le premier membre doit donc à nouveau contenir un nombre pair de termes, que l'on peut grouper deux par deux en factorisant : $(7^2+1)\left(7^{x-4}+7^{x-8}+\ldots+7^4+1\right)=2^{y-4}$. Mais $7^2+1=50$ ne peut pas diviser une puissance de 2, d'où contradiction : il n'existe pas de solution pour $y>4$, et les seules solutions de l'équation sont $(1,1)$ et $(2,4)$.

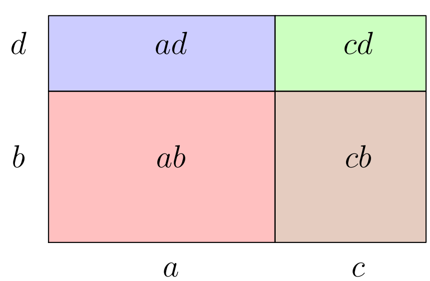
2 après-midi : Roger Mansuy

Factorisation du rectangle

Proposition
Soit a, b, c et d des entiers. Alors,

$$ab+bc+cd+da=(a+c)(b+d).$$

L'appellation rectangle se justifie par l'explication graphique suivante :



Corollaire
Soit x et y des entiers. Alors

$$\begin{aligned} xy+x+y &= (x+1)(y+1)-1, \\ xy-x-y &= (x-1)(y-1)-1. \end{aligned}$$

Exercice 1
Trouver toutes les solutions entières (a,b) avec $a>b>0$ de l'équation
$ab-a-b=1$.

Exercice 2
Trouver toutes les solutions entières (a,b) de l'équation $a^2b^2=a^2+b^2$.

Exercice 3
Trouver toutes les solutions entières (a,b) de l'équation $3a^2b^2+b^2=517+30a^2$.

Exercice 4

Trouver le plus petit entier n tel que l'écriture « développée » de $(xy-7x-3y+21)^n$ comporte 2012 termes.

Exercice 5
Soit p et q des nombres premiers distincts. Déterminer les solutions (a, b) entières de

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{pq}.$$

Exercice 6
Déterminer les solutions (a, b) entières de

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{37}.$$

Factorisation de Sophie Germain

Proposition
Soit a, b des entiers. Alors,

$$a^4+4b^4=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab).$$

Démonstration
Il suffit d'écrire $a^4+4b^4=a^4+4a^2b^2+4b^4-4a^2b^2=(a^2+2b^2)^2-(2ab)^2$.

Remarque
On peut remarquer, notamment, que $a^2+2b^2-2ab=(a-b)^2+b^2\geq b^2$.

Exercice 7
Déterminer la décomposition en facteurs premiers de 25^2+72^2.

Exercice 8
Montrer que $4^{545}+545^4$ n'est pas premier.

Exercice 9
Déterminer les entiers positifs n tels que 4^n+n^4 est premier.

Exercice 10
Montrer qu'il existe une infinité d'entiers a tels que n^4+a n'est premier pour aucun $n\in\mathbb{N}$.

Changement de racines

L'idée des exercices suivants est toujours la même.

1. Se ramener à une équation polynomiale en a et b
2. Choisir une solution (a, b) telle que la somme $a+b$ soit minimale

3. Montrer que a est solution d'une équation de degré 2 et considérer a' l'autre solution de cette équation
4. Montrer que (a', b) est, sous de bonnes conditions, une solution encore plus petite

Exercice 11
Soit a et b des entiers strictement positifs tels que $ab+1$ divise a^2+b^2. Montrer que le quotient de cette division est un carré d'entier.

Exercice 12
Soit a et b des entiers strictement positifs tels que ab divise a^2+b^2+1. Calculer le quotient.

Exercice 13
Soit a et b des entiers strictement positifs tels que $4ab-1$ divise $(4a^2-1)^2$. Montrer que $a=b$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Avec la factorisation du rectangle, l'équation se réécrit $(a-1)(b-1)=2$ donc $a-1=2$ et $b-1=1$, c'est-à-dire $a=3$, $b=2$.

Solution de l'exercice 2
Avec la factorisation du rectangle, l'équation se réécrit $(a^2-1)(b^2-1)=1$ donc $a^2-1=1$ et $b^2-1=1$ ou $a^2-1=-1$ et $b^2-1=-1$; comme 2 n'est pas un carré, la seule solution est $(0,0)$.

Solution de l'exercice 3
Avec la factorisation du rectangle, l'équation se réécrit $(3a^2+1)(b^2-10)=507=3.13^2$. Discutons les cas en remarquant que $3a^2+1$ est premier avec 3.
– $3a^2+1=1$ donc $a=0$ et $b^2-10=507$: impossible.
– $3a^2+1=13$ donc $a=\pm 2$ et $b^2-10=39$, c'est-à-dire $b=\pm 7$.
– $3a^2+1=13^2$ donc $a^2=56$: impossible.
Les seules solutions sont $(2,7)$, $(-2,7)$, $(2,-7)$ et $(-2,-7)$.

Solution de l'exercice 4
D'après la factorisation du rectangle, $xy-7x-3y+21=(x-3)(y-7)$ donc $(xy-7x-3y+21)^n=(x-3)^n(y-7)^n$. D'après la formule du binôme, $(x-3)^n$ et $(y-7)^n$ comportent chacun $n+1$ termes et chaque terme du produit est exactement le produit d'un des termes de chacun de ses développements. Il y a donc $(n+1)^2$ termes dans le développement recherché. L'inéquation $(n+1)^2 \geq 2012$ équivaut à $(n+1)^2 \geq 2025 = 45^2$ soit à $n \geq 44$.

Solution de l'exercice 5
En revenant en entiers, l'équation est $ab-pqa-pqb=0$ qui admet la forme factorisée $(a-pq)(b-pq)=p^2q^2$. Discutons dorénavant sur les six diviseurs de p^2q^2.
– $a=pq+1$, $b=pq(pq+1)$
– $a=p(q+1)$, $b=pq(q+1)$
– $a=q(p+1)$, $b=pq(p+1)$
– $a=2pq$, $b=2pq$
– $a=pq(q+1)$, $b=p(q+1)$

– $a = pq(p+1)$, $b = q(p+1)$
– $a = pq(pq+1)$, $b = pq+1$

De manière générale, si n est un entier strictement positif, le nombre de solutions (a, b) entières de
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{n}$$
est le nombre de diviseurs de n.

Solution de l'exercice 6
Encore une fois, l'équation se réécrit $(37-a)(b+37) = 37^2$. On obtient alors quelques cas dont une seule solution à valeurs positives $a = 36$, $b = 36 \times 37 = 1332$.

Solution de l'exercice 7
Écrivons $25^2 + 72^2 = 5^4 + 4.6^4 = (5^2 + 2.6^2 + 2.5.6)(5^2 + 2.6^2 - 2.5.6) = 157.37$. Comme 37 et 157 sont premiers, le résultat est obtenu.

Solution de l'exercice 8
$4^{545} + 545^4 = 4(4^{136})^4 + 545^4 = (545^2 + 2.4^{272} + 2.4^{136}.545)(545^2 + 2.4^{272} - 2.4^{136}.545)$ C'est donc bien un nombre composé.

Solution de l'exercice 9
Remarquons tout d'abord que n doit être impair car sinon ce nombre est pair. Notons $n = 2k+1$. Alors,
$$\begin{aligned} 4^n + n^4 = 4.(2^k)^4 + n^4 &= (n^2 + 2.2^{2k} + 2.2^k.n)(n^2 + 2.2^{2k} - 2.2^k.n) \\ &= (n^2 + 2.2^{2k} + 2.2^k.n)((n-2^k)^2 + 2^{2k}). \end{aligned}$$
Il ne reste plus qu'à dire qu'aucun de ces deux facteurs n'est égal à 1.

Solution de l'exercice 10
Considérons les entiers de la forme $a = 4k^4$ avec $k > 1$. On obtient comme précédemment
$$n^4 + 4k^4 = (n^2 + 2kn + 2k^2)(n^2 - 2kn + 2k^2) = (n^2 + 2kn + 2k^2)((n-k)^2 + k^2)$$
Or, à k fixé, aucun des facteurs ne peut être égal à ± 1.

Solution de l'exercice 11
Notons $k = \frac{a^2+b^2}{ab+1}$; considérons tous les couples $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^*$ tels que $k = \frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\beta+1}$ puis (α, β) celui parmi ces couples tel que $\alpha + \beta$ soit minimale. Montrons par l'absurde que $\alpha = 0$ (ce qui entraîne $k = \beta^2$) ou $\beta = 0$ (ce qui entraîne $k = \alpha^2$). Si $\alpha\beta \neq 0$, on peut supposer sans perte de généralité $\alpha \geq \beta > 0$. Étudions l'équation
$$x^2 + \beta^2 = k(x\beta + 1)$$
Cette équation est de degré 2 et l'une de ses solutions est α par définition de k ; d'après les relations entre coefficients et racines (somme et produit), l'autre racine est
$$\alpha' = k\beta - \alpha = \frac{\beta^2 - k}{\alpha}.$$
Ainsi, α' est un entier (première égalité) et positif (on a la contradiction $\alpha'^2 - k\beta\alpha' + \beta^2 - k \geq \alpha'^2 + k + \beta^2 - k > 0$ si $\alpha' < 0$). Par ailleurs, $\alpha' = \frac{\beta^2-k}{\alpha} < \frac{\beta^2}{\alpha} \leq \frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha$. On a, ainsi, construit un nouveau couple solution (α', β) avec $\alpha' + \beta < \alpha + \beta$: contradiction.

