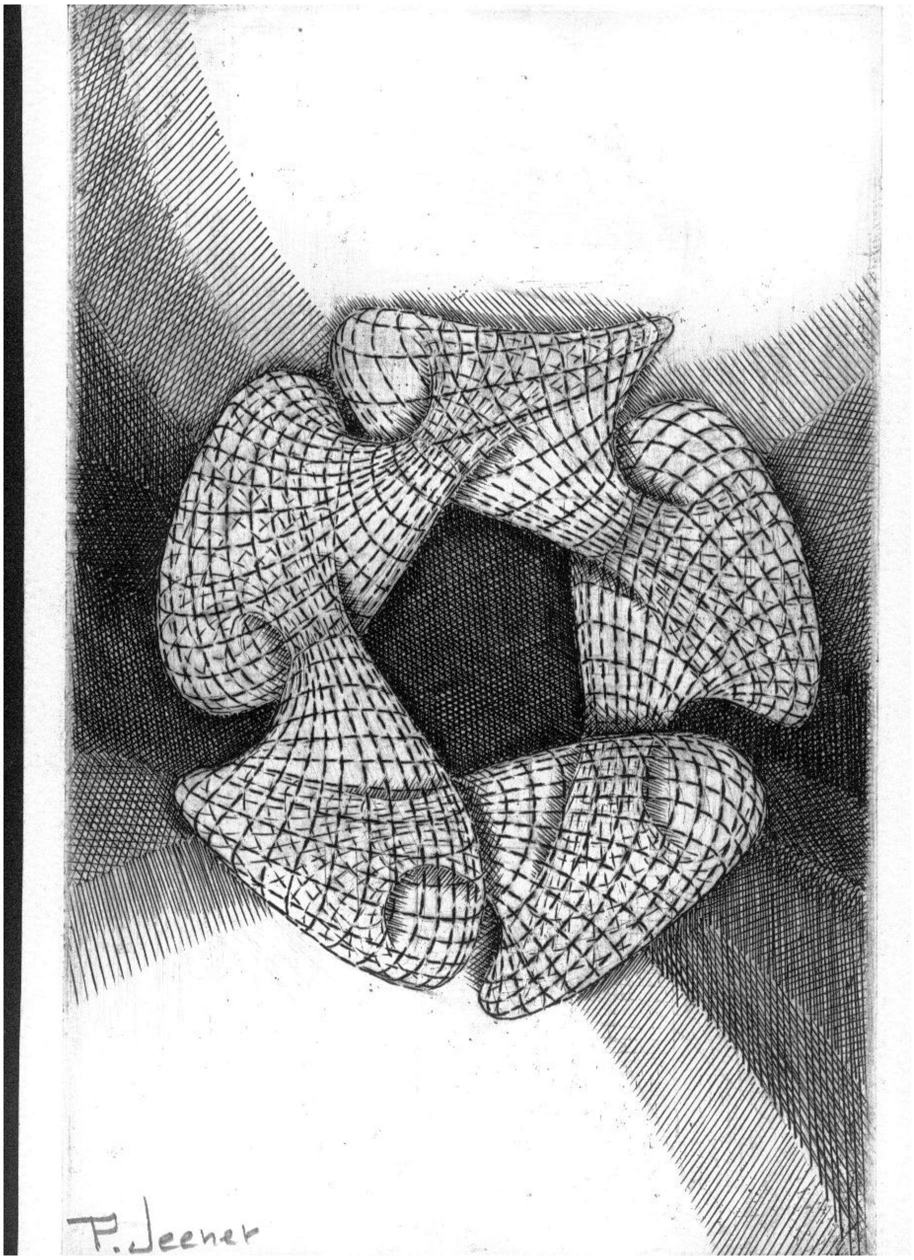
Stage olympique de Saint Pierre lés Nemours



Du 2 au 4 novembre 2009

Stage olympique de Saint Pierre lès Nemours, novembre 2009

Avant-propos

Le stage de préparation olympique de Saint Pierre lés Nemours a été organisé par Animath.

Son objet a été de rassembler de jeunes lauréats (classes de troisiéme et seconde) de diverses compétitions mathématiques
et de les faire travailler sur des exercices en vue de la formation
de l'équipe qui représentera la France aux Olympiades Internationales de Mathématiques
ces prochaines années.

Photo de la premiére page : « Gravure de Patrice Jeener, artiste ».

Table des matières

I. Le trombinoscope

Les profs


Martin Andler


François Lo Jacomo


Sophie Cavadini


Igor Kortchemski

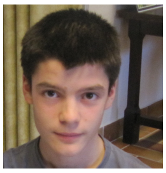

Pierre Bornsztein

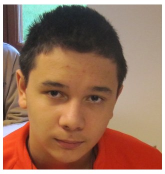
Les éléves


Vincent Boulais


Sébastien Chevaleyre


Victor Chioran


Raphael Clisson


Victor Gallois Wong

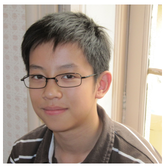

Louise Gassot


Rugdy Joabar


Jean Kieffer


Etienne Klaja

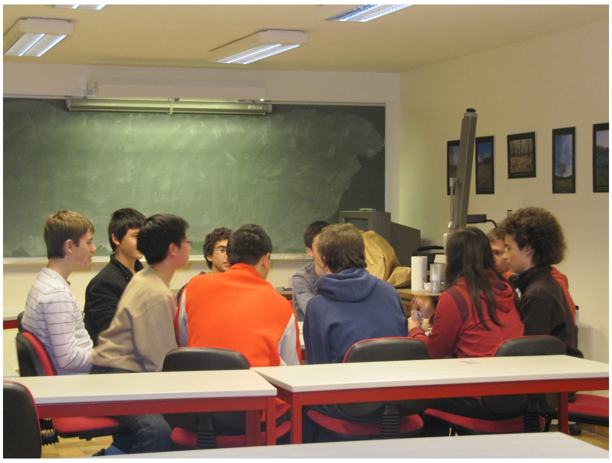

Matthieu Piquerez


Victor Quach


Vincent Sirois

II. Déroulement du stage

Les éléves ont été accueillis lundi matin dés $9h30$ au centre CEREEP (Centre de Recherche en Ecologie Expérimentale et Prédictive) de Saint Pierre lés Nemours. Aprés quelques présentations les éléves se sont installés pour s'échauffer sur quelques exercices.



Le programme du stage est donné dans le tableau II.1.

Quelques liens utiles :

- ☞ Le site d'Animath bien sûr ! `www.animath.fr`
- ☞ Le site du club olympique d'Orsay : `http://matholympia.blogspot.com`
- ☞ Le site de MathLinks, qui présente toutes les compétitions au monde : `www.mathlinks.ro`
- ☞ Le site des Olympiades Internationales de Mathématiques : `www.imo-official.org`

Lundi 2 nov	9h00 – 10h00	Arrivée et accueil des éléves
	10h00 – 13h00	Fonctions
	14h30 – 17h30	Expressions algébriques
	20h30 – 21h30	Présentation du tutorat
Mardi 3 nov	9h00 – 10h30	Introduction aux équations fonctionnelles
	10h45 – 13h00	Equations fonctionnelles
	14h30 – 18h30	Equations fonctionnelles
	20h30 – 21h30	Comment différencier un segment d'un carré ?
Mercredi 4 nov	9h00 – 12h30	Partie entiére et valeur absolue
	14h00 – 16h00	Test
	16h15 – 17h30	Corrigé du test
	17h30 – 19h00	Départ des éléves

Table II.1 – Planning du stage

III. Exposé

La soirée du lundi fut l'occasion d'une présentation.

1 Le tutorat olympique

Igor Kotchemski présentait les séances de tutorat olympique, qu'il organise à l'Ecole Normale Supérieure à Paris.

Le Tutorat olympique est prioritairement destiné aux éléves de 3éme et 2nde. Il est né d'un constat : les éléves repérés aux olympiades académiques de mathématiques de premiére, faute de temps, étaient pris au dépourvu aux olympiades internationales. Le but de ce tutorat est aussi de repérer des éléves motivés en mathématiques, afin de réfléchir sur des problémes amusants et loin du quotidien scolaire. Le principe consiste à associer un éléve et un tuteur (éléve de l'école normale supérieure ou de l'école polytechnique). Les échanges se font par email ou par lettre, (uniquement par correspondance pour l'instant) en fonction des réponses et du rythme de l'éléve. Sont proposés des exercices d'échauffement et des dossiers présentant un domaine précis des mathématiques (dénombrabilité par exemple). Il s'agit de présenter des mathématiques que l'on ne voit pas forcément au collége ou au lycée. Ce tutorat par correspondance n'est évidemment pas le plus facile, et nous avons un projet de tutorat sur Paris à l'ENS Ulm, destiné aux éléves parisiens, de banlieue nord, est et ouest : lieu de rendez-vous, rencontre d'autres éléves, interactions avec les tuteurs, réponses à des questions. Les éléves intéressés seront contactés courant novembre. Les éléves domiciliés dans les environs d'Orsay peuvent participer au Mathematical olympiads club organisé à l'université Paris Sud. Les organisateurs, jeunes doctorants, vous accueillerons les bras ouverts. Les séances d'entrainement ont lieu tous les samedis de $14h$ à $18h$ avec David Zmiaikou et Louis Santharoubane. Vous pouvez visiter leur site : http ://matholympia.blogspot.com

IV. Les fonctions

par François Lo Jacomo

stage olympique junior
77 - Saint-Pierre-lès-Nemours
2 – 4 novembre 2009

exercices d'échauffement

exercice 1

En additionnant deux à deux les cinq nombres a, b, c, d, e vérifiant : a < b < c < d < e, on obtient les dix sommes : 21, 26, 35, 40, 49, 51, 54, 60, 65, 79. Déterminer les nombres a, b, c, d, e.

exercice 2

Soient a, b, c, d quatre nombres réels vérifiant : $a + b + c + d = 4$.
Montrer que : $ab + bc + cd + da \leq 4$.

On rappelle que la valeur absolue d'un nombre réel : $|x|$ est le plus grand des deux nombres x et $-x$: $|4| = |-4| = 4$.

exercice 3

Hachurer sur l'axe des réels l'ensemble des nombres réels vérifiant :

a) $x - 1 \leq 2$
b) $x^2 \geq 1$
c) $x(x^2 - 1) \leq 0$
d) $|x - 2| \leq 1$
e) $|x - 1| + |x - 2| \leq 2$

exercice 4

Pour quelle valeur de a l'équation :
$|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| = a$ admet-elle une solution unique ?

exercice 5

Soient a, b, c des nombres strictement positifs tels que $a \geq b \geq c$.
montrer que : $\dfrac{a^2 - b^2}{c} + \dfrac{c^2 - b^2}{a} + \dfrac{a^2 - c^2}{b} \geq 3a - 4b + c$

solutions

exercice 1

En additionnant deux à deux les cinq nombres a, b, c, d, e vérifiant : $a < b < c < d < e$, on obtient les dix sommes : 21, 26, 35, 40, 49, 51, 54, 60, 65, 79. Déterminer les nombres a, b, c, d, e.

La plus petite de toutes les sommes est $a + b$, et la plus grande $d + e$. Donc $a + b = 21$ et $d + e = 79$. Après $a + b$, la plus petite somme est $a + c$ qui vaut donc 26, et de même $c + e = 65$. Par ailleurs, si l'on additionne les dix sommes, chacun des nombres a, b, c, d, e apparaîtra quatre fois dans :
$(a+b) + (a+c) + (a+d) + (a+e) + (b+c) + (b+d) + (b+e) + (c+d) + (c+e) + (d+e)$, donc
$21 + 26 + 35 + 40 + 49 + 51 + 54 + 60 + 65 + 79 = 4(a + b + c + d + e)$, ce qui donne : $a + b + c + d + e = 120$. D'où : $c + d + e = 120 - (a + b) = 99$, donc $c = 99 - (d + e) = 20$ et $d = 99 - (c + e) = 34$. De même, $a + b + c = 120 - (d + e) = 41$, d'où $b = 41 - (a + c) = 15$. Reste à déterminer $a = 21 - b = 6$ et $e = 79 - d = 45$, et surtout à vérifier que les dix sommes deux à deux de ces cinq nombres, (6, 15, 20, 34, 45) sont bien les dix nombres annoncés, ce qui ne serait pas le cas si les dix nombres avaient été choisis au hasard (ce qui n'empêchait pas de faire les calculs ci-dessus).

exercice 2

Soient a, b, c, d quatre nombres réels vérifiant : $a + b + c + d = 4$.
Montrer que : $ab + bc + cd + da \leq 4$.

$ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$, or $(a + c) + (b + d) = 4$ par hypothèse.
Posons $x = a + c$: il s'agit de montrer que $x(4 - x) \leq 4$, donc que $x^2 - 4x + 4 \geq 0$, ce qui est vrai quel que soit x car $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. Il n'est même pas utile de supposer a, b, c et d positifs.

exercice 3

Hachurer sur l'axe des réels l'ensemble des nombres réels vérifiant :

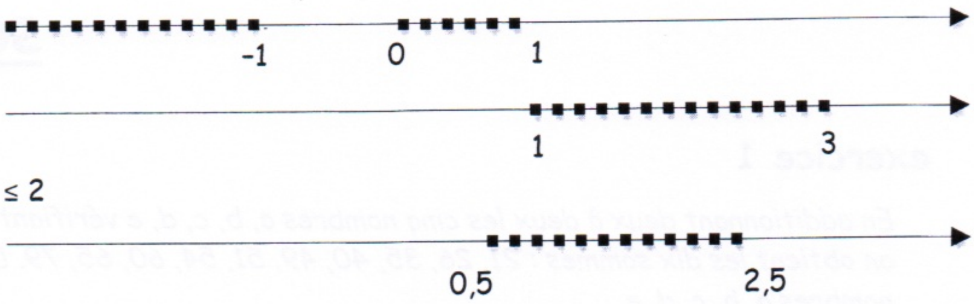
$x - 1 \leq 2$

$x^2 \geq 1$

$x(x^2 - 1) \leq 0$

$|x - 2| \leq 1$

$|x - 1| + |x - 2| \leq 2$



exercice 4

Pour quelle valeur de a l'équation :
$|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| = a$ admet-elle une solution unique ?

Pour $y = 6 - x$, $|y - 1| = |5 - x| = |x - 5|$, $|y - 2| = |x - 4|$, … $|y - 5| = |x - 1|$, donc $|y - 1| + |y - 2| + |y - 3| + |y - 4| + |y - 5| = |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5|$
Si l'équation admet une solution x, elle admet aussi pour solution $6 - x$: elle ne peut admettre une solution unique que si $x = 6 - x$, soit $x = 3$, donc $a = 6$. Mais il s'agit là d'une condition nécessaire : il faut encore prouver que pour $a = 6$, elle n'admet qu'une seule solution. Or par définition, pour tout x réel : $|x - 1| \geq x - 1$, $|x - 2| \geq x - 2$, $|x - 4| \geq 4 - x$ et $|x - 4| \geq 4 - x$, donc :
$|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| \geq 6 + |x - 3|$. Pour toute valeur autre que 3, $|x - 3| > 0$, donc $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| + |x - 4| + |x - 5| > 6$.

exercice 5

Soient a, b, c des nombres strictement positifs tels que $a \geq b \geq c$.

montrer que : $\dfrac{a^2 - b^2}{c} + \dfrac{c^2 - b^2}{a} + \dfrac{a^2 - c^2}{b} \geq 3a - 4b + c$

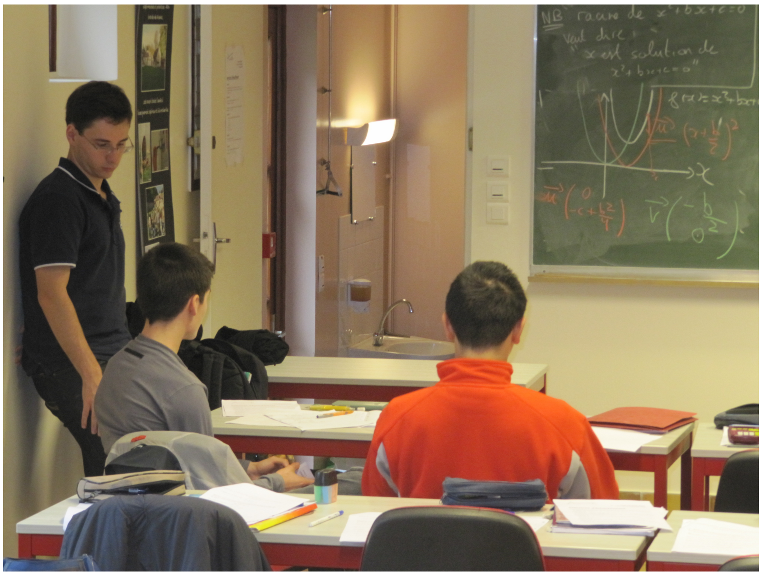
Il faut factoriser les différences de carrés :

$$\frac{a^2 - b^2}{c} + \frac{c^2 - b^2}{a} + \frac{a^2 - c^2}{b} = \left(\frac{a+b}{c}\right)(a-b) + \left(\frac{c+b}{a}\right)(c-b) + \left(\frac{a+c}{b}\right)(a-c)$$
$$\geq 2(a-b) + 2(c-b) + (a-c) = 3a - 4b + c$$

En effet, $a + b \geq 2c$ puisque $a \geq b \geq c$, $c + b \leq 2a$ mais en multipliant par $(c - b)$ qui est négatif ou nul, on change le signe de l'inégalité : $0 \geq \left(\frac{c+b}{a}\right)(c-b) \geq 2(c-b)$, et $a + c \geq b$ puisque $c > 0$.

V. Expressions algébriques

par Igor Kortchemski



Le but de ce petit texte est d'introduire la notion de polynôme, de présenter la division euclidienne et de donner des applications pour la recherche des racines.

1 Opérations sur les polynômes

Dans ce qui suit, nous ne ferons pas de distinction entre polynôme et fonction polynomiale associée. Il faudrait la faire en toute rigueur, mais plutôt que de rendre l'exposition abstraite, nous préferons insister sur les idées sous-jacentes.

Définition 1.1. *Une fonction P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est appelée polynôme à coefficient réels (abrégé en polynôme dans ce qui suit) s'il existe des nombres réels $a_0, \ldots, a_n$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n.$$

Si $a_n \neq 0$, on dit que le degré de P, note $\deg P$, vaut n. Dans ce cas, a_n est appelé le coefficient dominant de P. On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Exemple 1.2. *La fonction $P(x) = \sqrt{2} - 2x + \pi x^2$ est un polynôme de degré 2 de coefficient dominant π.*

Remarque 1.3. *Par convention, le degré du polynôme nul est $-\infty$. Ainsi, les polynômes de degré zéro sont exactement les fonctions constantes non nulles.*

Proposition 1.4. *Soient P, Q deux polynômes. Alors $P + Q$ et $P \times Q$ sont également deux polynômes.*

Démonstration. Pour $P+Q$ il suffit d'utiliser le fait que $\alpha x^i + \beta x^i = (\alpha+\beta)x^i$ pour un nombre réel x, et pour $P(x) \times Q(x)$, il suffit de développer le produit. $\square$

Proposition 1.5. *Soient P, Q deux polynômes. Alors* $\deg(P+Q) \leqslant \deg P + \deg Q$ *et* $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$.

Démonstration. En effet, on vérifie aisément que $\deg(P+Q) = \deg P$ si $\deg P > \deg Q$, que $\deg(P+Q) = \deg Q$ si $\deg Q > \deg P$ et que si $\deg P = \deg Q$, alors $\deg(P+Q) \leqslant \deg P$. Il peut cependant ne pas y avoir égalité (prendre par exemple $P(x) = x^2$ et $Q(x) = -x^2$).

La deuxième partie de la proposition découle du fait que si a_n est le coefficient dominant de P et b_m est le coefficient dominant de Q, alors $a_n b_m$ est le coefficient dominant de PQ. $\square$

2 Division euclidienne et racines

On commence par démontrer le théorème fondamental suivant.

Théoréme 2.1. *Soient $P, U \in \mathbb{R}[X]$ avec $\deg U \geqslant 1$. Alors il existe un unique couple de polynômes Q, R tels que :*

$$P = QU + R \qquad \textit{et} \qquad \deg(R) \leqslant \deg(U) - 1.$$

Démonstration. Pour l'existence, on applique l'algorithme vu en cours en abaissant à chaque étape le degré de P. Plus précisément, on pose $P_0 = P$ et $Q_0 = 0$. On commence à l'étape 0 et voici ce qu'on fait à l'étape k : notons d degré de P_k et p_d son coefficient dominant. Notons également n le degré de U et u_n sont coefficient dominant. Si $\deg(P_k) \leqslant \deg(U) - 1$, on arrête l'algorithme en prenant $Q = Q_k$ et $R = P_k$. Sinon, on pose :

$$P_{k+1} = P_k - \frac{p_d}{u_n} X^{d-n} U \qquad \text{et} \qquad Q_{k+1} = Q_k + \frac{p_d}{u_n} X^{d-n}.$$

On passe ensuite à l'étape $k+1$. L'algorithme se termine bien car le degré de P_k est au plus $\deg P - k$, et les polynômes Q et R donnés par l'algorithme vérifient les conditions requises.

Pour l'unicité, supposons par l'absurde qu'il existe deux tels couples Q, R et Q', R'. Alors $QU + R = Q'U + R'$. En particulier, $Q \neq Q'$, car sinon on a aussi $R = R'$. Cela implique également :

$$U(Q - Q') = R' - R.$$

Or, d'après la proposition 1.5, le degré du terme de gauche et supérieur ou égal à celui de U et celui de droite est inférieur ou égal à $\deg(U) - 1$, ce qui est contradictoire et conclut la démonstration. $\square$

Définition 2.2. *Un réel x est appelé racine réelle (abrégé dans la suite par racine) d'un polynôme P si $P(x) = 0$.*

Exemple 2.3. *Le polynôme $X^2 - 1$ a deux racines, qui sont 1 et -1. Le polynôme $X^2 + 1$ n'a pas de racine réelle.*

Théoréme 2.4. *Soient $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a \in \mathbb{R}$. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *a est racine de P, autrement dit $P(a) = 0$.*
2. *Il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que :*

$$P(x) = Q(x)(x - a).$$

Démonstration. Il est clair que le deuxième point implique le premier. Quant à la réciproque, le point clé est d'utiliser la division euclidienne. En effet, supposons que $P(a) = 0$. Ecrivons alors la division euclidienne de P par $X - a$ sous la forme $P(x) = Q(x)(x-a)+R(x)$ avec R un polynôme de degré au plus $1 - 1 = 0$. Ainsi, R est un nombre réel, noté c. Bref, $P(x) = Q(x)(x - a) + c$. Evaluons cette quantité en $x = a$: $0 = P(a) = Q(a)(a - a) + c$. Donc $c = 0$, ce qu'on voulait démontrer. □

Théoréme 2.5. *Un polynôme de degré n a au plus n racines différentes.*

Démonstration. Par l'absurde, soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n ayant au moins $n+1$ racines différentes, notées $r_1, \ldots, r_{n+1}$. D'après le théorème précédent, il existe un polynôme Q tel que $P(x) = Q(x)(x - r_1)$. Mais alors, pour $2 \leqslant i \leqslant n+1$, $0 = P(r_i) = Q(r_i)(r_i - r_1)$. Comme $r_i - r_1 \neq 0$, ceci impose $Q(r_i) = 0$. On recommence ce raisonnement avec Q pour finalement obtenir l'existence d'un polynôme T tel que $P(x) = T(x)(x - r_1)\cdots(x - r_{n+1})$. Alors d'après la proposition 1.5 :

$$n = \deg(P) = \deg T + n + 1 > n,$$

ce qui est absurde. □

Remarque 2.6. *Il existe des polynômes qui n'ont pas de racines réelles , par exemple $P(x) = x^4 + 1$.*

Ce théorème important implique quelques corollaires donnant une information concernant le polynôme sachant quelque chose sur ses racines.

Corollaire 2.7. *Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ un polynôme de degré n. On suppose qu'il a n racines différentes $r_1, \ldots, r_n$. Alors :*

$$P(x) = a_n(x - r_1)\cdots(x - r_n).$$

Démonstration. En reprenant la démonstration précédente, on voit qu'il existe un polynôme T tel que $P(x) = T(x)(x - r_1)\cdots(x - r_n)$. En comparant les degrés des termes de gauche et de droite, il vient que T est de degré nul, donc un nombre réel. En regardant le coefficient dominant des deux côtés de l'égalité, on trouve que $T(x) = a_n$. □

Corollaire 2.8. *Un polynôme ayant une infinité de racines est forcément le polynôme nul.*

On en déduit le résultat suivant.

Proposition 2.9. *Soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et $b_0, b_1, \ldots, b_m$ des nombres réels. On suppose que pour tout nombre réel x :*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m.$$

Alors $m = n$ et pour tout i entre 0 et n on a $a_i = b_i$.

Démonstration. Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_n x^n - (b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m)$. Par hypothèse, ce polynôme a une infinité de racines ; il est donc nul ! □

3 Applications

Nous présentons ici quelques applications des résultats précédents, parfois sous la forme d'exercice corrigé.

Proposition 3.1. *Soient b, c deux nombres réels. On souhaite connaître le nombre de réels x tels que $x^2 + bc + c = 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4c$, appelé le discriminant. Alors :*

1. *Si $\Delta < 0$, il n'y a pas de solution.*
2. *Si $\Delta = 0$, il y a une seule solution qui est $-\frac{b}{2}$.*
3. *Si $\Delta > 0$, il y a exactement deux solutions, qui sont :*

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4c}}{2} \qquad et \qquad \frac{-b-\sqrt{b^2-4c}}{2}.$$

Démonstration.L'idée est de se ramener au cas $b = 0$ en écrivant $x^2 + bx + c$ sous la forme suivante, dite forme canonique :

$$x^2 + bx + c = (x + \frac{b}{2})^2 + c - \frac{b^2}{4}.$$

L'intérêt réside dans le fait que x n'intervient qu'une fois dans la nouvelle expression. Cette forme rend très souvent de précieux services et est à retenir. Ainsi, $x^2 + bx + c = 0$ si, et seulement si, $(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} - c$. Ainsi, un carré étant positif, si $\frac{b^2}{4} - c = \Delta/4 < 0$, il n'y a pas de solution, d'où le premier point. D'un autre côté, si $\Delta \geqslant 0$, alors $(x + \frac{b}{2})^2 = \frac{b^2}{4} - c$ si, et seulement si :

$$x + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - c} \qquad \text{ou} \qquad x + \frac{b}{2} = -\sqrt{\frac{b^2}{4} - c}.$$

On en déduit les points 2. et 3. □

Exemple 3.2. *Le polynôme $P(x) = x^2 + x + 1$ a un discriminant égal à -3, et n'a donc pas de racine réelle.*

Remarque 3.3. *Il s'ensuit qu'étant donné un polynôme de degré 2, on peut aisément dire s'il a des racines réelles, et le cas échéant donner leur expression. Ceci est tout à fait remarquable : on peut montrer qu'il existe des polynômes de degré 5 dont les racines réelles ne s'expriment pas en utilisant des racines carrées, cubiques, etc. Cependant, si $P(x)$ est un polynôme de degré 3 et si on trouve une racine évidente a (par exemple $a = 1, 2, -1, -2, ...$), alors on peut effectuer la division euclidienne de P par $x - a$. On en déduit qu'il existe Q, un polynôme de degré 2, tel que $P(x) = Q(x)(x - a)$. Mais Q est de degré 2, et ce qui précède s'applique. La moralité de ceci est que si on trouve une racine évidente d'un polynôme de degré 3, alors on arrivera à connaître toutes ses racines. À titre d'illustration, on pourra chercher l'exercice suivant.*

Exercice 1 Trouver tous les nombres réels x, y, z vérifiant :

$$\begin{cases} (x+1)yz = 12 \\ (y+1)zx = 4 \\ (z+1)xy = 4. \end{cases}$$

Proposition 3.4 (Relations de Viète). *Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 (avec $a \neq 0$) ayant z_1 et z_2 comme racines réelles. Alors $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$ et $z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}$.*

Démonstration.D'après le corollaire 2.7, on a $P(x) = a(x - z_1)(x - z_2)$. En développant le terme de droite, on trouve les égalités annoncées. □

Remarque 3.5. *Ces relations se généralisent au cas d'un polynôme de degré n possédant n racines réelles. Elles sont utilent car elles expriment les coefficients du polynôme en fonction des racines. À ce titre, on cherchera l'exercice suivant.*

Exercice 2 Trouvez toutes les valeurs du paramètre a pour que l'équation :

$$ax^2 - (a + 3)x + 2 = 0$$

admette deux racines réelles de signes opposés.