On aurait aussi pu procéder par descente infinie si on voulait éviter l'argument de minimalité.

Solution de l'exercice 12
Comme précédemment, on note $k = \frac{a^2+b^2+1}{ab}$ et on considère un couple (α, β) de somme minimale parmi les couples (a, b) vérifiant cette égalité. Si $\alpha = \beta$, alors α^2 divise $2\alpha^2 + 1$ donc $\alpha^2 = 1$ et $k = 3$. Sinon, on peut supposer sans perte de généralité que $\alpha > \beta \geq 0$. On résout l'équation $x^2 + \beta^2 + 1 = kx\beta$. Les solutions sont α et

$$\alpha' = k\beta - \alpha = \frac{\beta^2 + 1}{\alpha}.$$

α' est un entier strictement positif (car sinon, $\alpha'^2 - k\beta\alpha' + \beta^2 + 1 \geq 1 > 0$) et $\alpha' < \alpha$ (car $\beta^2 + 1 \leq \alpha^2$) : contradiction.

Solution de l'exercice 13
Indication : On retraduit le problème en $4ab - 1$ divise $(a - b)^2$ et on recommence comme précédemment.

3 Jeudi : Géométrie

1 matin : François Lo Jacomo

Triangles semblables

Deux triangles semblables sont deux triangles ayant leurs trois angles égaux. Comme la somme des trois angles est égale à 180°, il suffit qu'ils aient deux angles égaux pour que le troisième soit lui aussi égal. Les côtés de deux triangles semblables sont proportionnels : si ABC et MNP sont semblables avec $\widehat{A} = \widehat{M}$, $\widehat{B} = \widehat{N}$, $\widehat{C} = \widehat{N}$, $\frac{AB}{MN} = \frac{BC}{NP} = \frac{CA}{PM}$. Réciproquement, si les côtés sont ainsi proportionnels, les triangles sont semblables, leurs angles sont donc égaux.

Exercice 1
Deux triangles ayant trois angles égaux et deux côtés égaux sont-ils nécessairement isométriques ?

Exercice 2
A, B, C, D sont quatre points distincts d'un même cercle, tels que les segments $[AB]$ et $[CD]$ se coupent en E ; M est un point du segment $[BE]$ distinct de B et de E. La tangente en E au cercle passant par D, E et M coupe respectivement les droites (BC) et (AC) en F et G.
a) Montrer que les triangles GCE et DBM sont semblables.
b) Calculer le quotient $\frac{EG}{EF}$ en fonction de $t = \frac{AM}{AB}$

Exercice 3
Soit ABC un triangle acutangle, c'est-à-dire dont tous les angles sont aigus, ce qui entraîne que son orthocentre H est à l'intérieur du triangle. Soit $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ les longueurs des cotés, H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement, $m_a = AH_A$,

$m_b = BH_B$, $m_c = CH_C$ les longueurs des hauteurs, et $d_a = AH$, $d_b = BH$, $d_c = CH$ les distances des sommets à l'orthocentre.
Montrer que : $m_a d_a + m_b d_b + m_c d_c = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Considérons un cercle (C) et un point A quelconque, deux droites (Δ_1) et (Δ_2) passant par A, qui coupent le cercle (C) en B_1, C_1 et B_2, C_2 respectivement. On a : $AB_1.AC_1 = AB_2.AC_2$. Cette égalité est vraie en mesure algébrique, le produit étant positif si B_1 et C_1 (respectivement B_2 et C_2) sont du même côté de A (donc si A est extérieur au cercle), négatif s'ils sont de part et d'autre de A (donc si A est intérieur au cercle). Réciproquement, si sur deux droites (Δ_1) et (Δ_2) passant par un point A, on considère quatre points, D_1, E_1 sur (Δ_1) et D_2, E_2 sur (Δ_2), vérifiant en mesures algébriques : $AD_1.AE_1 = AD_2.AE_2$, ces quatre points sont sur un même cercle.

Exercice 4
Deux cercles se coupent en A et B. Une tangente commune aux deux cercles touche ces cercles en C et D. Soit M le milieu de $[CD]$. Montrer que A, B, M sont alignés.

Exercice 5
Soit ABC un triangle. Son cercle circonscrit a pour centre O et pour rayon R. Son cercle inscrit a pour centre I et pour rayon r. Calculer la puissance de I par rapport au cercle circonscrit à ABC. En déduire que : $OI^2 = R^2 - 2Rr$.

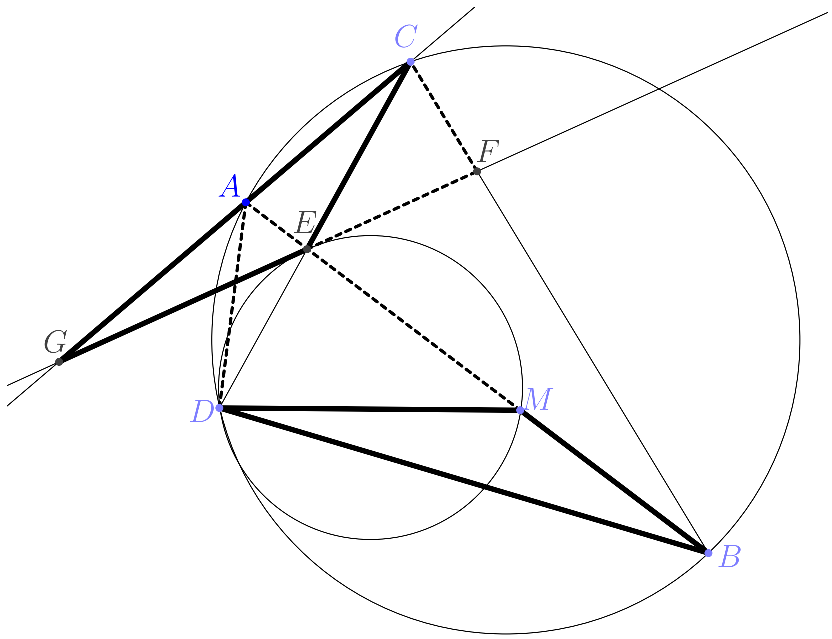
Exercice 6
Soit ABC un triangle dans lequel $\widehat{BCA} = 90^\circ$, et soit D le pied de la hauteur issue de C. Soit X un point intérieur au segment $[CD]$. Soit K le point du segment $[AX]$ tel que $BK = BC$. De même, soit L le point du segment $[BX]$ tel que $AL = AC$. Finalement, soit M le point d'intersection des droites (AL) et (BK).
a) Le cercle de centre B et de rayon BC recoupe (AX) en K', et le cercle de centre A et de rayon AC recoupe (BX) en L'. Montrer que les quatre points K, K', L, L' sont cocycliques.
b) Montrer que $MK = ML$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Non ! bien sûr... Considérons le triangle de côtés $8, 12, 18$ et le triangle de côtés $12, 18, 27$. Ils sont semblables, car leurs trois côtés sont proportionnels : $\frac{8}{12} = \frac{12}{18} = \frac{18}{27}$. Ils ont donc leurs trois angles égaux. Tous deux ont un côté égal à 12, tous deux ont un côté égal à 18, ils ont donc deux côtés égaux. Mais ce ne sont pas deux côtés "homologues" ! Les triangles ne sont manifestement pas isométriques...

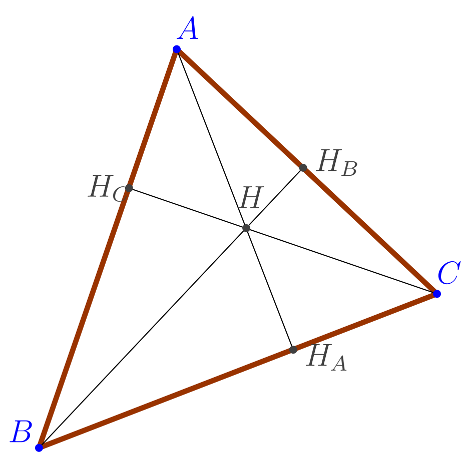
Solution de l'exercice 2
a) Montrons qu'ils ont leurs angles égaux. $\widehat{GCE} = \widehat{DBM}$ car ce sont des angles inscrits interceptant le même arc AD du "grand" cercle. Et $\widehat{EMD}$, supplémentaire de $\widehat{BMD}$, intercepte,

dans le "petit" cercle, le même arc ED que $\widehat{GED}$, supplémentaire de $\widehat{CEG}$. Les deux triangles sont bien semblables, d'où : $\frac{GC}{DB} = \frac{CE}{BM} = \frac{EG}{MD}$.