4 Quelques motivations

Pourquoi étudie-t-on les polynômes ? Voici quelques éléments de réponse donnés sans démonstration. Vous pouvez essayer de chercher la démonstration du premier théorème, les autres sont plus difficiles.

Théoréme 4.1. *Soient $a_1, \dots a_n$ et $b_1, \dots, b_n$ des nombres réels. Alors il existe un unique polynôme P de degré $n-1$ tel que pour tout i, $P(a_i) = b_i$.*

Théoréme 4.2. *Soit f une fonction réelle infiniment dérivable (si vous ne savez pas ce que ça veut dire, imaginez qu'elle est très gentille). Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Alors pour tout entier n, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et des réels $a_0, \dots, a_n$ tels que pour tout $x \in [x_0 - \eta, x_0 + \eta]$:*

$$|f(x - x_0) - a_0 - a_1(x - x_0) - \cdots - a_n(x - x_0)^n| \leqslant \varepsilon|(x - x_0)^n|.$$

Ainsi, au voisinage de tout point, la fonction « ressemble »à un polynôme.

Théoréme 4.3. *Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors il existe une suite de polynômes $P_1(x), P_2(x), \cdots$ telle que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geqslant N$:*

$$\text{pour tout } x \in [0,1] \qquad |f(x) - P_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, toute fonction continue sur $[0,1]$ peut être approchée sur tout $[0,1]$ par des polynômes.

5 Solution des exercices

1er exo. Soit (x, y, z) une solution. Visiblement, aucun de ces nombres n'est nul. En retranchant la troisième équation à la deuxième équation, on en déduit que $zx = xy$, puis, en simplifiant par x (qui est non nul), on obtient que $z = y$. En retranchant la troisième équation à la première équation, on obtient : $y^2 - xy = 8$, ou encore $xy = y^2 - 8$. La deuxième équation se réécrit $y^2x + xy = 4$. Il vient donc :

$$y(y^2 - 8) + y^2 - 8 = 4,$$

ou encore $y^3 + y^2 - 8y - 12 = 0$. On remarque que $y = 3$ est une solution. En effectuant la division euclidienne de $y^3 + y^2 - 8y + 12$ par $y - 3$, on trouve :

$$y^3 + y^2 - 8y - 12 = (y - 3)(y^2 + 4y + 4) = (y - 3)(y + 2)^2.$$

On en déduit que $y = z = 3$ ou $y = z = -2$. Dans le premier cas, $x = \frac{1}{3}$ et dans le deuxième cas, $x = 2$. Réciproquement, les triplets $(2, -2, -2)$ et $(\frac{1}{3}, 3, 3)$ sont solution et ce sont donc les seules.

2ème exo. Supposons que $ax^2 - (a+3)x + 2 = 0$ admette deux racines de signe opposé, notées z_1, z_2. Alors d'après les relations de Viète, $z_1 z_2 = 2/a$. Or z_1 et z_2 sont de signe opposés si, et seulement si, $z_1 z_2 < 0$. On en déduit que $a < 0$. Réciproquement, si a¡0, alors le discriminant de l'équation vaut $a^2 - 2a + 9$. Pour montrer qu'il est positif, utilisons la forme canonique en écrivant $a^2 - 2a + 9 = (a-1)^2 + 8 \geqslant 0$. Ainsi, lorsque $a < 0$, il y a deux solutions réelles notées z_1, z_2. D'après les relations de Viète, $z_1 z_2 = 2/a < 0$, de sorte que z_1 et z_2 sont de signe opposés.

Remarquons que dans la preuve de la réciproque, il a d'abord fallu montrer que le polynôme avait deux racines réelles avant d'utiliser les relations de Viète.

6 Expressions polynomiales et racines

Exercice 1 Soient b et c deux nombres réels. Soit aussi x un autre nombre réel.

1. Montrer que :
$$x^2+bx+c=(x+\frac{b}{2})^2+c-\frac{b^2}{4}.$$
2. En déduire, en fonction des valeurs des nombres b et c, le nombre de réels x vÈrifiant $x^2+bx+c=0$.

Exercice 2 Trouvez toutes les valeurs du paramètre a pour que l'Èquation :
$$ax^2-(a+3)x+2=0$$
admette deux racines réelles de signes opposés.

Exercice 3 Soient m, n deux entiers naturels non nuls. Montrer que si $\frac{m}{n}<\sqrt{2}$, alors :
$$\frac{m}{n}<\sqrt{2}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right).$$

Exercice 4 Soit a un nombre réel. Combien de solutions le système suivant a-t-il ?
$$\left\{\begin{array}{l} y=1-ax^2 \\ x=1-ay^2 \end{array}\right. ?$$

7 Factorisation d'expressions polynomiales

Exercice 1 Montrer que pour tous nombres réels $a, b>0$:
$$\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}.$$

Exercice 2

1. Soient a, b, c, d des nombres réels tels que $a\geqslant b$ et $c\geqslant d$. Montrer que :
$$ac+bd\geqslant ad+bc.$$
2. Soient $x, y>0$. Montrer que :
$$\frac{x^3}{y}+\frac{y^3}{x}\geqslant x^2+y^2.$$

Exercice 3 Existe-t-il un triangle du plan dont les longueurs des côtés sont des nombres entiers et dont l'aire est un nombre premier ? On admettre le fait que l'aire d'un triangle de côtés a, b, c soit Egale à :
$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$
o˘ $p=\frac{a+b+c}{2}$ est le demi-périmètre du triangle.

Exercice 4 Trouver tous les nombres réels x, y, z vérifiant :
$$\left\{\begin{array}{l} (x+1)yz=12 \\ (y+1)zx=4 \\ (z+1)xy=4. \end{array}\right.$$

Exercice 5 Soient $a, m, n > 0$ des nombres entiers. Montrer que :

$$PGCD(a^m - 1, a^n - 1) = a^{PGCD(m,n)} - 1.$$

Exercice 6

1. Pour des entiers naturels non nuls p, n tels que $n \geqslant p$, on définit la quantité $\binom{n}{p}$ par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

   Montrer que $\binom{n}{p}$ est un entier.

2. Soient x, y deux nombres réels et $n > 0$ un entier. Montrer que :

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}.$$

3. Si $x > 0$ et $n > 0$ est un entier, montrer que :

$$(1+x)^n \geqslant 1 + nx.$$

   Montrer également que $(1,1)^{10} > 2$.

VI. Equations fonctionnelles

1 Introduction aux fonctions et aux équations fonctionnelles

par François Lo Jacomo

François LO JACOMO

Introduction aux fonctions et équations fonctionnelles

La notion de fonction est relativement récente en mathématiques, puisqu'elle est due à Leonhard Euler (1707 – 1783). La plupart des théorèmes que vous étudierez au lycée sont antérieurs, y compris ceux utilisés pour l'étude des variations d'une fonction, comme le théorème de Rolle. Car avant Euler, on savait étudier comment une « quantité » variait en fonction d'une autre quantité.

L'idée originale d'Euler est d'introduire un objet mathématique « fonction » qui associe une valeur à une variable. C'est une notion très générale : la variable et la valeur associée ne sont pas obligatoirement des nombres. Et les fonctions ainsi définies n'ont pas de propriétés a priori, c'est l'hypothèse qui permet de leur définir des propriétés en rapport avec le problème posé. La plupart des fonctions que vous manipulerez sont des « bonnes fonctions », comme les fonctions polynômes ou la fonction exponentielle par exemple. Mais quand vous devrez résoudre un problème très général sur les fonctions, par exemple une équation fonctionnelle (environ 10% des problèmes d'Olympiades sont des équations fonctionnelles), même si, en définitive, la solution est une fonction très élémentaire, vous ne pourrez pas utiliser, dans la démonstration, le présupposé que vous cherchez une « bonne fonction ».

Pour commencer, intéressons-nous au problème suivant :

Problème :
Soit $E = \{ a, b, c, d \}$ un ensemble. Combien existe-t-il de fonctions f de E dans E vérifiant, pour tout x appartenant à E, $f(f(f(x))) = x$?

La première remarque est que l'ensemble E n'est pas nécessairement un ensemble de nombres. Peu importe ce que sont a, b, c, d : ce sont des objets mathématiques abstraits, et leur nature ne change rien au problème posé. Car on travaille en fait sur la fonction, c'est-à-dire le fait d'associer à un de ces quatre éléments un autre de ces éléments (éventuellement le même). Ici, l'ensemble de départ de la fonction, E (ensemble dans lequel on choisit la variable x), est le même que l'ensemble d'arrivée (ensemble auquel appartient $f(x)$), mais ce n'est pas toujours le cas.

Une des fonctions f possibles est la fonction identité, qui à tout x associe lui-même : $f(x) = x$. Comme l'ensemble de départ est réduit à quatre éléments, on peut faire un tableau avec, par exemple, sur une ligne les valeurs possibles de la variable x, et sur la ligne du dessous l'image $f(x)$ de chacune de ces valeurs.

x :	a	b	c	d
$f(x)$:	a	b	c	d

La fonction identité vérifie bien évidemment, par définition, $f(f(f(x))) = f(f(x)) = f(x) = x$, mais ce n'est pas la seule. Considérons une fonction f distincte de l'identité, et supposons que $f(a) = b$. $f(b)$ peut être égal à b, même si f n'est pas la fonction identité (une fonction peut toujours avoir des « points fixes », qui vérifient ponctuellement $f(x) = x$), mais en ce cas, $f(f(f(a))) = f(f(b)) = f(b) = b$, ce qui prouve qu'une telle fonction n'est pas solution du problème. On supposera donc que $f(b) = c$, et on devra avoir : $f(f(f(a))) = f(f(b)) = f(c) = a$. Cela définit une troisième valeur de la fonction répondant au problème. Reste à déterminer $f(d)$: si f(d) = a, alors $f(f(f(d))) = f(f(a)) = f(b) = c$, ce qui ne satisfait pas l'hypothèse de l'énoncé. De même si $f(d) = b$ ou $f(d) = c$. La seule possibilité est : $f(d) = d$. Et on vérifie aisément que la fonction :

x :	a	b	c	d
$f(x)$:	b	c	a	d

est bien solution de notre problème. Qui plus est, toute solution du problème autre que l'identité est de ce type, quitte à renommer les variables : dès lors que f n'est pas l'identité, il existe un élément de E dont l'image est différente de lui-même, et à partir de là, on construit les autres images par le procédé ci-dessus. Pour dénombrer ces fonctions, on cherche par combien d'éléments on peut remplacer le a du raisonnement ci-dessus : les quatre éléments de E. Pour chacun d'eux, le b peut prendre trois valeurs distinctes (les trois autres éléments de E), et le c, deux valeurs distinctes, soit en définitive : 4 x 3 x 2 = 24. Mais ce faisant, on compte chaque fonction trois fois, car pour une fonction donnée, chacun des trois éléments de E qui ne sont pas des points fixes de la fonction peut jouer le rôle de a. Donc en définitive, il existe 24/3 = 8 fonctions distinctes solution du problème. Un autre dénombrement possible est de remarquer que chaque fonction f est définie par son point fixe (quatre éléments possibles) et la permutation circulaire des trois autres éléments. Or il existe deux manières de permuter circulairement trois éléments : dans un sens ou dans l'autre, d'où 4 x 2 = 8 fonctions solutions.

Certaines fonctions peuvent être déterminées ainsi, point par point, même parfois pour des ensembles de départ infinis, par exemple l'ensemble des entiers naturels **N** = {0, 1, 2, …, n, … }. Mais cela dépend essentiellement de l'ensemble de départ, et vous verrez que s'agissant de fonctions qui à un nombre réel associent un nombre réel, ce type de méthode est totalement inutilisable : jamais on ne pourra atteindre point par point tous les nombres réels. Cela dit, intéressons-nous pour commencer aux fonctions définies sur l'ensemble des entiers, par exemple au problème suivant :

Problème :
Existe-t-il une fonction f de **N** dans **N** qui, pour tout entier naturel n, vérifie : $f(f(n)) = n+1$?

Il existe une infinité de fonctions de **N** dans **N**, même si en pratique, les solutions de telles équations ne sont pas si nombreuses – on trouve souvent des fonctions « triviales ». Mais le raisonnement doit envisager toutes les possibilités, donc pas uniquement les fonctions d'une forme donnée (chercher comme solution d'une équation fonctionnelle une fonction polynôme ne résout pas le problème même si, en définitive, il n'existe pas d'autre solution). En l'occurrence, on ne sait même pas s'il existe une solution, c'est tout l'objet du problème.

Ce qu'on sait, c'est que f est une fonction définie sur N, donc que, par exemple, $f(0)$ a une valeur bien définie, que l'on peut appeler a. Traduisons alors l'hypothèse : $f(f(0)) = f(a) = 1$.

Puis $f(f(a)) = f(1) = a+1$. On se contente ici d'écrire, pour des valeurs particulières, la relation qui nous est donnée en hypothèse. Mais cela suffit pour construire la fonction de proche en proche :

x :	0	a	1	$a+1$	2	$a+2$	3	$a+3$	...
$f(x)$:	a	1	$a+1$	2	$a+2$	3	$a+3$	4	...