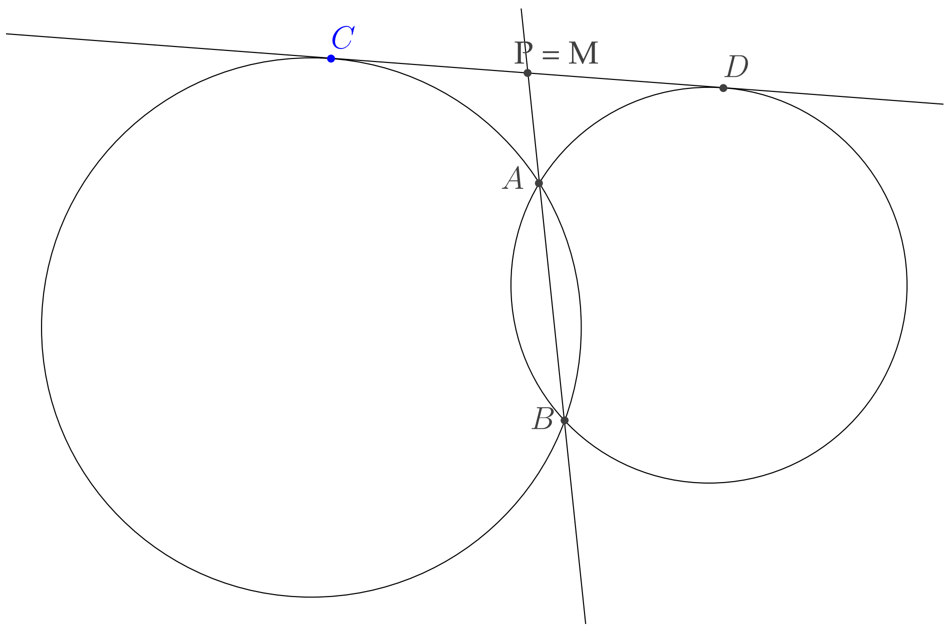
b) Ce qu'on cherche, c'est le rapport $\frac{EG}{EF}$: il nous faut d'autres triangles semblables faisant intervenir EF. Or AMD et CEF sont eux aussi semblables. On vient de voir que $\widehat{DMA} = \widehat{CEF}$. En outre, $\widehat{ECF} = \widehat{DAM}$ car ils interceptent le même arc BD du grand cercle. Donc on a : $\frac{AM}{CE} = \frac{MD}{EF} = \frac{DA}{FC}$.
C'est en multipliant ces deux relations que l'on trouve : $\frac{AM}{BM} = \frac{EG}{EF}$. Comme $AM = tAB$ et $BM = (1-t)AB$, on a : $\frac{EG}{EF} = \frac{t}{1-t}$. Encore faut-il s'assurer que ce résultat couvre tous les cas de figure...

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>



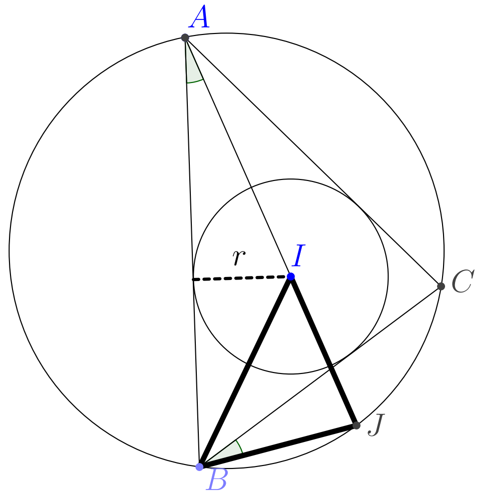
Les triangles rectangles AH_AB et AH_CH étant semblables, $\frac{AH_A}{AH_C} = \frac{AB}{AH}$. Mais pareillement, AH_AC et AH_BH sont semblables, d'où $\frac{AH_A}{AH_B} = \frac{AC}{AH}$. La première égalité peut s'écrire : $m_ad_a = cAH_C$ et la seconde, $m_ad_a = bAH_B$. En rapprochant ces deux égalités, on peut encore écrire : $m_ad_a = \frac{1}{2}(cAH_C + bAH_B)$. L'intérêt de cette écriture est que si l'on additionne les trois relations obtenues ainsi, en permutant A, B, C, on a : $m_ad_a + m_bd_b + m_cd_c = \frac{1}{2}[(cAH_C + bAH_B) + (aBH_A + cBH_C) + (bCH_B + aCH_A)] = \frac{1}{2}[c(AH_C + BH_C) + b(AH_B + CH_B) + a(BH_A + CH_A)] = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$ car, par exemple, $AH_C + BH_C = AB = c$.

Solution de l'exercice 4



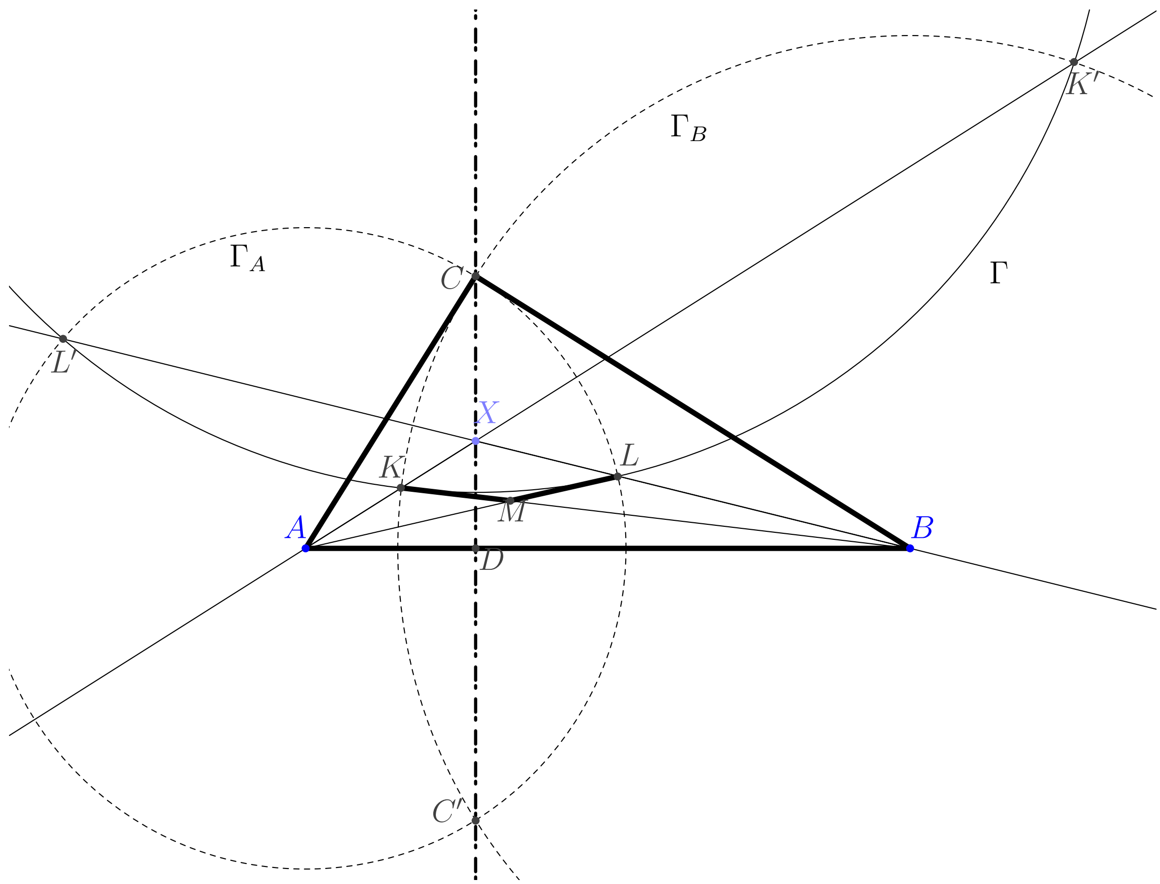
La droite (AB) coupe (CD) en P. La puissance de P par rapport au cercle contenant C vaut $PA.PB = PC^2$. La puissance de P par rapport à l'autre cercle vaut $PA.PB = PD^2$. Il en résulte que $PC = PD$, donc que P est le milieu de CD : $P = M$.

Solution de l'exercice 5



Si la droite (AI) recoupe le cercle circonscrit en J, la puissance de I vaut $-IA.IJ$ car A et J sont de part et d'autre de I. Or $r = AI.\sin\frac{\widehat{A}}{2}$. Pour que $OI^2 = R^2 - 2Rr$, il faut que la puissance de I par rapport au cercle soit $-2Rr$, donc que $IJ = 2R\sin\frac{\widehat{A}}{2}$. Or ceci est la longueur de BJ, corde interceptée par un angle de $\frac{\widehat{A}}{2}$. On remarque effectivement que $IJ = BJ$, car le triangle JIB est isocèle : dans le triangle BIA, $\widehat{BIJ} = \widehat{IBA} + \widehat{BAI} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} = \widehat{IBC} + \widehat{CBJ} = \widehat{IBJ}$, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 6



a) Le cercle Γ_A de centre A et de rayon AC et celui, Γ_B, de centre B et de rayon BC se coupent en C et C', symétrique de C par rapport à la droite des centres (AB). X est sur (CC'), donc sa puissance par rapport à Γ_A vaut $XC.XC' = XL.XL'$ en mesures algébriques. Sa puissance par rapport à Γ_B vaut $XC.XC' = XK.XK'$ en mesures algébriques. On en déduit que, en mesures algébriques, $XK.XK' = XL.XL'$, ce qui suffit à démontrer que les quatre points K, K', L, L' sont cocycliques. Appelons Γ le cercle passant par ces quatre points.
b) La puissance de A par rapport à Γ_B vaut $AK.AK' = AC^2$. La puissance de A par rapport à Γ vaut aussi $AK.AK'$, ce qui est égal à AL^2 car par hypothèse $AL = AC$. Il en résulte que AL est tangente à Γ. De même, BK est également tangente à Γ. Dès lors, MK et ML sont les deux tangentes menées par M au cercle Γ, ils sont donc égaux.
Ce problème était le problème 5 de l'Olympiade Internationale 2012, mais il était posé sans la question a), ce qui ouvrait la porte à d'autres démonstrations, tout en le rendant sensiblement plus difficile.

2 après-midi : Igor Kortchemski

Énoncés

Exercice 1
Soient A, B, C et D quatre points cocycliques. On suppose que les droites (AB) et (CD) se coupent en E. Montrer que :

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}.$$

Exercice 2
Soit ABC un triangle rectangle en C. Sur la droite (AC) on place un point D tel que $CD = BC$, C étant situé entre A et D. La perpendiculaire à (AB) passant par D recoupe (BC) en E. Montrer que $AC = CE$.

Exercice 3
Le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible dans un cercle de centre O. Les diagonales AC et BD sont perpendiculaires. Montrer que la distance de O à la droite (AD) est égale à la moitié de la longueur du segment $[BC]$.

Exercice 4
Soient A, B et P trois points d'un cercle $\mathcal{C}$. Soient Q, R et S les projetés respectifs de P sur (AB) et sur les tangentes à $\mathcal{C}$ en A et B. Montrer l'égalité :

$$PQ^2 = PR \cdot PS.$$

Exercice 5
Soient $ABCD$ et $CDEF$ deux quadrilatères inscrits dans deux cercles Γ_1, Γ_2. On suppose que parmi les droites (AB), (CD) et (EF) il n'y en a pas deux qui soient parallèles. Alors les droites (AB), (CD) et (EF) sont concourantes si, et seulement si, les points A, B, E et F sont cocycliques.

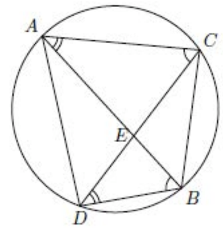
Exercice 6
Soit ABC un triangle, H son orthocentre. Soient M un point de $[AB]$ et N un point de $[AC]$. Les cercles de diamètre BN et CM se coupent en P et Q. Montrer que P, Q et H sont alignés.

Exercice 7
Soit ABCDEF un hexagone convexe tel que AB = BC, CD = DE et EF = FA. Montrer que les perpendiculaires aux droites (FB), (BD) et (DF) passant respectivement par les points A, C et E sont concourantes.

Exercice 8
Soit ABC un triangle acutangle. On note respectivement D, E, F les pieds des hauteurs sur les côtés $[BC], [CA], [AB]$. Soit P un point d'intersection de (EF) avec le cercle circonscrit à ABC. Soit Q le point d'intersection des droites (BP) et (DF). Montrer que $AP = AQ$.

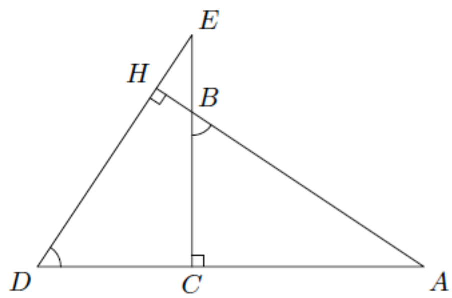
Solutions

Solution de l'exercice 1



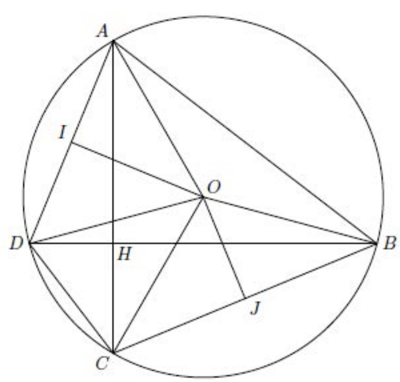
Les triangles EAC et EDB, qui ont les mêmes angles, sont semblables, d'où $\frac{AC}{BD} = \frac{EA}{ED}$. Par le même raisonnement, les triangles EAD et ECB sont semblables, donc $\frac{AD}{BC} = \frac{ED}{EB}$. En faisant le produit, ED se simplifie, il reste la relation cherchée.

Solution de l'exercice 2



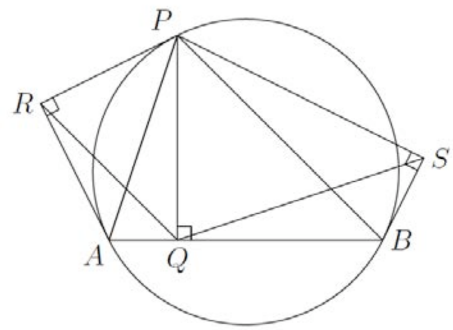
On a $\widehat{CBA} = \widehat{CDE}$, puisque (CB) est perpendiculaire à (CD) et (BA) à (DE). Il en résulte que les triangles CBA et CDE ont leurs angles égaux, ils sont semblables, et même égaux car $CB = CD$ par hypothèse. Cela entraîne $CA = CE$.

Solution de l'exercice 3



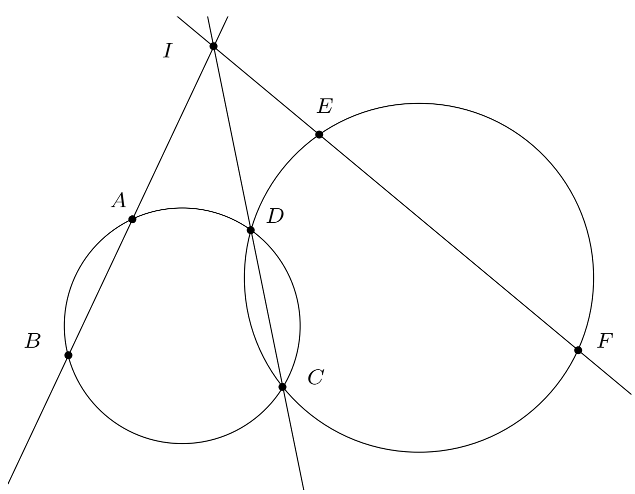
Par la propriété des angles inscrits, on a $\widehat{AOD} = 2\widehat{ABD}$ et donc $\widehat{IOA} = \widehat{ABD}$. De même $\widehat{COJ} = \widehat{CAB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ABD}$. On en déduit $\widehat{IOA} = \frac{\pi}{2} - \widehat{COJ} = \widehat{JCO}$ puis que les triangles IOA et JCO sont semblables. Comme on a en outre $OA = OC$, ils sont isométriques et $CJ = IO$, ce qui permet de conclure.

Solution de l'exercice 4



Les angles $\widehat{PQA}$ et $\widehat{PRA}$ étant droits, les quatre points A, Q, P, R sont cocycliques. On en déduit $\widehat{PRQ} = \widehat{PAQ} = \widehat{PAB}$. La droite (AR) étant tangente au cercle $\mathcal{C}$ en A, on a $\widehat{PBA} = \widehat{PAR}$, et par cocyclicité on a alors $\widehat{PAR} = \widehat{PQR}$. Les triangles PQR et PBA ont donc leurs angles égaux, par conséquent ils sont semblables. On en déduit l'égalité $\frac{PR}{PQ} = \frac{PA}{PB}$. De même on montre que les triangles PSQ et PBA sont semblables, d'où $\frac{PQ}{PS} = \frac{PA}{PB}$. Des deux égalités précédentes, on déduit $\frac{PR}{PQ} = \frac{PQ}{PS}$, soit $PQ^2 = PR \cdot PS$.

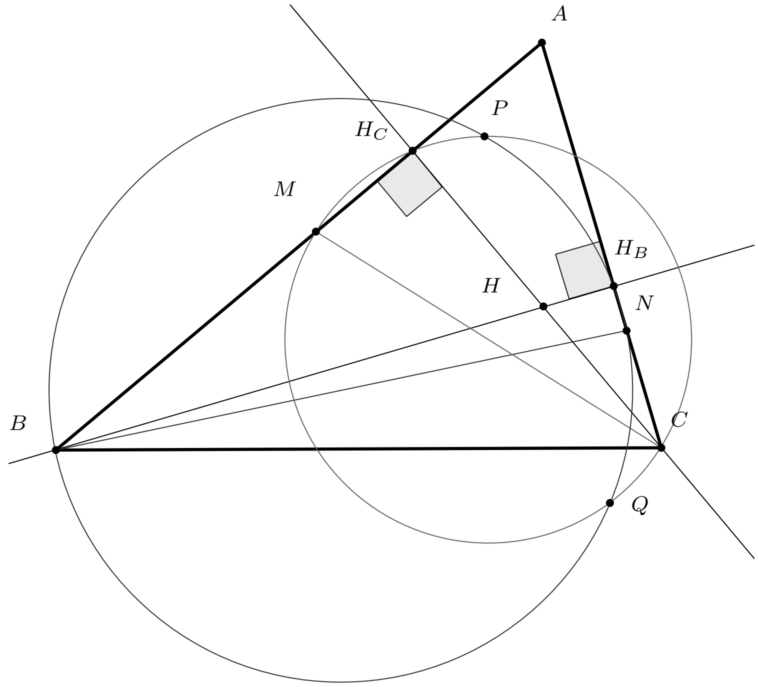
Solution de l'exercice 5



Supposons d'abord que les trois droites soient concourantes. Alors la puissance de I par rapport au cercle de gauche vaut $IA \cdot IB = ID \cdot IC$. La puissance de I par rapport au cercle de droite vaut $ID \cdot IC = IE \cdot IF$. On en déduit que $IA \cdot IB = IE \cdot IF$, et donc que A, B, F, E sont cocycliques.