La suite { 0, 1, 2, 3, ... } qui constitue un élément sur deux de la première ligne contient manifestement tous les entiers, y inclus l'entier a quelle que soit sa valeur. Et il est facile de voir que la fonction lui associera la valeur : $a+a = 2a$. Mais une fonction n'associe qu'une seule valeur à un élément donné, et on sait déjà que $f(a) = 1$. Pour que f soit solution, il faudrait que $2a = 1$, ce qui est impossible compte tenu que a est entier. On en déduit que l'équation n'admet pas de solution. On pourrait étudier séparément le cas où $f(0) = 0$, car la contradiction apparaît plus immédiatement : $f(f(0)) = f(0) = 0$ n'est pas égal à 1, mais cette contradiction n'est pas fondamentalement différente de celle que l'on obtiendrait pour toute autre valeur de a. Il n'existe donc pas de fonction de **N** dans **N** vérifiant, pour tout entier naturel, $f(f(n)) = n+1$.

En revanche, il existe une infinité impressionnante de fonctions de **N** dans **N** vérifiant $f(f(n)) = n\,(f(n)) = n$ pour tout entier naturel n. Il suffit de grouper deux par deux les entiers, en posant par exemple : $f(0) = 1789$ et $f(1789) = 0$, $f(1) = 37$ et $f(37) = 1$, $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$, etc... et on peut le faire d'un nombre illimité de manières sans que les fonctions en question puissent être définies par une quelconque « formule ».

Pour conclure cette introduction, avant d'étudier des fonctions plus générales (par exemple de l'ensemble des réels dans lui-même), je voudrais introduire trois propriétés que peut avoir une fonction et dont on a souvent besoin pour ce type de problème. Une fonction est dite **injective** si deux éléments distincts ont toujours deux images distinctes. En d'autres termes, si l'égalité : $f(x) = f(y)$ n'est vérifiée que pour $x = y$. A titre d'exemple, les fonctions vérifiant pour tout x : $f(f(x)) = x$ (il y en a beaucoup, on les appelle « involutives ») sont obligatoirement injectives, car si $f(x) = f(y)$, $f(f(x)) = x$ est a fortiori égal à $f(f(y)) = y$. Lorsqu'on recherche une fonction, solution d'une équation fonctionnelle notamment, on explore souvent différentes pistes qui chacune peut nous apporter un élément d'information sur la fonction, et c'est en assemblant ces différents éléments d'information qu'on construit la solution cherchée. Si l'on pressent à quoi va ressembler la fonction solution, cela peut nous aider à partir sur de bonnes pistes, mais un tel pressentiment peut aussi être erroné. Parmi les éléments riches d'information, il peut y avoir le fait que la fonction solution est nécessairement injective, car alors, si deux éléments qui s'expriment formellement de deux manières distinctes ont la même image, ils sont obligatoirement égaux.

Une fonction **surjective** (encore appelée « surjection ») est une fonction qui atteint tous les points de l'ensemble d'arrivée. A priori, il suffit de définir convenablement l'ensemble d'arrivée pour rendre une fonction surjective : par exemple, la fonction « partie entière » qui, à un nombre réel x, associe le plus grand entier inférieur ou égal à x, est surjective sur l'ensemble des entiers, mais n'est évidemment pas surjective sur l'ensemble des réels. Il est fréquent que l'on ne connaisse pas précisément l'ensemble des valeurs prises par une fonction, ce qui force à distinguer l'ensemble d'arrivée et l'ensemble image : par exemple, $f(x) = x^4 - 4x$ prend obligatoirement des valeurs réelles, mais vraisemblablement pas toutes les valeurs réelles. Donc on la définit à valeurs dans l'ensemble **R** des réels, et éventuellement on pourra préciser par la suite l'ensemble des valeurs effectivement prises par la fonction, qui constituera l'ensemble image, mais ce n'est pas une obligation. La seule chose que l'on puisse dire est qu'a priori, elle n'a aucune raison d'être surjective sur **R** (et a posteriori, elle a de fortes raisons de ne pas l'être). Le fait qu'une fonction soit surjective peut être une information très riche. Si l'on prouve par exemple que la fonction vérifie pour tout x : $f(f(x)) = f(x)$, cela ne prouve nullement qu'il s'agit de la fonction identité ! De nombreuses autres fonctions vérifient cette relation : la fonction « partie entière » dont nous avons parlé précédemment, la fonction « valeur absolue », etc… En revanche, si l'on parvient à prouver, par ailleurs, que la fonction, en outre, est surjective, alors on pourra en conclure que tout élément x de l'ensemble de départ, puisqu'il peut s'écrire $x = f(x')$ – c'est la définition de la surjectivité –, vérifiera : $f(x) = f(f(x')) = f(x') = x$, ce qui prouvera que f est bien la fonction identité.

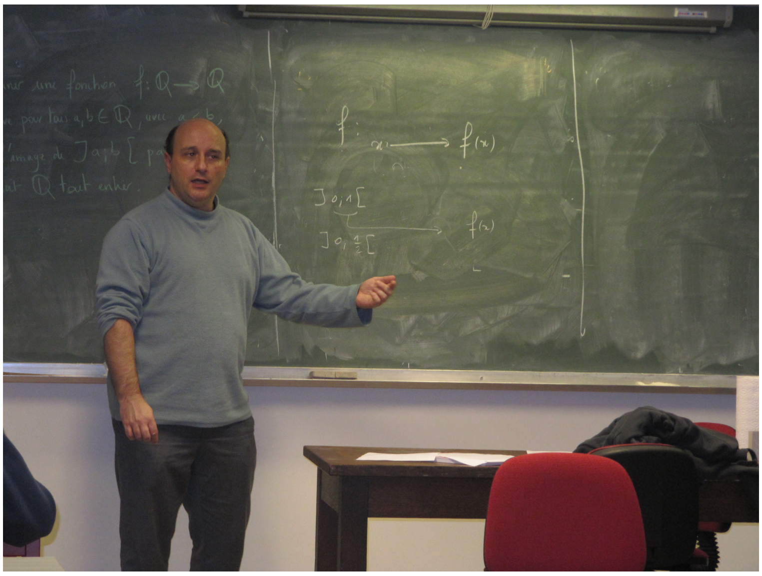
Une fonction simultanément injective et surjective est dite **bijective**. Les bijections (fonctions bijectives) jouent un rôle particulièrement important en mathématiques car elles permettent d'associer point par point l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. Si ces deux ensembles sont finis, par exemple, le fait qu'il existe une bijection de l'un vers l'autre est la meilleure preuve qu'ils ont le même nombre d'éléments. Qui plus est, si f est une bijection d'un ensemble E dans un ensemble F, elle admet une réciproque f^{-1}, bijection de l'ensemble F dans l'ensemble E, telle que pour tout x de E, $f(x) = y$ soit équivalent à $f^{-1}(y) = x$. La fonction $f(x) = x^2$, par exemple, est une bijection de l'ensemble des réels positifs dans lui-même. Il admet donc une réciproque de l'ensemble des réels positifs dans lui-même, que l'on nomme « racine carrée » : $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. En revanche, elle n'est pas surjective si l'ensemble d'arrivée est **R** tout entier, donc la réciproque n'existe pas dans tout **R** (en d'autres termes : seuls les réels positifs ont une racine carrée), et elle n'est pas injective si l'ensemble de départ est **R** tout entier, ce qui explique que les racines carrées soient obligatoirement positives : il existe deux réels vérifiant $x^2 = y$, mais une fonction ne peut associer à la variable y qu'un seul de ces deux réels, et il faut faire un choix, sinon ce n'est pas une fonction. On aurait pu choisir l'autre, et définir ainsi la fonction $f^{-1}(y) = -\sqrt{y}$, dans la mesure où $f(x) = x^2$ est également bijective de $\mathbf{R}^-$ (ensemble des réels négatifs) dans $\mathbf{R}^+$ (ensemble des réels positifs).

La fonction la plus importante des mathématiques après les fonctions polynômes, c'est vraisemblablement la fonction exponentielle, que vous devez avoir sur vos calculettes. Cette fonction est bijective de l'ensemble **R** des nombres réels vers l'ensemble $\mathbf{R}^{+*}$ des réels strictement positifs. Elle admet donc une réciproque de l'ensemble $\mathbf{R}^{+*}$ vers l'ensemble **R**, que l'on appelle « logarithme ». Ceci explique que le logarithme ne soit défini que pour les réels strictement positifs.

La suite du cours vous permettra d'expérimenter différents types de fonctions et de problèmes, et différentes méthodes utilisables notamment dans l'étude des équations fonctionnelles.

2 Equations fonctionnelles

par Pierre Bornsztein



Acte I : les entiers, les rationnels, le dénombrable.

Exercice 1.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que, pour tout entier n, on ait

$$f(2n) = 2f(n) \text{ et } f(2n+1) = 2f(n) + 1$$

Solution exercice 1.

Soit f une éventuelle solution du problème.

D'après les relations données, on voit bien que si l'on connaît les premières valeurs de f, on va pouvoir en déduire toutes les valeurs de f de proche en proche. On commence donc par choisir $n = 0$, et l'on obtient $f(0) = 2f(0)$ d'où $f(0) = 0$.

Pour $n = 1$, on a $f(1) = f(2+1) = 2f(0) + 1 = 1$ Pour $n = 2$, on a $f(2) = f(2) = 2f(1) = 2$ Pour $n = 3$, on a $f(3) = f(2+1) = 2f(1) + 1 = 3$ ... Il semblerait que $f(n) = n$ pour tout n. C'est vrai pour $0, 1, 2, 3$. Supposons que cela soit vrai pour tout $k \leqslant n$ pour un certain $n \geqslant 1$ fixé. Alors on va prouver que $f(n+1) = n+1$.

1er cas : si $n+1$ est pair. Alors $n+1 = 2a$ pour un certain entier a tel que $0 \leqslant a \leqslant n$, et donc $f(a) = a$. Par suite, $f(n+1) = f(2a) = 2f(a) = 2a = n+1$.

2éme cas : si $n+1$ est impair. Alors, par construction, $f(n+1) = f(n) + 1 = n+1$.

Donc dans tous les cas, $f(n+1) = n+1$.

Finalement, de proche en proche, on a $f(n) = n$ pour tout n.

Réciproquement, il est clair qu'une telle fonction est bien solution du problème, et il y a donc une seule solution qui est la fonction $n \longmapsto n$.

Exercice 2 (Equation de Cauchy).

a) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ pour tous entiers } x \text{ et } y.$$

b) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \text{ pour tous rationnels } x \text{ et } y.$$

Solution exercice 2.

Puisqu'il y a deux paramètres, on peut donner des valeurs séparément aux deux, ou en fixer un et faire varier l'autre etc...

a) Soit f une solution éventuelle du problème.

- Pour $x = y = 0$, il vient $f(0) = 2f(0)$, d'où $f(0) = 0$.

- En choisissant $y = -x$, on constate que, pour tout entier x, on a $f(x) + f(-x) = 0$, et donc que $f(-x) = -f(x)$. Cela assure qu'il suffit de déterminer f sur les entiers naturels pour connaître f sur $\mathbb{Z}$ tout entier.

- Comme ci-dessus, on ne voit pas de relation évidente pour déterminer $f(1)$, donc on pose $f(1) = a$.

- En choisissant $y = 1$, on constate que $f(x+1) = f(x) + f(1) = f(x) + a$, pour tout entier x. Il est alors assez facile d'en déduire que $f(2) = 2a, f(3) = 3a, f(4) = 4a$.

De proche en proche, on en déduit que $f(n) = na$ pour tout entier naturel n, puis pour tout entier relatif n.

- Réciproquement, pour un réel a fixé, la fonction définie par $f(n) = na$ pour tout entier n, est bien une solution du problème.

Il y a donc une infinité de solutions, qui sont les fonctions de la forme

$f : n \longmapsto an$ où a est un réel fixé.

b) D'après le a), on se rend vite compte que, pour tout réel a fixé, la fonction définie par $f(q) = qa$ pour tout rationnel q, est une solution du problème. On va montrer que ce sont les seules.

Soit donc f une solution du problème. Puisque l'égalité est supposée vraie pour tous rationnels x, y, elle est également vraie si x, y sont supposés entiers. D'après le a), il existe donc un réel a tel que $f(n) = an$ pour tout entier n.

Si q est un rationnel, on peut écrire $q = \frac{m}{n}$ où m, n sont des entiers et $n > 0$. Puisqu'on connaît bien f sur les entiers, l'idée est de s'y ramener et pour cela, on constate que pour $x = y$, on a $f(2x) = 2f(x)$ puis, pour $y = 2x$ que $f(3x) = 3f(x)$, et de proche en proche que, pour tout entier $k \geqslant 0$ et tout rationnel x, on a $f(kx) = kf(x)$.

Par suite, on a $f(nq) = nf(q)$ et aussi $f(nq) = f(m) = ma$, donc $nf(q) = ma$ d'où $f(q) = \frac{m}{n}a = qa$.

Ainsi, il y a une infinité de solutions, qui sont les fonctions de la forme

$f : q \longmapsto aq$ où a est un réel fixé.

Exercice 3 (Estonie 2000).

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ telles que

$$f(f(f(n))) + f(f(n)) + f(n) = 3n, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Solution exercice 3.

Deux choses à remarquer d'emblée :

- la variable est un entier naturel, et les valeurs de f sont des entiers naturels, ce qui introduit une contrainte sur les fonctions cherchées (qui nous sera bien utile...).

- La variable apparaît "nue" dans l'égalité, c.à.d. qu'il y a un n et pas seulement des images. Cela doit déclencher un réflexe et nous pousser à nous demander si une solution de l'équation fonctionnelle ne serait pas bijective ou, au moins, injective. C'est une information utile lorsque f apparaît sous forme de composées successives.

Soit f une éventuelle solution.

Si a et b sont deux entiers naturels tels que $f(a) = f(b)$, alors on a aussi $f(f(a)) = f(f(b))$ et $f(f(f(a))) = f(f(f(b)))$. En additionnant, il vient

$3a = f(f(f(a))) + f(f(a)) + f(a) = f(f(f(b))) + f(f(b)) + f(b) = 3b$

donc $a = b$. Et ainsi f est injective.

D'autre part, pour $n = 0$, il vient $f(f(f(0)))+f(f(0))+f(0) = 0$. Or, les nombres $f(f(f(0))), f(f(0))$ et $f(0)$ sont des entiers naturels donc $f(0) = f(f(0)) = f(f(f(0))) = 0$.

Pour $n = 1$, il vient $f(f(f(1))) + f(f(1)) + f(1) = 3$. Or, les nombres $f(f(f(1))), f(f(1))$ et $f(1)$ sont des entiers naturels et, puisque f est injective, aucun ne peut être égal à 0. La seule possibilité est donc que $f(1) = f(f(1)) = f(f(f(1))) = 1$.

En répétant le raisonnement pour $n = 2$, puis $n = 3$, on voit apparaître que $f(n) = n$.

Supposons que pour un certain entier n fixé on ait $f(k) = k$ pour tout entier $k \leqslant n$. D'après l'égalité de départ, on a

$f(f(f(n + 1))) + f(f(n + 1)) + f(n + 1) = 3(n + 1)$

Mais, puisque f est injective, donc $f(n + 1) \geqslant n + 1$. Et, si $f(f(n + 1)) = k$ avec $k \leqslant n$, on aurait $f(f(n + 1)) = f(k)$ d'où $f(n + 1) = k$ (puisque f est injective), en contradiction avec la phrase précédente. Donc, $f(f(n+1)) \geqslant n+1$. Et, on montre de même que $f(f(f(n+1))) \geqslant n+1$.

Mais alors, si l'on veut que l'égalité soit satisfaite, il faut donc que

$f(f(f(n + 1))) = f(f(n + 1)) = f(n + 1) = n + 1$, ce qui assure le résultat pour $n + 1$. Ainsi, pour tout entier naturel n, on doit avoir $f(n) = n$.

Réciproquement, il est facile de vérifier que $f : n \longmapsto n$ est bien une solution du problème.

D'après les exemples ci-dessus, on voit bien qu'avec les entiers, on peut construire les nombres $f(n)$ de proche en proche et, éventuellement, étendre la construction aux nombres rationnels qui s'expriment directement grâce aux entiers.

L'idée du raisonnement de proche en proche, ou de façon plus rigoureuse, du raisonnement par récurrence est basée sur le fait que l'on peut numéroter les entiers à l'aide des entiers naturels. On peut s'attendre à ce que ce type de raisonnement puisse être utilisé pour d'autres ensembles ayant la même propriété.

Définition.

Un ensemble E sera dit *dénombrable* si l'on peut numéroter ses éléments à l'aide des entiers naturels, ou d'une partie d'entre eux, de sorte que deux éléments de E distincts aient toujours des numéros différents. De façon plus formelle, E sera dit dénombrable s'il existe une fonction *injective* f de E dans $\mathbb{N}$.

Remarques.

- Avec cette définition, un ensemble fini sera dénombrable. Ce n'est pas toujours la convention choisie, et il est donc conseillé de préciser les choses au départ.
- Clairement, l'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable en considérant la fonction $f : \mathbb{Z} \rightarrow N$ définie par $f(0) = 0$ et $f(n) = 2n$ et $f(-n) = 2n - 1$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Théorème 1.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ de tous les rationnels est dénombrable.

Preuve.

On peut numéroter les points du plan à coordonnées entières (que l'on identifie à ses coordonnées) en partant de $(0,0),(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1),(2,0),(1,1),(0,2),(-1,1),...$ en suivant une spirale.

Ainsi, puisque tout rationnel x peut s'écrire sous la forme $x=\frac{p}{q}$, avec p,q entiers, on peut pour chaque couple (p,q) correspondant noter son numéro, puis donner à x le plus petit des numéros possibles. D'où le résultat.

Remarque.

La dénombrabilité de $\mathbb{Q}$ permet de construire des fonctions assez surprenantes. En voici deux exemples :

Exercice 4.

Déterminer une fonction $f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{N}$ injective et telle que, pour tout $q\in\mathbb{Q}$, le nombre $f(q)$ soit un carré.

Solution exercice 4.

Considérons une numérotation arbitraire des rationnels $x_0,x_1,...,x_n,...$

La fonction $f:x_n\longmapsto n^2$ est alors une solution du problème.

Exercice 5.

Déterminer une fonction $f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$ telle que, pour tous a,b avec $a<b$, l'image de $]a,b[$ soit $\mathbb{Q}$ tout entier.

Solution exercice 5.

On va construire rationnel par rationnel une telle fonction. Bien sûr, puisqu'il y a une infinité de rationnels, il faudra à un moment passer à une construction un peu générale...

Que veut-on ? Que le rationnel 1 ait un antécédent dans chaque intervalle ouvert ? Qu'à cela ne tienne, mettons-le. On choisit donc un point dans chaque intervalle ouvert et on envoie chacun d'eux sur 1. Bon, évidemment, dis comme ça, on ne voit pas trop ce qu'il faut faire et comment on va choisir un point dans chaque intervalle ouvert, d'autant qu'il va falloir recommencer pour tous les autres rationnels après l'avoir fait pour 1. L'idée est alors de construire des ensembles deux à deux disjoints chacun intersectant tout intervalle ouvert.

On commence alors par considérer $A_1=\{\frac{m}{2^n},\ n\in\mathbb{N}^*\text{ et }m\in\mathbb{Z}\text{ impair}\}$.

C'est bien un ensemble de rationnels, la condition sur l'entier m d'être impair n'intervenant que pour que la fraction ne puisse se simplifier et éviter de tomber sur 1. Pour tous a,b avec $a<b$, l'intervalle $]a,b[$ contient au moins un élément de A_1 : en effet, si l'on choisit un n suffisamment grand, on a $2^n(b-a)\geqslant 3$ et donc l'intervalle $]2^na;2^nb[$ contient au moins deux entiers consécutifs dont l'un, disons m, est impair. Le nombre $\frac{m}{2^n}$ est alors dans A_1 et dans $]a,b[$.

Puis, on considère $A_2=\{\frac{m}{3^n},\ n\in\mathbb{N}^*\text{ et }m\in\mathbb{Z}\text{ non multiple de }3\}$. Le raisonnement ci-dessus s'adapte pour prouver que tout intervalle ouvert contient au moins un élément de A_2, et des considérations arithmétiques élémentaires montrent que $A_1\cap A_2=\emptyset$.

Et ainsi de suite, si $p_1,p_2,...,p_k,....$ désigne la suite infinie croissante des nombres premiers, on pose $A_k=\{\frac{m}{p_k^n},\ n\in\mathbb{N}^*\text{ et }m\in\mathbb{Z}\text{ non multiple de }p_k\}$.

On montre de même que tout intervalle ouvert contient au moins un élément de A_k, et des considérations arithmétiques élémentaires montrent que $A_k\cap A_i=\emptyset$ pour tout $i<k$.

On construit ainsi une infinité dénombrable d'ensembles deux à deux disjoints chacun intersectant tout intervalle ouvert.

Soit alors $x_1, x_2, ..., x_k, ...$ une numérotation arbitraire des rationnels. On définit alors une fonction f en posant

$f(x) = x_k$ si $x \in A_k$, et $f(x) = 0$ si x n'est dans aucun des A_k.

Il est clair que cette fonction f convient.

Acte II : les réels.

Les techniques classiques basées sur la construction de proche en proche valables avec les entiers, les rationnels, ou de façon plus générale avec les ensembles dénombrables, ne vont plus être utilisables sur les réels car :

Théorème 2.

L'ensemble $\mathbb{R}$ de tous les réels n'est pas dénombrable.

Preuve.

On va prouver que l'ensemble $[0, 1[$ n'est déjà pas dénombrable, ce qui suffit pour conclure.

Par l'absurde : supposons que $[0, 1[$ soit dénombrable.

Soit alors $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ les réels de $[0, 1[$ dans l'ordre d'une numérotation.

On construit alors le nombre $a = 0, a_1 a_2 ... a_n ...$ où, pour chaque i, on a $a_i = 0$ si la $i^{ième}$ décimale de x_i est impaire, et $a_i = 1$ si la $i^{ième}$ décimale de x_i est paire (si l'écriture décimale de x_i est finie, on ajoute une infinité de 0 pour la rendre infinie).

Il est clair qu'alors $a \in [0, 1[$.

Par conséquent, il existe un entier n tel que $a = x_n$. Or, par construction, la $i^{ième}$ décimale de x_n est de parité contraire de celle de a, ce qui assure que $a \neq x_n$. Contradiction.

Remarques.

Cela n'empêchera pas d'utiliser des techniques classiques (s'il y a plusieurs paramètres, donner des valeurs particulières à x et/ou y, etc...) déjà utilisée, mais dans le cas d'une équation fonctionnelle à un seul paramètre x, on aura souvent besoin d'une hypothèse supplémentaire du type croissance, continuité, injectivité... (attention : parfois, ce ne sera pas une hypothèse supplémentaire à proprement parlé car elle se déduira de l'équation fonctionnelle elle-même).

Cela dit, rien n'interdit de commencer par regarder comment une solution éventuelle d'une équation fonctionnelle définie sur $\mathbb{R}$ est définie sur les entiers ou les rationnels. Si la fonction est continue ou croissante, on peut alors "transporter" les résultats obtenus sur $\mathbb{R}$ grâce au résultat suivant :

Théorème 3.

Tout réel est la limite d'une suite croissante (resp. décroissante) de rationnels.

Preuve.

On trouvera une rédaction plus rigoureuse dans le poly *Equations fonctionnelles* disponible sur le site d'Animath, rubrique *Les cours de l'OFM.* Disons juste que pour un réel x fixé, il suffit de considérer son développement décimal infini (quitte à ajouter des 0) :

$$x = a, a_1 a_2 ... a_n ...$$

puis, pour tout entier $n \geqslant 1$, de tronquer ce développement à la $n^{ième}$ décimale en arrondissant par valeur inférieure ou par valeur supérieure selon ce que l'on veut.

Définition.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est *strictement croissante* sur $\mathbb{R}$ lorsque :

pour tous a, b, avec $a < b$ on a $f(a) < f(b)$
(une courbe qui "monte toujours").

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est *strictement décroissante* sur $\mathbb{R}$ lorsque :

pour tous a, b, avec $a < b$ on a $f(a) > f(b)$
(une courbe qui "descend toujours").

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est *croissante* sur $\mathbb{R}$ lorsque :

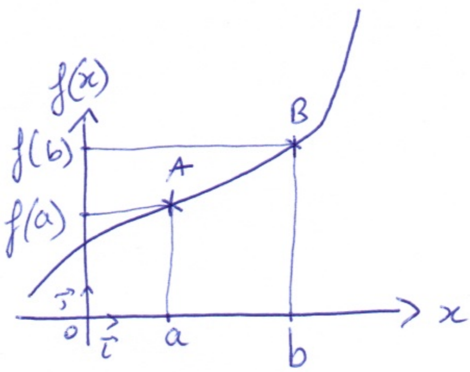
pour tous a, b, avec $a < b$ on a $f(a) \leqslant f(b)$
(une courbe "qui ne descend pas").

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On dit que f est *décroissante* sur $\mathbb{R}$ lorsque :

pour tous a, b, avec $a < b$ on a $f(a) \geqslant f(b)$
(une courbe "qui ne monte pas").

Remarque.

- Une fonction croissante conserve l'ordre.
- Une fonction décroissante conserve l'ordre.



Exercice 6 (Equation de Cauchy).

Déterminer toutes les fonctions croissantes $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ pour tous réels } x \text{ et } y.$$

Solution exercice 6.

Comme dans l'exercice 2, on voit vite que toute fonction linéaire est une solution. La difficulté est que sur $\mathbb{R}$, si l'on n'impose aucune hypothèse, il existe des solutions non linéaires de l'équation de Cauchy, mais d'en construire une nous emmenerait trop loin du cadre de ce texte. On va prouver que, sous l'hypothèse de croissance, une solution de l'équation est linéaire.

On sait déjà (cf. ex. 2) que si f est une solution du problème alors il existe un réel a tel que, pour tout rationnel q, on ait $f(q) = aq$.

Soit x un réel. D'après le théorème 3, il existe une suite croissante (x_n) et une suite décroissante (y_n) de rationnels qui ont chacune pour limite x.

Alors, pour tout entier n, on a $x_n \leqslant x \leqslant y_n$ et, puisque f est croissante sur $\mathbb{R}$, on a alors $f(x_n) \leqslant f(x) \leqslant f(y_n)$, d'où $ax_n \leqslant f(x) \leqslant ay_n$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $ax \leqslant f(x) \leqslant ax$, et ainsi que $f(x) = ax$.

Finalement, les solutions du problème sont les fonctions linéaires.

Exercice 7 (Test d'entrée OFM 2009).

a) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telles que

$$f(x^2) + f(y) = f(x^2 + y + xf(4y)) \text{ pour tous } x, y \geqslant 0.$$

b) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telles que

$$f(x^2) + f(y) = f(x^2 + y + xf(4y)) \text{ pour tous } x, y > 0.$$

c) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telles que

$$f(x^2) + f(y) = f(x^2 + y + xf(4y)) \text{ pour tous } x, y \geqslant 0.$$

Moralité.

Solution exercice 7.

a) Soit f une solution éventuelle. Pour $x = y = 0$, il vient $f(0) = 0$ ce qui est interdit...il n'y a donc pas de solution.

b) Soit f une solution éventuelle.

Puisque f apparaît sur chacun des termes de l'égalité, parfois après composition, l'idée est d'essayer de prouver que f est injective. Pour cela, on remarque que si y est fixé et $h > 0$, alors on peut toujours trouver $x > 0$ tel que $x^2 + xf(4y) = h$ (le membre de gauche prend toutes les valeurs strictement positives) et que, pour un tel x, on a $f(y+h) = f(y) + f(x^2) > f(y)$ puisque f est à valeurs dans $\mathbb{R}^{+*}$. Cela assure que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, et donc que f est bien injective.