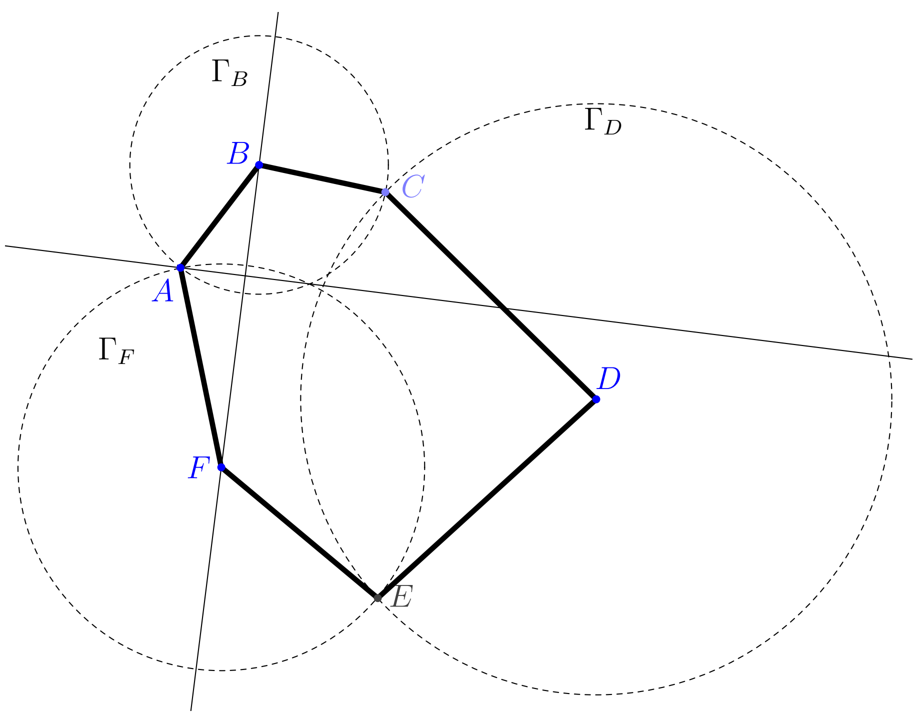
Réciproquement, si A, B, F, E sont cocycliques, notons I le point d'intersection des droites (AB) et (EF). La puissance de I par rapport au cercle circonscrit à $ABFE$ vaut $IA \cdot IB = IE \cdot IF$. Donc I a même puissance par rapport aux deux cercles de la figure. I est donc sur leur axe radical, qui est (DC). Les trois droites (AB), (CD) et (EF) sont donc concourantes en I.

Solution de l'exercice 6



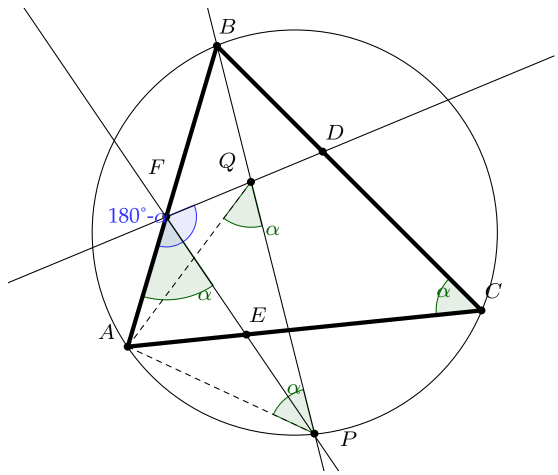
Nous allons montrer que H a la même puissance par rapport aux deux cercles de la figure, ce qui impliquera que H est sur leur axe radical, qui est (PQ).
Pour cela, comme $(BH_B) \perp (AC)$, H_B est sur le cercle de diamètre $[BN]$. La puissance de H par rapport au cercle de diamètre $[BN]$ vaut donc $-HB \cdot HH_B$. De même, la puissance de H par rapport au cercle de diamètre $[CM]$ vaut $-HC \cdot HH_C$.
Or les points B, H_C, H_B, C sont cocycliques : ces points sont situés sur le cercle de diamètre $[BC]$. On en déduit que $-HB \cdot HH_B = -HH_C \cdot HC$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7



Soit Γ_B le cercle de centre B et de rayon AB. On définit de même les cercles Γ_D et Γ_F . La perpendiculaire à (FB) passant par A est l'ensemble des points qui ont même puissance par rapport à Γ_B et Γ_F . L'intersection de la perpendiculaire à (FB) passant par A et de la perpendiculaire à (BD) passant par C est donc un point qui a même puissance par rapport aux trois cercles. Il appartient donc à la perpendiculaire à (DF) passant par E.

Solution de l'exercice 8



Posons $\alpha = \widehat{APB}$. Par cocyclicité des points A, B, C, P, on a $\widehat{BCA} = \alpha$. Comme (AD) et (CF) sont des hauteurs, les points A, C, D, F sont cocycliques et donc $\widehat{AFD} = 180° - \alpha$. Donc $\widehat{AFD} + \widehat{APQ} = 180°$, ce qui implique que les points A, P, Q, F sont cocycliques.
On continue la chasse aux angles : $\widehat{AFE} = \widehat{BFD} = \widehat{BCA} = \alpha$ (pourquoi ?), et donc $\widehat{AQP} = \widehat{AFP} = \widehat{BCA}$. Le triangle APQ est donc isocèle, ce qui implique $AP = AQ$.

4 Vendredi : Test final

1 Enoncé

Durée : 3 heures.
Chaque exercice est noté sur 7 points.
Vous devez démontrer ce que vous affirmez. N'hésitez pas à écrire les idées de démonstration que vous avez : même si la démonstration est incomplète, une idée juste peut faire gagner des points.
Aucun document n'est autorisé, pas même les calculatrices (ni les téléphones).
Rédigez des **exercices différents sur des feuilles différentes.** N'oubliez pas vos **nom et prénom sur chaque feuille.**
Rédigez clairement et lisiblement vos solutions !

Exercice 1
On appelle nombre de Mersenne tout nombre de la forme $M_n = 2^n - 1$. Montrer que

1. si n est pair différent de 2, M_n est composé (c'est-à-dire non premier) ;

2. si n est composé, M_n est composé ;

3. si p est premier, p ne divise pas M_p.

Exercice 2

Etant donné le triangle ABC, soient P et Q deux points sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que $AP = AQ$. Soient S et R deux points distincts sur le segment BC tels que S soit entre B et R, $\widehat{BPS} = \widehat{PRS}$ et $\widehat{CQR} = \widehat{QSR}$. Montrer que

1. $CS.CR = CQ^2$;

2. (AC) est tangente au cercle circonscrit au triangle QSR ;

3. P, Q, R, S sont cocycliques.

Exercice 3

On considère le graphe complet à n sommets, et on va colorier les arêtes de n couleurs différentes (il y a au moins une arête de chaque couleur).

1. Montrer qu'il existe un cycle multicolore (c'est-à-dire qu'il n'y a pas deux arêtes de la même couleur dans le cycle).

2. Montrer qu'il existe un triangle tricolore.

2 Solution

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

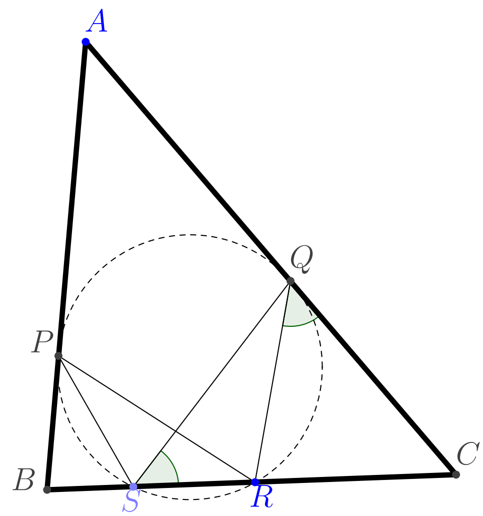
1. Si $n = 2p$, $M_n = 2^{2p} - 1 = (2^p - 1)(2^p + 1)$, et comme $n \neq 2$, $p \geq 2$ donc aucun des deux facteurs n'est égal à 1, ce qui prouve que M_n est composé.

2. Si $n = pq$, avec $p \geq 2$ et $q \geq 2$, $M_n = 2^{pq} - 1$ est divisible par $2^p - 1$ et par $2^q - 1$, donc il est composé. Plus précisément, $2^{pq} - 1 = (2^p - 1)\left(2^{(q-1)p} + 2^{(q-2)p} + \ldots + 2^p + 1\right)$.

3. Si p est premier, d'après Fermat p divise $2^{p-1} - 1$, donc $2^p - 2$, il ne peut pas diviser $M_p = 2^p - 1$.

Au 17ème siècle, Mersenne a établi une première liste, partiellement fausse, de nombres premiers p pour lesquels M_p est premier : M_2, M_3, M_5, M_7 en font partie, mais pas M_{11} car $2^{11} - 1 = 23 \times 89$. Au delà, les nombres premiers de la forme $2^p - 1$ se raréfient : on en connaît actuellement 48, jusqu'à $M_{57885161}$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>



1. Les triangles CQR et CSQ ont leurs angles égaux, ils sont semblables, d'où : $\frac{CS}{CQ} = \frac{CQ}{CR}$, ce qui équivaut à : $CS.CR = CQ^2$.

2. On peut utiliser la puissance d'un point par rapport à un cercle. Si (AC) recoupe en Q' le cercle circonscrit à QSR, la puissance de C par rapport à ce cercle vaut : $CS.CR = CQ.CQ'$. Comme $CS.CR = CQ^2$, $Q' = Q$.
Mais on peut aussi remarquer que la tangente en Q à ce cercle fait avec (QR) un angle égal à $\widehat{QSR}$, car ces deux angles interceptent le même arc QR du cercle. Etant donné l'hypothèse, cette tangente est donc (AC).

3. Le même raisonnement prouve que $BS.BR = BP^2$ et que le cercle circonscrit à PSR est tangent en P à (AB). Parmi les cercles passant par S et R, a priori l'un passe par P et un autre par Q. Le plus grand des deux (supposons que c'est celui passant par Q) coupe l'autre côté (en l'occurrence (AB)) en deux points M et N a priori distincts. La puissance de A par rapport à ce cercle vaut : $AM.AN = AQ^2 = AP^2$ car par hypothèse $AP = AQ$. La puissance de B par rapport à ce cercle vaut $BM.BN = BS.BR = BP^2$. Si M et N sont distincts, $AM.AN = \left(\frac{AM+AN}{2}\right)^2 - \left(\frac{AM-AN}{2}\right)^2 < \left(\frac{AM+AN}{2}\right)^2$, donc $AP < \frac{AM+AN}{2}$. De même, $BP < \frac{BM+BN}{2}$. En additionnant : $AP + BP = AB < \frac{(AM+BM)+(AN+BN)}{2} = AB$, ce qui est contradictoire. On en déduit que $M = N = P$: les quatre points P, Q, R, S sont cocycliques et le cercle qui passe par ces points est tangent en P à (AB) et en Q à (AC).

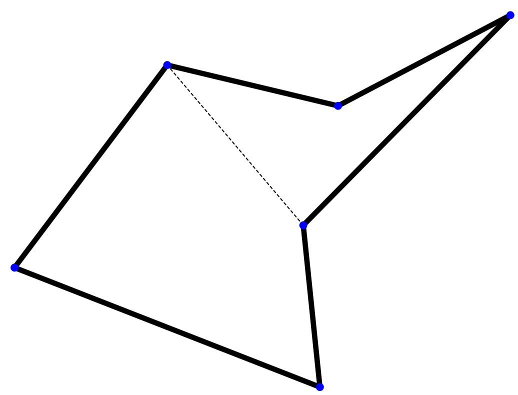
C'est cette dernière conclusion qui permet de dessiner facilement la figure : on trace la droite (SR), un cercle passant par S et R, les tangentes à ce cercle issues d'un point A, et on en déduit P et Q, points de contact, et B et C, intersections de ces tangentes avec (SR). Autrement, on a très peu de chances de trouver quatre points P, Q, R, S vérifiant les relations d'angles de l'énoncé.

Solution de l'exercice 3

1. Comme il existe au moins une arête de chaque couleur, on peut choisir pour chaque couleur une quelconque des arêtes de cette couleur, ce qui constitue un sous-graphe contenant les mêmes n sommets et précisément n arêtes. D'après l'exercice 2 du cours de Pierre Bertin

(énoncé p. 63, solution p. 65), un tel graphe ayant au moins n arêtes pour n sommets admet obligatoirement un cycle, nécessairement multicolore car toutes les arêtes du graphe sont de couleurs différentes.

2. Si le cycle ci-dessus a au moins quatre sommets, on peut considérer une diagonale joignant deux sommets non voisins. La couleur de cette diagonale apparaît au plus une fois dans le cycle, donc parmi les deux nouveaux cycles formés par la diagonale et une partie du cycle initial, l'un au moins est multicolore. Dès lors, si un cycle multicolore a au moins quatre sommets, une diagonale permet de construire un cycle strictement plus petit, lui aussi multicolore. On réitère le processus jusqu'à ce que le cycle plus petit obtenu soit un triangle : tant que ce but n'est pas atteint, on peut continuer de rétrécir le cycle. En fin de compte, on trouve bien un triangle tricolore.



cycle de longueur 6 partagé par une diagonale en deux cycles de longueur 4 dont l'un au moins est multicolore.

VI. Conférences

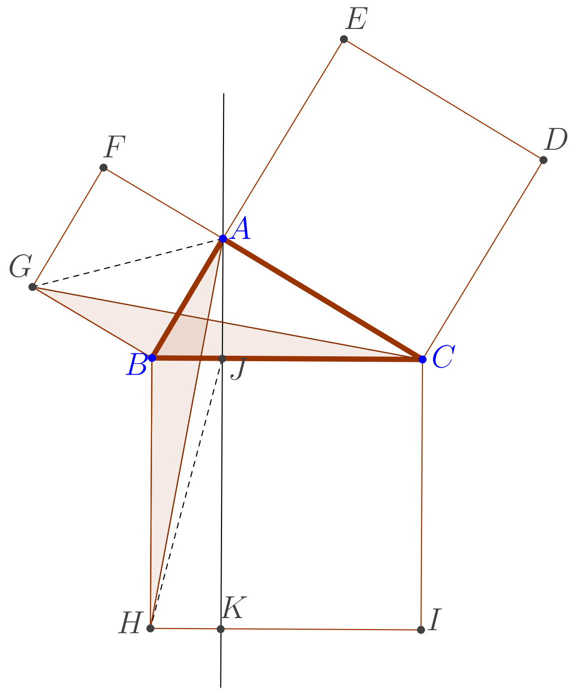
1 Conférence de François Lo Jacomo

1 Qui a découvert le théorème de Pythagore ?

La réponse semble évidente : Pythagore. Mais ce n'est pas si sûr que cela. On ne sait pas grand-chose de Pythagore, dans la mesure où il n'a lui-même rien écrit et les textes qui parlent de lui sont très tardifs. On sait toutefois qu'il a existé, a vécu de l'an -580 à l'an -497 environ, que c'est avant tout un penseur religieux qui a "élevé l'arithmétique au dessus des besoins des marchands" (Aristoxène). Le nombre a, pour Pythagore, un caractère divin, et les *triplets pythagoriciens* (trois entiers a, b, c tels que $a^2 + b^2 = c^2$) jouent un rôle sans doute plus important en arithmétique qu'en géométrie. Le triangle rectangle de côtés $3, 4, 5$, qu'il connaissait certainement, ne sert pas seulement en mathématiques : la "corde à 13 noeuds" (13 noeuds équidistants, donc 12 intervalles égaux) était utilisée, encore au moyen-âge, notamment pour déterminer des angles droits (triangle $3, 4, 5$) et des angles de 60° (triangle $4, 4, 4$). Mais cela ne prouve pas que Pythagore ait effectivement su démontrer son théorème, car on n'a retrouvé aucune trace d'une telle démonstration, même si cela demeure possible avec les outils mathématiques qu'il possédait.

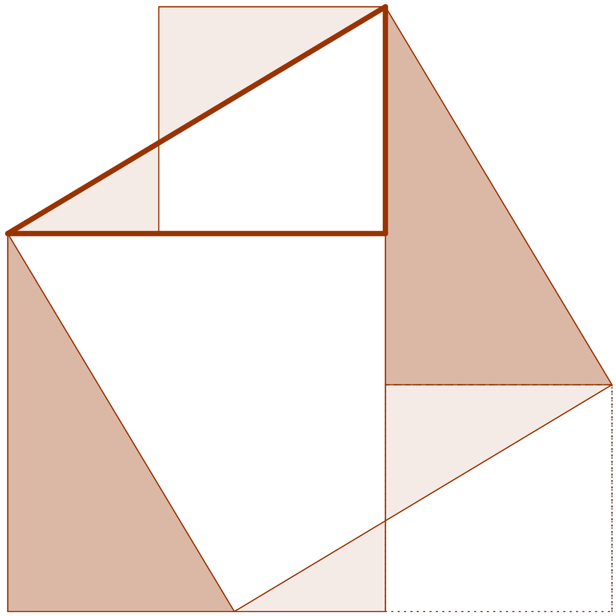
La première preuve rédigée de manière indiscutable se trouve dans les *Eléments d'Euclide*. Euclide a vécu bien après Pythagore (environ -325 à -265), et cet ouvrage est un des principaux fondements des mathématiques. On y trouve les bases de l'arithmétique, avec notamment la *division euclidienne*, mais également de la géométrie, qu'il construit de manière rigoureuse à partir de cinq axiomes. Ceux-ci doivent être considérés en quelque sorte comme les "règles du jeu", que l'on ne conteste pas et qu'on ne cherche pas à prouver. L'un d'eux, le *cinquième postulat d'Euclide*, a longtemps intrigué les mathématiciens, car il semblait plus compliqué que les autres, surtout dans sa formulation originelle. En langage moderne, il s'énonce ainsi : *"par un point extérieur à une droite on peut mener une et une seule parallèle à cette droite"*, et beaucoup ont pensé qu'on devait pouvoir le déduire des quatre autres, donc que ce n'était pas un véritable axiome. Mais au XIX° siècle, Lobatchevski et plusieurs autres mathématiciens, en tentant de le démontrer par l'absurde, ont construit de nouvelles géométries, "non euclidiennes", reposant sur les quatre premiers axiomes et la négation de ce cinquième : cela n'avait rien d'absurde, et cela s'est avéré utile en physique.