La seconde idée est de créer de la symétrie entre les paramètres : puisque tout réel positif est un carré, on peut poser $a = x^2$ dans l'équation initiale, et donc $f(a) + f(y) = f(a + y + \sqrt{a}f(4y))$ pour tous $a, y > 0$.

Puisque le membre de gauche est symétrique en a et y, il doit en être de même du membre de droite, ce qui conduit à $f(a + y + \sqrt{a}f(4y)) = f(a + y + \sqrt{y}f(4a))$ pour tous $a, y > 0$. C'est ici que l'injectivité de f assure qu'alors, pour tous $a, y > 0$, on a $a+y+\sqrt{a}f(4y) = a+y+\sqrt{y}f(4a)$, ou encore $\sqrt{a}f(4y) = \sqrt{y}f(4a)$.

En choisissant $a = 1$ et $x = 4y$, on en déduit que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \alpha\sqrt{x}$ pour une certaine constante $\alpha > 0$.

Réciproquement, si pour tout $x > 0$, on a $f(x) = \alpha\sqrt{x}$ pour une certaine constante $\alpha > 0$, on vérifie directement que f est une solution si et seulement si $\alpha = 1$.

Finalement, la seule solution est $f : x \longmapsto \sqrt{x}$.

c) Bon, cette fois, on a $f(0) = 0$ et le raisonnement du b) assure que f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ mais pas forcément strictement croissante, ce qui nous fait perdre l'injectivité. Cela dit, si f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^{+*}$, on retombe sur le b) et sa conclusion. On vérifie d'ailleurs que $x \longmapsto \sqrt{x}$ est encore une solution.

Il ne reste plus qu'à étudier ce qu'il se passe lorsque f s'annule en $a > 0$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}^+$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^+$, on a donc $f(x) = 0$ pour tout $x \in [0; a]$.

L'idée est alors de travailler sur la plus grande valeur de a possible, si elle existe. On suppose qu'il existe $m > 0$ tel que $f(x) = 0$ pour $x < m$ et $f(x) > 0$ pour $x > m$ (pour $f(m)$ on ne sait pas trop si c'est 0 ou pas). On choisit alors $x > 0$ tel que $x^2 < m$ et $y = m - x^2 + \frac{m-x^2}{2} > 0$. On a $m - y = -\frac{m+3x^2}{2} < 0$ donc $f(x^2) = f(y) = 0$ et ainsi $f(x^2 + y + xf(4y)) = 0$.

Pourtant $x^2+y+xf(4y) \geqslant x^2+y = m+\frac{m-x^2}{2} > m$ donc $f(x^2+y+xf(4y)) > 0$. Contradiction.

Et ainsi un tel réel m n'existe pas, et f doit donc être identiquement nulle.

Réciproquement, la fonction nulle convient évidemment.

Finalement, les solutions sont $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto 0$.

Rien ne ressemble plus à une équation fonctionnelle qu'une équation fonctionnelle et pourtant les techniques de résolution ne sont pas toujours les mêmes. Cet exercice montre par exemple l'importance des ensembles sur lesquels on travaille.

Acte III : Des exercices.

Exercice 8 (Crux Mathematicorum 2003).

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y)), \text{ pour tous réels } x, y.$$

Exercice 9.

a) Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}^*$ prenant une infinité de valeurs différentes et telle que, pour tous $q, q' \in \mathbb{Q}$ avec $q \leqslant q'$, on ait $f(q)$ divise $f(q')$?

b) Reprendre la question précédente en imposant que f ne prenne jamais deux fois une même valeur.

Exercice 10 (Ukraine 1997).

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Q}^{+*} \longrightarrow \mathbb{Q}^{+*}$ telles que

$$f(x+1) = f(x) + 1 \text{ et } f(x^2) = (f(x))^2, \text{ pour tous rationnels } x, y > 0.$$

Exercice 11.

Prouver qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante telle que

$$f(x^2) - (f(x))^2 \geqslant \tfrac{1}{4}, \text{ pour tout réel } x.$$

Exercice 12.

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ telles que

$$f(x^y) = f(x)^{f(y)} \text{ pour tous entiers } x, y > 0.$$

Exercice 13 (OIM 2008).

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathbb{R}^{+*}$ telles que

$$\tfrac{(f(w))^2+(f(x))^2}{f(y^2)+f(z^2)} = \tfrac{w^2+x^2}{y^2+z^2} \text{ pour tous réels } x, y, z, w > 0 \text{ tels que } wx = yz.$$

Exercice 14.

On note $[X]$ la partie entière du réel X.
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$f([x]y) = f(x)[f(y)] \text{ pour tous réels } x \text{ et } y.$$

Exercice 15 (Suède 1962).

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$|f(x) - f(r)| \leqslant 7|x - r|^2 \text{ pour tout réel } x \text{ et tout rationnel } r.$$

Exercice 16 (Entrainement OFM 2001).

Déterminer une fonction $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ vérifiant les deux conditions suivantes :
(i) $f(a) < a$ pour tout rationnel a
(ii) pour tout rationnel a, il n'existe qu'un nombre fini de rationnels b tels que $f(b) < a < b$.

3 Solution des exercices.

Solution exercice 8.

Soit f une solution éventuelle.

Pour $x = y$, il vient $f(0) = 0$

Pour $y = -x \neq 0$, il vient $0 = f(0) = 2x(f(x)+f(-x))$ donc $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \neq 0$. Ceci étant clairement vrai pour $x = 0$, c'est donc que f est impaire.

En remplaçant y par $-y$ dans l'égalité initiale, pour tous réels x, y, on a alors $f(x^2 - y^2) = (x + y)(f(x) - f(y))$.

Avec l'égalité initiale, il vient $yf(x) = xf(y)$ pour tous réels x, y.

Pour $y = 1$, on a alors $f(x) = xf(1)$ pour tout réel x, ce qui prouve que f est linéaire.

Réciproquement, il est facile de vérifier que toute fonction linéaire est bien une solution du problème.

Solution exercice 9.

a) Pour tout rationnel $q < 0$, on pose $f(q) = 1$.

Pour tout $q \in \mathbb{Q}^+$, il existe un unique entier naturel n_q tel que $n_q \leqslant q < n_q + 1$ (le nombre n_q est la partie entière de q). On pose alors $f(q) = 2^{n_q}$.

Il est clair que la fonction ainsi construite est une solution du problème.

b) Par l'absurde : supposons qu'une telle fonction f existe.

Il existe une infinité de rationnels négatifs q et, pour chacun, le nombre $f(q)$ divise $f(0)$. L'entier $f(0)$ admet donc une infinité de diviseurs distincts, ce qui entraine que $f(0) = 0$, ce qui est interdit. Contradiction.

Ainsi, il n'existe aucune fonction ayant les propriétés désirées.

Solution exercice 10.

On voit vite que $f : x \longmapsto x$ est une solution du problème. Prouvons que c'est la seule.

Soit f une solution éventuelle. De la première condition, on en déduit sans difficulté que $f(x + n) = f(x) + n$ pour tous $x \in \mathbb{Q}^{+*}$ et $n \in \mathbb{N}$.

Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. On a $(\frac{a}{b} + b)^2 = (\frac{a}{b})^2 + 2a + b^2$ donc, d'après la seconde condition :
$f((\frac{a}{b} + b)^2) = (f(\frac{a}{b} + b))^2 = (f(\frac{a}{b}) + b)^2 = (f(\frac{a}{b}))^2 + 2bf(\frac{a}{b}) + b^2$
et d'autre part
$f((\frac{a}{b} + b)^2) = f((\frac{a}{b})^2 + 2a + b^2) = f((\frac{a}{b})^2) + 2a + b^2 = (f(\frac{a}{b}))^2 + +2a + b^2$.

On en déduit immédiatement que $bf(\frac{a}{b}) = a$, et donc que $f(\frac{a}{b}) = \frac{a}{b}$ pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$.

Ainsi, $f(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{Q}^{+*}$.

Solution exercice 11.

Par l'absurde : supposons qu'une telle fonction f existe.

Alors, pour $x = 0$, on a $f(0) - (f(0))^2 \geqslant \frac{1}{4}$, ou encore $(f(0) - \frac{1}{2})^2 \leqslant 0$. Par conséquent $f(0) = \frac{1}{2}$.

Mais, pour $x = 1$, on a aussi $f(1) - (f(1))^2 \geqslant \frac{1}{4}$, donc $f(1) = \frac{1}{2}$.

Par suite $f(0) = f(1)$, ce qui contredit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Solution exercice 12.

Pour tous $n, c \in \mathbb{N}^*$, on a alors $f(c^{c^n}) = f(c)^{f(c^n)} = f(c)^{f(c)^{f(n)}}$.

D'autre part
$f(c^{c^n}) = f((c^{c^{n-1}})^c) = f(c^{c^{n-1}})^{f(c)} = (f(c^{c^{n-2}})^{f(c)})^{f(c)}$

$$= (f(c^{c^{n-2}})^{f(c)^2}$$
$$= ...$$
$$= f(c)^{f(c)^n}.$$

Si f n'est pas constante égale à 1, il existe donc $c \in \mathbb{N}^*$ tel que $f(c) > 1$ et les deux relations ci-dessus conduisent à $f(c)^{f(n)} = f(c)^n$, puis à $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Les seules solutions possibles sont donc $f : x \longmapsto 1$ et $f : x \longmapsto x$.

On vérifie facilement que ces deux fonctions conviennent bien.

Solution exercice 13.

Soit f une solution éventuelle. Pour tout $x > 0$, en choisissant $w = y = z = x$, il vient facilement $(f(x))^2 = f(x^2)$, et en particulier $f(1) = 1$ (car $f(1) \neq 0$).

Pour tout $x > 0$, en choisissant $w = 1, y = z = \sqrt{x}$, il vient alors $\frac{1+(f(x))^2}{2f(x)} = \frac{1+x^2}{2x}$ et donc $x(f(x))^2 + (x^2+1)f(x) + x = 0$.

Cette dernière équation peut être vue comme une équation du second degré en $f(x)$, que l'on résout et qui permet alors d'affirmer que, pour tout $x > 0$, on a $f(x) = x$ ou $f(x) = \frac{1}{x}$.

Il est d'ailleurs facile de vérifier que les fonctions $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto x$ sont effectivement des solutions du problème.

Il reste à prouver qu'il n'y en a pas d'autre, en montrant qu'il n'y a pas d'hybride formé à partir des deux valeurs possibles de $f(x)$. Par l'absurde : supposons que la fonction f soit une solution du problème et qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\}$ tels que $f(a) = a$ et $f(b) = \frac{1}{b}$.

En utilisant l'égalité initiale pour $w = a, x = b, y = ab, z = 1$, il vient
$(a^2 + b^2)(1 + (f(ab))^2) = a^4b^2 + 2a^2 + \frac{1}{b^2}$.
- Si $f(ab) = ab$ alors $b^2 + a^2b^4 = a^2 + \frac{1}{b^2}$, d'où $(b^4 - 1)(1 + a^2b^2) = 0$, ce qui est impossible.
- Si $f(ab) = \frac{1}{ab}$ alors $\frac{1}{a^2} + b^2 = a^4b^2 + a^2$, d'où $(a^4 - 1)(1 + a^2b^2) = 0$, ce qui est impossible.

Ainsi, dans tous les cas, on obtient une contradiction, et une telle fonction n'existe pas.

Finalement, les solutions sont $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto x$.

Solution exercice 14.

La fonction nulle convient clairement. On suppose donc que f est une solution non identiquement nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout réel y, on a $f(ny) = f(n)[f(y)]$.

En particulier, pour $y = 1$, on a alors $f(n) = f(n)[f(1)]$.

S'il existe un entier $n \neq 0$ tel que $f(n) = 0$, on en déduit que $f(ny) = 0$ pour tout réel y, et donc que f est identiquement nulle. Contradiction.

Donc, $f(n) \neq 0$ pour tout entier $n \neq 0$, et en particulier, on a $f(1) \neq 0$.

Puisque $f(1) = f(1)[f(1)]$, c'est que $[f(1)] = 1$.

Pour tout réel x, en prenant $y = 1$, on a $f([x]) = f(x)$, ce qui assure que f est constante sur chaque intervalle $[n; n+1[$.

D'autre part, pour tout réel y, en prenant $x = 1$, il vient $f(y) = f(1)[f(y)]$.

Pour tous $n \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{R}$, on a alors
$f(ny) = f(1)[f(ny)]$ et $f(ny) = f(n)[f(y)] = f(1)[f(n)][f(y)]$
d'où $[f(ny)] = [f(n)][f(y)]$.

En particulier, pour $n \geqslant 2$ et $y = 1 + \frac{1}{n}$, on a $[y] = 1$ et donc $f(y) = f([y]) = f(1)$, d'où $[f(y)] = 1$ et $[f(n+1)] = [f(ny)] = [f(n)]$.

On en déduit qu'il existe donc $a \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout entier $n \geqslant 2$, on ait $a \leqslant f(n) < a+1$, et donc $a \leqslant f(x) < a+1$ pour tout réel $x \geqslant 2$.

En particulier, $a = [f(4)] = [f(2)][f(2)] = a^2$, ce qui entraine que $a = 0$ ou $a = 1$.

Mais $a = 0$ est impossible puisqu'on a dit depuis le départ que $f(2) \neq 0$, donc $a = 1$ et, $1 \leqslant f(x) < 2$ pour tout $x \geqslant 2$.

Notons que cela reste vrai pour $x \in [1;2[$ puisque $[f(1)] = 1$.

Si maintenant $y = \frac{1}{2}$ et $x = 2$, de l'égalité initiale il vient $f(1) = f(2)[f(\frac{1}{2})] = f(1)[f(\frac{1}{2})]$, d'où $[f(\frac{1}{2})] = 1$ et $f(0) = f(\frac{1}{2}) \in [1;2[$.

Mais alors, pour tout réel x, on a $f(0) = f(x)[f(0)] = f(x)$, ce qui prouve que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, il existe un réel $\alpha \in [1;2[$ tel que $f(x) = \alpha$ pour tout réel x.

On vérifie qu'un telle fonction est effectivement une solution du problème.

Finalement, les solutions sont les fonctions constantes $x \longmapsto \alpha$, avec $\alpha = 0$ ou $\alpha \in [1;2[$.

Solution exercice 15.

Evidemment, là, c'est plutôt d'une inéquation fonctionnelle qu'il s'agit. Mais bon, ne chipotons pas...

Soit f une solution éventuelle. Pour créer de la symétrie entre les paramètres, on va d'abord regarder ce qu'il se passe sur les rationnels.

Soient $a, b \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $i \in \{0, 1, ..., n\}$, on pose $a_i = a + i\frac{b-a}{n}$. Il est clair que que les a_i sont tous rationnels et que $a_{i+1} - a_i = \frac{b-a}{n}$ pour $i \leqslant n-1$.

D'après l'inégalité triangulaire, on a alors :

$$|f(a) - f(b)| \leqslant \sum_{i=0}^{n-1} |f(a_{i+1}) - f(a_i)| \leqslant 7\sum_{i=0}^{n-1}(a_{i+1} - a_i)^2 = \frac{7(b-a)^2}{n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $f(a) = f(b)$. Par suite, la fonction f est constante sur $\mathbb{Q}$.

Il reste à étendre ce résultat à $\mathbb{R}$.

Soit $c \in \mathbb{R}$ tel que $f(r) = c$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$. Soit x un réel. On sait qu'il existe une suite (r_n) de rationnels qui converge vers x et, sans perte de généralité, on peut supposer que $|x - r_n| \leqslant \frac{1}{10^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors, pour tout entier $n \geqslant 0$, on a

$|f(x) - c| = |f(x) - f(r_n)| \leqslant 7(x - r_n)^2 \leqslant \frac{7}{10^{2n}}$.

En faisant tendre n vers $+\infty$, on en déduit que $f(x) = c$, et donc que f est constante sur $\mathbb{R}$.

Réciproquement, il est facile de vérifier que les fonctions constantes sont bien des solutions du problème.

Solution exercice 16.

La première condition pousse à poser $f(a) = a - g(a)$ pour tout rationnel a. La fonction g ainsi définie doit être à valeurs strictement positives.

La seconde condition s'écrit : pour tout $a \in \mathbb{Q}$, il n'existe qu'un nombre fini de $b \in \mathbb{Q}$ tels que $b - g(b) < a < b$.

Posons $a = \frac{m}{n}$ et $b = \frac{p}{q}$, avec m, n, p, q entiers et $n, q > 0$ et les fractions sont supposées irréductibles.

La condition $a < b$ est équivalente à $\frac{pn-qm}{pn} > 0$. Puisque le dénominateur est positif, cela se traduit par $pn - qm > 0$, et comme il s'agit d'un entier, c'est équivalent à $pn - qm \geqslant 1$.

Il s'agit donc de définir $g(\frac{p}{q})$ de sorte que $g(\frac{p}{q}) > 0$ et que, pour tout entiers m, n avec $n > 0$, tels que $pn - qm \geqslant 1$, on ait $g(\frac{p}{q}) > \frac{pn-qm}{pn}$ que pour un nombre fini de rationnels $\frac{p}{q}$.

Comme $\frac{pn-qm}{pn} \geqslant \frac{1}{pn}$, cela sera assuré si pour n fixé, on a $g(\frac{p}{q}) \leqslant \frac{1}{pn}$ pour tout entier $p > 0$ sauf pour un nombre fini de cas. Il suffit alors de poser par exemple $g(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q^2}$ pour avoir ce que l'on désire.

Et finalement, la fonction $f : \frac{p}{q} \longmapsto \frac{p}{q} - \frac{1}{q^2}$, où $\frac{p}{q}$ est supposée irréductible, convient.

VII. Exposé

La soirée du mardi fut l'occasion d'une petite conférence.

1 Cantor

François Lo Jacomo posait la question suivante : Comment différencier un segment d'un carré ?

François LO JACOMO
Soirée du 3 novembre 2009

Comment différencier un segment d'un carré ?

L'étude des fonctions a permis de préciser, au cours du XIX° siècle, les différents ensembles de nombres, en faisant apparaître des difficultés inattendues qui ont amené des mathématiciens du tout début du XX° siècle à remettre en question les fondements des mathématiques.

Rappelons que lorsque deux ensembles sont finis, la meilleure manière de prouver qu'ils ont le même nombre d'éléments est d'établir une bijection de l'un vers l'autre. Peut-on généraliser cela à des ensembles infinis ? D'une certaine manière, oui. En quelque sorte, un ensemble dénombrable E est un ensemble qui a le même nombre d'éléments que l'ensemble des entiers naturels : on peut numéroter les éléments de E, ce qui revient à établir une bijection entre E et l'ensemble **N** des entiers naturels. Vous avez vu que l'ensemble des nombres réels n'est pas dénombrable. Il contient « plus d'éléments » que **N**, et, de ce fait, les techniques utilisables avec des ensembles dénombrables ne s'appliquent souvent pas à l'ensemble des réels ni, plus généralement, aux ensembles non dénombrables.

Mais au cours du XIX° siècle, on s'est posé la question : y a-t-il autant de points dans un segment que dans un carré ? Le mathématicien allemand Georg Cantor (1845 – 1918), à qui l'on doit la démonstration que l'ensemble des réels n'est pas dénombrable, et qui par la suite a fondé la théorie des ensembles, fut stupéfait en découvrant la réponse, au point qu'il écrivit, dans une lettre de 1877 : « je le vois, mais je ne le crois pas… ».

Oui, Cantor trouva une bijection entre l'ensemble des points d'un segment et l'ensemble des points d'un carré, ceci de manière toute simple et irréfutable. Un point du segment [0,1] peut s'écrire sous forme décimale, par exemple : $x = 0{,}3189657326842695483\ldots$ avec une infinité de décimales. L'idée essentielle de la démonstration est de lui associer deux réels : celui constitué par la première, la troisième, la cinquième… décimales : $y = 0{,}3867282943\ldots$ et celui constitué par la deuxième, la quatrième, la sixième… décimales : $z = 0{,}195364658\ldots$ Le point de coordonnées (y, z) est un point du carré, et nous avons là une manière d'associer bijectivement les points d'un segment et ceux d'un carré. En effet, réciproquement, à chaque point du carré, de coordonnées (y, z) avec $y = 0{,}y_1y_2y_3y_4y_5y_6y_7\ldots$ et $z = 0{,}z_1z_2z_3z_4z_5z_6z_7\ldots$ on associe le point x du segment obtenu en alternant les décimales de l'abscisse et celles de l'ordonnée : $x = 0{,}y_1z_1y_2z_2y_3z_3y_4z_4y_5z_5y_6z_6y_7z_7\ldots$

Ce résultat choque l'intuition car habituellement, les nombres réels ne sont pas seulement des « éléments d'un ensemble ». A l'origine, les nombres peuvent servir à compter ou à mesurer. Lorsqu'on s'est aperçu que même avec toutes les fractions, on ne pouvait pas mesurer par exemple la diagonale d'un carré, autrement dit qu'aucun rationnel n'avait pour carré 2, on a complété cet ensemble des nombres rationnels **Q** par des nombres irrationnels comme $\sqrt{2}$ pour construire l'ensemble des nombres réels **R**. Mais intuitivement, cet ensemble des réels possède quelque chose de plus que l'ensemble des rationnels. Il semble possible de différencier ainsi le segment du carré : si du segment [0, 1] on enlève un point (autre que 0 ou 1), on coupe le segment en deux intervalles « qui ne se touchent pas », alors que si on enlève un point d'un carré, le carré privé d'un point est toujours « d'un seul tenant », on peut contourner le point manquant pour relier n'importe quel point de l'ensemble restant à n'importe quel autre.

Pour formaliser cette idée intuitive, on doit introduire la topologie. Un nombre réel est en fait une limite de nombres rationnels. Certes, il n'existe pas de rationnel dont le carré soit égal à 2, mais on peut construire une suite infinie de fractions dont le carré se rapproche indéfiniment de 2 : le nombre réel $\sqrt{2}$ est alors défini comme la limite de cette suite. Une fonction qui respecte la topologie est dite continue : lorsque la variable x se rapproche indéfiniment d'une valeur x_0, alors $f(x)$ se rapproche indéfiniment de la valeur $f(x_0)$. En d'autres termes, la limite de $f(x)$, lorsque x tend vers x_0, est $f(x_0)$. Il est difficile de concevoir des fonctions qui ne soient aucunement continues. Si l'on considère **R** comme seulement un ensemble, dépourvu de toute structure topologique, on peut bien sûr en trouver, mais on est bien incapable de se les représenter. On peut dire que dans l'ensemble des réels, l'équation de Cauchy : $f(x+y) = f(x) + f(y)$ admet une infinité de solutions autres que les fonctions affines : $f(x) = ax$, mais on ne peut s'imaginer aucune de ces solutions.

La question se pose, dès lors, de savoir s'il convient d'utiliser les mêmes outils dans l'étude des ensembles dénombrables et dans l'étude des ensembles non dénombrables. Car certaines propriétés qui semblent toutes naturelles pour les ensembles dénombrables, choquent notre intuition pour les ensembles non dénombrables. C'est le cas, notamment, du résultat ci-dessus selon lequel il y a autant de points sur un segment de droite que dans un carré. Et cela a amené les mathématiciens du tout début du XX° siècle à préciser de différentes manières les fondements des mathématiques, en mettant en lumière un certain nombre de difficultés ou de paradoxes. A titre d'exemple, Cantor s'est posé la question : « existe-t-il des ensembles ayant plus d'éléments que l'ensemble des rationnels et moins d'éléments que l'ensemble des réels ? ». En d'autres termes, peut-on trouver un sous-ensemble de **R** qui ne soit pas dénombrable et ne soit pas non plus en bijection avec **R** ? La réponse à cette question est qu'avec les axiomes habituels de la théorie des ensembles, il est impossible de répondre « oui » et il est impossible de répondre « non ». C'est ce qu'on appelle une proposition indécidable. A moins de faire appel à d'autres axiomes…

L'important est qu'il y a un grand saut entre les nombres rationnels et les nombres réels, et que dans l'étude des équations fonctionnelles notamment, les méthodes utilisables pour trouver des fonctions de variables entière ou rationnelle ne sont pas nécessairement utilisables pour trouver des fonctions de variable réelle. Sauf par exemple si l'on dispose de l'hypothèse supplémentaire que la fonction est continue, auquel cas le fait de connaître cette fonction sur **Q** suffit à la « prolonger » sur **R**.

VIII. Partie entière et valeur absolue

par François Lo Jacomo

Pour conclure ce stage, avant le test de cet aprés-midi, je propose trois exercices permettant de manipuler des fonctions qui ne vous sont pas encore familiéres : la partie entiére et la valeur absolue.

Rappelons que la partie entiére d'un nombre réel x, que l'on note $[x]$, est le plus grand entier inférieur ou égal à x. Lorsque $x \geqslant 0$, par exemple : $x = 317,645932$, la partie entière est la partie qui précède la virgule : $[x] = 317$. C'est ce que justifie la dénomination "partie entière", mais cela n'est pas une "définition", car cela ne se généralise pas aux nombres négatifs : si $x = -317,645932$, $[x] = -318$ car $-317 > x$.

Exercice 1

a) Montrer que pour tout entier n, $\left[\sqrt{n} + \sqrt{n+2}\right] = \left[\sqrt{4n+2}\right]$.

b) Trouver un réel x tel que $\left[\sqrt{x} + \sqrt{x+2}\right] \neq \left[\sqrt{4x+2}\right]$.

Solution

a) On vérifie aisément que $\left[\sqrt{3} + \sqrt{5}\right] = 3 = \left[\sqrt{14}\right]$ par exemple, mais il faut le démontrer pour tout entier n, ce qui revient à prouver qu'il n'existe jamais d'entier compris entre $\sqrt{n} + \sqrt{n+2}$ et $\sqrt{4n+2}$.

$f(n) = \left[\sqrt{4n+2}\right]$ est, par définition, le plus grand entier inférieur ou égal à $\sqrt{4n+2}$, ce qui signifie que $f(n)^2$ est le plus grand carré inférieur ou égal à $4n+2$. Alors que $g(n) = \left[\sqrt{n} + \sqrt{n+2}\right]$ est le plus grand entier inférieur ou égal à $\sqrt{n}+\sqrt{n+2}$, en d'autres termes : $g(n)^2$ est le plus grand carré inférieur ou égal à $\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+2}\right)^2 = n+(n+2)+2\sqrt{n(n+2)}$. Or $n^2 < n(n+2) < (n+1)^2$, donc $2n < 2\sqrt{n(n+2)} < 2n+2$. Dès lors, $4n+2 < \left(\sqrt{n} + \sqrt{n+2}\right)^2 < 4n+4$. Le plus grand carré inférieur ou égal à $\left(\sqrt{n} + \sqrt{n+2}\right)^2$ ne peut pas être plus petit que $f(n)^2$, mais il pourrait être plus grand s'il était égal à $4n+3$. Seulement le carré d'un entier n'est jamais de la forme $4n+3$: si k est pair, k^2 est pair (et même multiple de 4), et si k est impair, $k+1$ et $k-1$ sont tous deux pairs, donc $k^2-1=(k+1)(k-1)$ est divisible par 4, ce qui entraîne que k^2 est de la forme $4n+1$. On a donc nécessairement : $g(n)=f(n)$ pour tout n.

Mais ceci dans l'hypothése où n est entier.

b) Si x n'est pas entier, on peut trouver des exemples (par exemple : $x=\frac{3}{2}$, $\left[\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{7}{2}}\right]=3\neq\left[\sqrt{8}\right]=2$) où l'égalité n'est pas vérifiée.

Exercice 2

a) Montrer que pour tout réel x, $\left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{x+1}{4}\right]+\left[\frac{x+2}{4}\right]+\left[\frac{x+3}{4}\right]=[x]$.

b) Peut-on généraliser ce résultat ?