Pour en revenir au théorème de Pythagore, voici la démonstration figurant dans les *Eléments d'Euclide*.



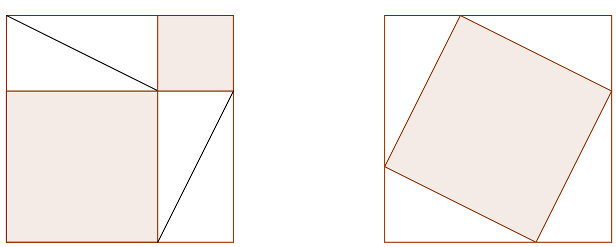
Soit ABC un triangle rectangle en A. Sur chacun des côtés du triangle, construisons un carré extérieur au triangle : $ABGF, BCIH, CAED$, et abaissons de A la perpendiculaire à BC, qui coupe BC en J et IH en K. Une rotation de 90° autour de B transforme le triangle GBC en ABH, ces deux triangles ont donc même aire. Mais l'aire de GBC est égale à l'aire de GBA, ces deux triangles ayant même base GB et même hauteur, puisque AC est parallèle à la base GB. Cette aire est donc la moitié de celle du carré $GBAF$. De même, l'aire de ABH est égale à l'aire de JBH, ces deux triangles ayant même base BH et même hauteur, puisque AJ est parallèle à la base BH. Cette aire est la moitié de celle du rectangle $BHKJ$. On en déduit que le rectangle $BHKJ$ a même aire que le carré $GBAF$. Un raisonnement identique prouverait que le rectangle $CIKJ$ a même aire que le carré $DCAE$. Donc la somme des aires des deux carrés est égale à la somme des aires des deux rectangles, soit à l'aire du carré de l'hypoténuse.

Bien évidemment, ce n'est pas la seule démonstration de ce théorème. L'ouvrage fondamental des mathématiques chinoises, *Les Neuf chapitres sur l'art mathématique*, qui date environ du premier siècle de notre ère, présente le théorème de Pythagore (ou théorème de Gougu) de manière moins théorique qu'Euclide. La démonstration chinoise s'apparente au Tangram, et on s'attarde davantage sur les applications pratiques :



Sur la figure ci-dessus, les triangles foncés sont égaux au triangle rectangle initial. En découpant les carrés des côtés de l'angle droit et en déplaçant le triangle foncé et les deux triangles gris clair, on transforme ces deux carrés des côtés de l'angle droit en le carré de l'hypoténuse. Cette technique de découpage suggère d'ailleurs un problème intéressant : si deux polygones ont même aire, est-il toujours possible de découper l'un en un certain nombre de morceaux qui, assemblés différemment, donnent l'autre polygone ? La réponse est oui ! C'est un joli théorème qui ne se généralise pas en dimension 3 : quel que soit le découpage que l'on fait d'un cube par exemple, on ne peut pas construire un tétraèdre en assemblant les morceaux différemment.

Une autre démonstration graphique ne nécessite aucun découpage.

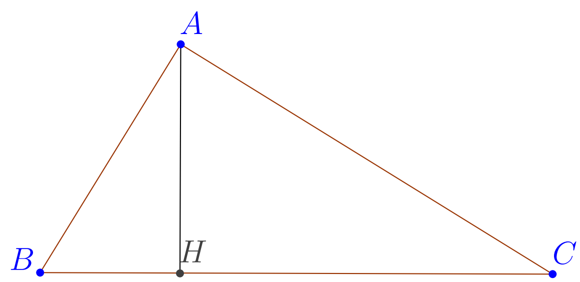


Selon la manière dont on dispose, à l'intérieur du carré de côté $(a+b)$, quatre triangles rectangles égaux, dont les côtés de l'angle droit valent a et b et l'hypoténuse c, la surface restante peut être soit deux carrés de côtés a et b, soit un seul carré de côté l'hypoténuse c. Donc le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des côtés de l'angle droit. Sur la figure de droite, on doit s'assurer qu'il s'agit bien d'un carré de côté l'hypoténuse, donc que les quatre angles sont bien droits.

Signalons encore une démonstration : dans un triangle ABC rectangle en A, traçons la hauteur AH. Les triangles ABC et HBA sont semblables, car ils sont tous deux rectangles et ont un autre angle en commun. Donc $\frac{HB}{AB} = \frac{AB}{BC}$. De même, ABC et HAC sont semblables : $\frac{HC}{AC} = \frac{AC}{BC}$. Dès lors,

$$BC = HB + HC = \frac{AB^2}{BC} + \frac{AC^2}{BC}$$

ou encore : $BC^2 = AB^2 + AC^2$.



Pour conclure, signalons que Pythagore n'est pas le seul mathématicien à qui on attribue un théorème sans être sûr qu'il l'ait démontré. Thalès, qui était encore un demi-siècle plus vieux que Pythagore (né vers -625, mort vers -547), a démontré plusieurs théorèmes, comme le fait qu'un triangle ayant deux côtés égaux a deux angles égaux. Mais parmi la demi-douzaine de théorèmes qu'il a effectivement démontrés ne figure pas celui qui, en France, porte son nom. Nous sommes quasiment les seuls à l'appeler théorème de Thalès : beaucoup de langues lui donnent un nom différent.

2 Conférence de Roger Mansuy

1 Les cordes universelles

Définition

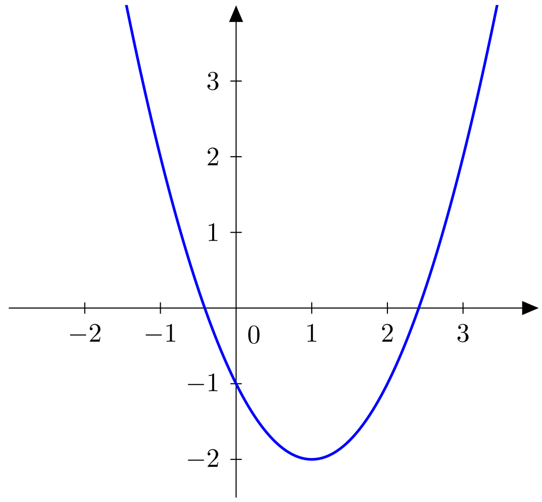
Considérons une fonction $f : x \mapsto f(x)$. Son graphe est l'ensemble des points du plan de coordonnées $(x, f(x))$. Dans la suite, on se limite aux fonctions continues définies sur un intervalle, c'est-à-dire à celles dont on peut tracer le graphe sans lever le crayon du papier.

Proposition 1

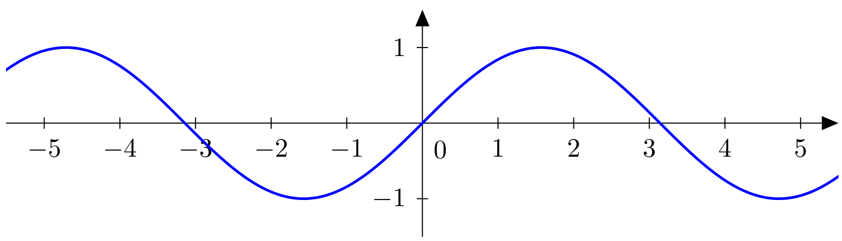
Le graphe d'une fonction rencontre (au plus) une fois chaque droite verticale.

En effet, pour x fixé, le seul point de coordonnées (x, y) qui peut appartenir au graphe correspond à $y = f(x)$.

Le graphe de $x \mapsto (x-1)^2 - 2$ est



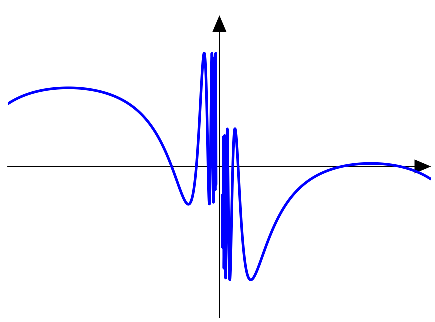
Le graphe de $x \mapsto \sin x$ est



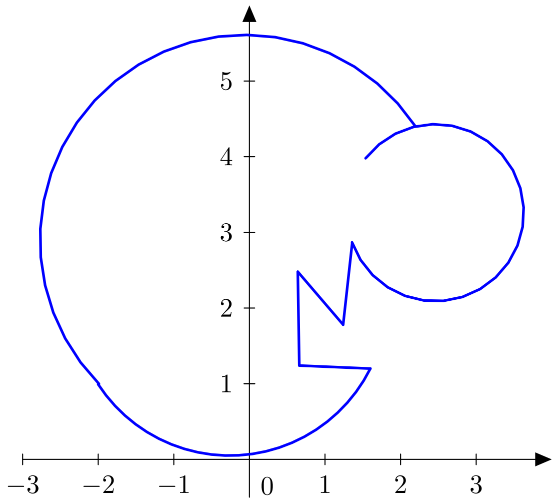
Le graphe de la fonction

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Z} \\ \cos\left(\frac{1}{\sin(x\pi)}\right) + \frac{1}{2}(-1)^{\lfloor x-1 \rfloor} & \text{sinon} \end{cases}$$

est



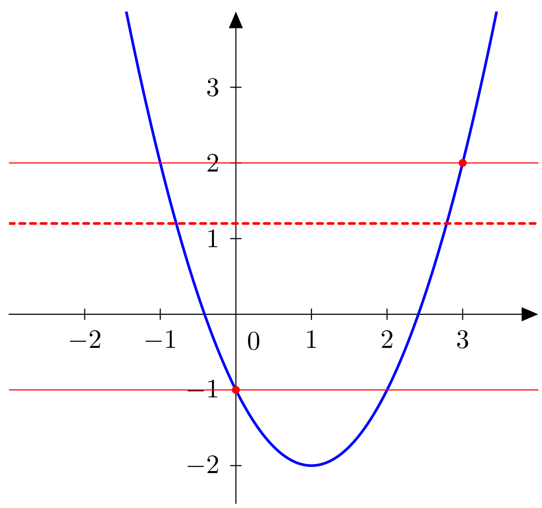
En revanche, le croquis ci-dessous n'est pas le graphe d'une fonction !



Proposition 2

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout y entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un $x \in [a, b]$ tel que $f(x) = y$.

Intuitivement, pour passer du niveau $f(a)$ au niveau $f(b)$, il faut passer par toutes les valeurs intermédiaires.



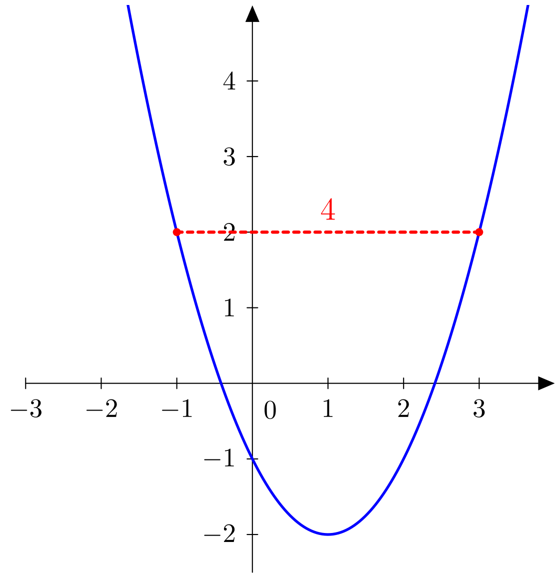
Définition

Une fonction f admet une corde (horizontale) de longueur $h > 0$ s'il existe x tel que $f(x) = f(x + h)$.

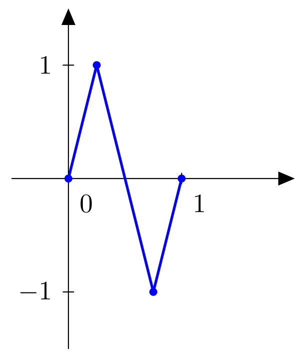
Intuitivement, il y a un segment horizontal de longueur h qui relie deux points du graphe de f.

Proposition 3

Une fonction strictement croissante n'admet pas de corde horizontale.



Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ affine par morceaux de sommets $(0,0)$, $(\frac{1}{4},1)$, $(\frac{3}{4},-1)$ et $(1,0)$.



f admet une corde de longueur h si, et seulement si,

$$h = 1 \text{ ou } 0 < h \leq \frac{1}{2}.$$

Proposition 4
Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, f admet une corde de longueur $\frac{1}{n}$.

Démonstration
Considérons la fonction $\varphi : x \mapsto f(x + \frac{1}{n}) - f(x)$.
Alors,

$$\varphi\left(0\frac{1}{n}\right) + \varphi\left(1\frac{1}{n}\right) + \varphi\left(2\frac{1}{n}\right) + \ldots + \varphi\left((n-1)\frac{1}{n}\right) = 0.$$

Ainsi, les valeurs $\varphi\left(k\frac{1}{n}\right)$ pour $k \in [0, n-1]$ ne peuvent être toutes strictement négatives ou toutes strictement positives.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires appliqué à φ, il existe une valeur où φ s'annule donc f admet une corde de longueur $\frac{1}{n}$.
On peut généraliser la preuve sans peine.

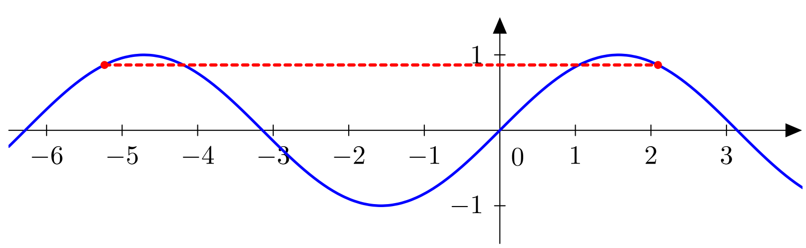
Proposition 5
Soit f continue qui admet une corde de longueur h. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, f admet une corde de longueur $\frac{h}{n}$.
Il n'y a pas d'autres cordes universelles !
Si $h \notin \left\{\frac{1}{n},\ \text{avec } n \in \mathbb{N}^*\right\}$ (avec $0 < h < 1$), il existe $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(1)$ qui n'admet pas de corde de longueur h.
Définissons $f : x \mapsto x + \frac{1}{1-\cos\frac{2\pi}{h}} \cos\frac{2\pi x}{h}$.
– La fonction f est clairement continue et vérifie

$$f(0) = f(1) = \frac{1}{1-\cos\frac{2\pi}{h}}.$$

– Pour tout $x \in [0, 1-h]$,

$$\begin{aligned} f(x+h) &= x + h + \frac{1}{1-\cos\frac{2\pi}{h}} \cos\frac{2\pi(x+h)}{h} \\ &= x + h + \frac{1}{1-\cos\frac{2\pi}{h}} \cos\frac{2\pi x}{h} \\ &= f(x) + h \\ &\neq f(x). \end{aligned}$$

Proposition 6
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et périodique. Alors, f admet des cordes horizontales de toute longueur.



VII. Citations mémorables

- Pierre-Alexandre : "Geeeermaaanooophoooneee ! ! !" (en chantant). Vincent Jugé : "Oui"
- Vincent Jugé : "Tu joues à Minecraft ? Tu devrais aller à l'école des Mines"
- Anonyme :"Solange, pourquoi tu ne manges pas de Kinder ?" Solange : "Pour éviter le cannibalisme."
- Solange se retourne en regardant ses voisins de derrière avec des éclairs dans les yeux, puis s'exclame "Oh non ! Je croyais que quelqu'un m'avait tiré les cheveux mais en fait, ils étaient coincés dans les clous de la chaise".
- Vincent : "Pour dire bonjour à Malik on doit dire Salamalikoum !"
- Prof : "mais tout ce qu'on a envie de supprimer, c'est... " Elève : "Pierre-Alexandre" Prof : "Non ! n^2 !
- Pierre-Alexandre : "C'est quoi, le temps libre ?"
- Pierre-Alexandre : "Mais le n^2 m'empêche de calculer ! ! ! Pourquoi il y a un n^2 ? !" (en pleurant)
- Prof : "Vous voyez les mammifères ?" Patrick : "Ah oui ! Les mammifères, c'est les grands-mères d'Iron Man !".
- (Pierre-Alexandre sort de la salle en plein cours) Elève : "Monsieur ! Monsieur ! Il s'enfuit !" Prof : "Yeeees ! !"
- (pendant la photo) Photographe : "Dites Roger Mansuy". Arthus : "Mangez Mansuy ! !".
- Roger Mansuy : "la proposition Sophie Germain (P.S.G.) zlatane les exercices !"
- Roger Mansuy : "Posez-moi des questions et je vous dirai pourquoi elles sont connes !"
- Roger Mansuy : "Ceci n'est pas une erreur, ceci est un 2, vous êtes victimes d'une hallucination collective ! (en faisant semblant d'effacer leur mémoire comme dans MIB).
- phrase favorite des garçons : "Coucou, tu veux voir ma ... ?"
- Roger Mansuy : "Je vais aller faire une pause pendant 5 mn. Je vais aller faire la sieste avec François... Ah non ! j'ai dit 5 mn !
- Prof : "Qui a résolu l'exercice ?". Elève : "Avant ou après la correction ?".
- Rayane : "Le salvateur protège quelqu'un". Arthur : Le salvateur Dali ?"
- Lilia : $6 \times 9 = 42$. C'est la dernière nouvelle ! Mathieu : Ah bon ? C'est de qui ? Lucie : Roger Mansuy ! Lilia : Ca marche en base 13.
- Pierre B. : Sauf que cette fille, elle a déjà été utilisée...
- Ilyas : J'ai trouvé une solution, mais elle est bizarroïde...