Solution

a) Posons $n=\left[\frac{x}{4}\right]$. Par définition, n est le plus grand entier inférieur ou égal à $\frac{x}{4}$, donc $n\leqslant\frac{x}{4}<n+1$, ce qui entraîne : $4n\leqslant x<4n+4$. Posons : $[x]=4n+p$, où p vaut 0, 1, 2 ou 3. $4n+p\leqslant x<4n+p+1$, donc $n+\frac{p}{4}\leqslant\frac{x}{4}<n+\frac{p+1}{4}$. Dés lors, $n+\frac{p+k}{4}\leqslant\frac{x+k}{4}<n+\frac{p+k+1}{4}$. Lorsque k vaut lui aussi 0, 1, 2 ou 3, $0\leqslant\frac{p+k}{4}\leqslant\frac{3}{2}$, ce qui signifie que les quatre entiers $\left[\frac{x}{4}\right]$, $\left[\frac{x+1}{4}\right]$, $\left[\frac{x+2}{4}\right]$, $\left[\frac{x+3}{4}\right]$ sont égaux chacun à n ou $n+1$. Combien de ces entiers sont égaux à n ? $4-p$, car il y a $4-p$ valeurs de k, vérifiant : $0\leqslant k<4-p$, pour lesquelles $\frac{p+k}{4}<1$. Donc parmi les $\left[\frac{x+k}{4}\right]$, $4-p$ sont égaux à n, p sont égaux à $n+1$, la somme est bien égale à $4n+p=[x]$.

b) Il est clair que cette démonstration se généralise en remplaçant 4 par n'importe quel entier. En particulier, si on le remplace par 2, $\left[\frac{x}{2}\right]+\left[\frac{x+1}{2}\right]=[x]$ est une relation, vraie pour tout réel x, et utilisable dans un certain nombre de problémes.

Parfait c'est dur... mais on s'amuse bien quand même !

Exercice 3

On considére une fonction f de $\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ vérifiant, pour tout entier n, $f(n+1)=|f(n)|-f(n-1)$.

a) On suppose $f(1)=3$ et $f(2)=2$. Calculer : $f(12)$ et $f(0)$.

b) Montrer que pour tout entier n, l'une au moins des trois valeurs $f(n)$, $f(n+1)$, $f(n+2)$ est positive ou nulle.

c) Montrer que pour tout entier n, l'une au moins des quatre valeurs $f(n)$, $f(n+1)$, $f(n+2)$, $f(n+3)$ est négative ou nulle.

d) Montrer qu'il existe k tel que : $0\leqslant k\leqslant 4$, $f(k)\leqslant 0$ et $f(k+1)\geqslant 0$.

e) On suppose que $f(0)=-a\leqslant 0$ et $f(1)=b\geqslant 0$. Calculer $f(9)$ et $f(10)$.

f) Montrer que pour tout entier n, $f(n+9)=f(n)$.

Solution

a) Si $f(1) = 3$ et $f(2) = 2$, $f(3) = |2|-3 = -1$, $f(4) = |-1|-2 = -1$, $f(5) = |-1|-(-1) = 2$, $f(6) = 3$, $f(7) = 1$, $f(8) = -2$, $f(9) = 1$, $f(10) = 3$, $f(11) = 2$, $f(12) = -1$ ... On remarque qu'à partir de deux valeurs consécutives de la fonction, on peut déterminer toutes les suivantes : puisque $f(10) = f(1)$ et $f(11) = f(2)$, on a nécessairement $f(12) = f(3)$ et ainsi de suite... Dans l'autre sens également, car l'hypothése équivaut à : $f(n-1) = |f(n)| - f(n+1)$, d'où : $f(0) = |3| - 2 = 1 = f(9)$, etc...

b) L'hypothése peut aussi s'écrire : $f(n)+f(n+2) = |f(n+1)|$, donc l'un au moins des deux nombres $f(n)$ ou $f(n+2)$ est obligatoirement positif ou nul, sinon leur somme serait strictement négative et ne pourrait pas être égale à $|f(n+1)|$. On remarquera que la fonction identiquement nulle, qui à tout entier n fait correspondre $f(n) = 0$, vérifie la condition de l'énoncé, ce qui explique qu'on ne puisse pas remplacer "positif ou nul" par "strictement positif".

c) Tout comme $f(n) + f(n+2) = |f(n+1)|$, $f(n+1) + f(n+3) = |f(n+2)|$, donc : $f(n) + f(n+1) + f(n+2) + f(n+3) = |f(n+1)| + |f(n+2|$. Supposons que $f(n+1)$ et $f(n+2)$ soient tous deux positifs. On a alors : $f(n+1) = |f(n+1)|$ et $f(n+2) = |f(n+2)|$, donc $f(n)+f(n+3) = 0$. Dès lors, l'un des nombres $f(n)$ ou $f(n+3)$ est obligatoirement négatif ou nul. Les nombres $f(n)$, $f(n+1)$, $f(n+2)$, $f(n+3)$ ne peuvent donc pas être tous les quatre strictement positifs. En revanche, la premiére question prouve que trois valeurs consécutives peuvent être toutes les trois strictement positives.

d) Parmi les quatre valeurs $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ et $f(3)$, on a vu que l'une au moins est négative ou nulle. Soit i un entier entre 0 et 3 tel que $f(i) \leqslant 0$. Comme $f(i) + f(i+2) = |f(i+1)| \geqslant 0$, $f(i+2) \geqslant 0$. De deux choses l'une : soit $f(i+1) \geqslant 0$ et $k = i$ répond à la question. Soit $f(i+1) < 0$ auquel cas $k = i+1$ répond à la question.

e) Si $f(0) = -a \leqslant 0$ et $f(1) = b \geqslant 0$, $f(2) = b + a \geqslant 0$, $f(3) = a \geqslant 0$, $f(4) = -b \leqslant 0$, $f(5) = |-b| - a = b - a$, dont on ne connaît pas le signe, $f(6) = |b-a| + b \geqslant 0$, $f(7) = ||b-a|+b|-(b-a) = |b-a|+a \geqslant 0$, $f(8) = ||b-a|+a|-(|b-a|+b) = a-b$ dont on ne connaît pas non plus le signe (mais on remarque, conformément à la question c, que $f(8) = -f(5)$). $f(9) = |a-b| - (|b-a|+a) = -a \leqslant 0$ car $|a-b| = |b-a|$, et $f(10) = |-a| - (a-b) = b \geqslant 0$ car (même si $a = 0$), $|-a| = a$. En réponse à la question, on a donc obligatoirement : $f(9) = -a = f(0)$ et $f(10) = b = f(1)$.

f) D'aprés la question d, quelle que soit la fonction f solution du probléme, il existe un entier k compris entre 0 et 4 tel que $f(k) = -a \leqslant 0$ et $f(k+1) = b \geqslant 0$. Les calculs de la question e prouvent qu'en pareil cas, $f(k+9) = -a = f(k)$ et $f(k+10) = b = f(k+1)$. Qui plus est, deux valeurs consécutives de la fonction suffisent à construire toute la fonction de proche en proche, tant dans un sens que dans l'autre (comme nous l'avons vu à la fin de la question a), de sorte que les deux relations ci-dessus impliquent $f(k+11) = f(k+2)$, $f(k+12) = f(k+3)$... mais aussi $f(k+8) = f(k-1)$ et ainsi de suite (par récurrence)... Pour tout entier n : $f(n+9) = f(n)$. Une telle fonction est dite périodique, de période 9.

Ce probléme m'a été proposé en 1997 par un professeur de mathématiques, Gilbert Rebel, qui a intitulé son texte : "Rêve d'absolus". Il écrivait notamment, en calculant explicitement $f(9)$ à partir de $f(0) = a$ et $f(1) = b$:

"Montrer que quels que soient les deux réels a et b,

$a = |||||||b| - a| - b| - |b| + a| - ||b| - a| + b| - |||b| - a| - b| + |b| - a| - ||||b| - a| - b| - |b| + a| + ||b| - a| - b| - |||||b| - a| - b| - |b| + a| - ||b| - a| + b| + |||b| - a| - b| - |b| + a| - ||||||b| - a| - b| - |b| + a| - ||b| - a| + b| - |||b| - a| - b| + |b| - a| + ||||b| - a| - b| - |b| + a| - ||b| - a| + b$".

J'ai publié ce problème (directement la question f), sans les questions intermédiaires) dans la rubrique "problèmes" du Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), dont j'étais responsable, et presque en même temps, ce même problème a été posé au Concours Général (concours récompensant les meilleurs éléves de terminale), avec des questions intermédiaires. J'ai proposé une généralisation : on peut montrer par exemple, que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant : quel que soit x réel, $f(x+2) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}|f(x+1)| - f(x)$, est périodique de période 25.

IX. Test

1 Ennoncé

Exercice 1
Déterminer tous les couples (x, y) de nombres réels tels que : $|x + y| = 3$ et $xy = -10$.

Exercice 2
Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout entier naturel n, $f(f(n) + 2) = n$?

Exercice 3
Montrer que : $\dfrac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + ... + \dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = 9.$

2 Solution du test

Solution de l'exercice 1

L'hypothése $|x + y| = 3$ signifie que $x + y$ est égal soit à 3 soit à -3. Dans les deux cas, $(x+y)^2 = 9$. Or $(x+y)^2 = x^2+y^2+2xy$ et $(x-y)^2 = x^2+y^2-2xy = (x+y)^2-4xy$, comme on a en outre l'hypothése $xy = -10$, $(x-y)^2 = 9-4(-10) = 49$, ce qui signifie que $x - y$ est égal à 7 ou à -7. Dés lors, si $x + y = 3$, $2x = (x + y) + (x - y)$ peut être égal à 10 (auquel cas $x = 5$ et $y = -2$) ou à -4 (auquel cas $x = -2$ et $y = 5$, ce qui revient au même car x et y jouent des rôles symétriques). De même, si $x+y = -3$, x peut être égal à 2 (auquel cas $y = -5$) ou à -5 (auquel cas $y = 2$). Les quatre couples solutions sont donc : $(5, -2)$, $(-2, 5)$, $(2, -5)$ et $(-5, 2)$.

Solution de l'exercice 2

Cette équation fonctionnelle peut être abordée comme celle traitée dans l'introduction aux fonctions : $f(f(n)) = n + 1$, mais également en faisant intervenir l'injectivité qui vous a été amplement présentée mardi.

En s'inspirant de l'équation $f(f(n)) = n + 1$, on pose $f(0) = a$: on ne sait rien de a, si ce n'est qu'il est positif ou nul. Mais on peut écrire, de proche en proche :

x	0	2	4
$f(x)$	a	$a+2$	$a+4$
$f(x)+2$	$a+2$	$a+4$	$a+6$
$f(f(x)+2)$	0	2	4

Ce qui différencie de l'équation étudiée en cours, c'est qu'il faut ajouter 2 avant d'utiliser à nouveau f : si $y = f(f(x) + 2)$ (derniére ligne), c'est non pas $f(y)$, mais $f(y + 2)$ qui est égal à

$f(x)+2$ (troisiéme ligne). Autre différence : nous prouvons ainsi que $f(2k) = a+2k$, certes, mais qu'en est-il de $f(2k+1)$? Rien ne prouve que a est pair ! Qu'à cela ne tienne : on peut faire un tableau équivalent pour les x impairs, en posant : $f(1) = b$:

x	1	3	5	...	k impair
$f(x)$	b	$b+2$	$b+4$	...	$b-1+k$
$f(x)+2$	$b+2$	$b+4$	$b+6$	...	...
$f(f(x)+2)$	1	3	5	...	...

Si a est pair, $0 = f(a+2) = a+(a+2) = 2a+2$ d'aprés le premier tableau, ce qui entraîne $2a = -2$: impossible car a est supposé positif.

Si a est impair, d'aprés le deuxiéme tableau $0 = f(a+2) = (b-1)+(a+2) = a+b+1$, mais cette relation n'est pas non plus possible, car $a+b \geqslant 0$. Donc en définitive, il n'existe aucune fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ vérifiant l'équation fonctionnelle de l'énoncé.

La démonstration utilisant l'injectivité est plus élégante. Toute fonction solution est nécessairement injective, car si $f(x) = f(y) = k$, $f(f(x)+2) = x$ est manifestement égal à $f(k+2) = f(f(y)+2) = y$, donc $x = y$. Posons $f(0) = a$ et $f(a) = b$. a et b ne sont pas connus, hormis le fait qu'ils sont tous deux positifs ou nuls, mais peu importe. D'aprés l'hypothése, $f(b+2) = f(f(a)+2) = a$. Mais par ailleurs, $f(0) = a$, et la fonction f est injective : aucun autre élément que 0 ne peut avoir pour image a, ce qui entraîne : $b+2 = 0$. Or aucun $b \geqslant 0$ ne vérifie une telle relation, d'où une contradiction : aucune fonction ne peut être solution de cette équation fonctionnelle.

Solution de l'exercice 3

L'idée essentielle de l'exercice est d'utiliser la relation $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ pour écrire : $1 = \left(\sqrt{k+1}+\sqrt{k}\right).\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$, ou encore $\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}} = \sqrt{k+1}-\sqrt{k}$.
En d'autres termes, $\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} = \sqrt{2}-\sqrt{1}$, $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} = \sqrt{3}-\sqrt{2}\cdots\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = \sqrt{100}-\sqrt{99}$.
Ceci entraîne :
$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}} = \left(-\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)+\left(-\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)+\cdots$
$\cdots+\left(-\sqrt{k}+\sqrt{k+1}\right)+\left(-\sqrt{99}+\sqrt{100}\right) = -\sqrt{1}+\sqrt{100} = 9$ car toutes les autres racines carrées se simplifient ("simplifications téléscopiques").

Chaque fois qu'on voit apparaître des racines carrées dans une somme au dénominateur, on doit avoir le réflexe de les faire disparaître par cette même technique, en multipliant numérateur et dénominateur par ce qu'on appelle "l'expression conjuguée".