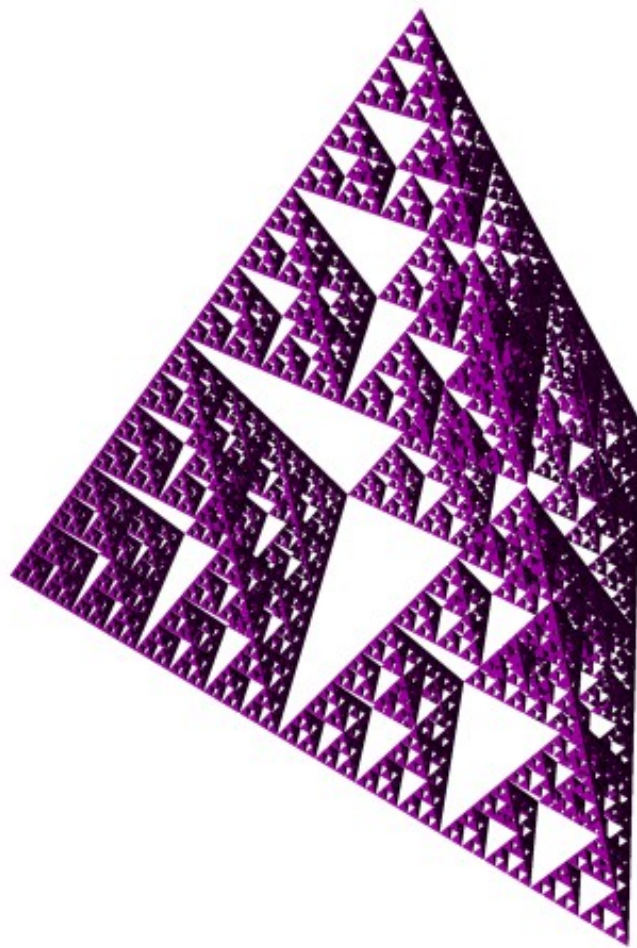


STAGE OLYMPIQUE DE GRÉSILLON III



Du 21 au 28 août 2009

Stage olympique de Grésillon, août 2009

Avant-propos

Le stage de Grésillon a été organisé par Animath.

*Son objet a été de rassembler les lauréats de diverses compétitions mathématiques
et de les faire travailler sur des exercices en vue de la formation
de l'équipe qui représentera la France à l'Olympiade internationale de mathématiques
au Kazakhstan en juillet 2010.*

Nous tenons à remercier le château de Grésillon pour son excellent accueil.

Photo de la première page : « Triangle de Sierpinski ».

Table des matières

I	Le trombinoscope	7
II	Déroulement du stage	11
III	Les exposés	15
IV	Déterminons les niveaux : Olympique, Intermédiaire, Marmot	21
V	En cours	23
1	Ordre d'un élément	23
1.1	Fonction indicatrice d'Euler	23
1.2	Ordre d'un élément	24
1.3	Exemples d'utilisation	25
2	Géométrie projective	26
3	Exercices de révision	26
3.1	Rudiments de logique	26
3.2	Stratégies de base	27
3.3	Géométrie	27
4	Les solutions	28
4.1	Rudiments de logique	28
4.2	Stratégies de base	30
4.3	Géométrie	32
VI	En TD	35
1	Les énoncés	35
1.1	Stratégies de base	35
1.2	Géométrie	37
1.3	Arithmétique	38
2	Les solutions	39
2.1	Stratégies de base	39
2.2	Géométrie	42
2.3	Arithématique	43
VII	Les TND	47
1	Exercices d'acclimatation non corrigés	47
2	Les énoncés	48
2.1	Stratégies de base	48
2.2	Arithmétique	48
2.3	Géométrie	51
3	Les solutions	51
3.1	Stratégies de base	51

3.2	Arithmétique	52
3.3	Géométrie	57
VIII	Les tests	59
1	Les énoncés	59
1.1	Stratégies de base	59
1.2	Géométrie	60
1.3	Test final	60
2	Les solutions	61
2.1	Stratégies de base	61
2.2	Géométrie	61
2.3	Test final	62
IX	Les problèmes du jour	63
1	Remplissage de verres	63
2	Les pions sauteurs	63
3	Record des permutations	64
4	Les solutions	64
X	Les OIM	67
1	Sujets des OIM 2009	67
2	Sujets des OIM 2008	68
XI	Le coin des élèves	69

I. Le trombinoscope

Les profs



Martin Andler



Sandrine Caruso



Xavier Caruso



Sophie Cavadini



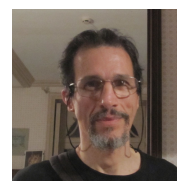
Theresia Eisenkoelbl



Igor Kortchemski



Bodo Lass



François Lo Jacomo

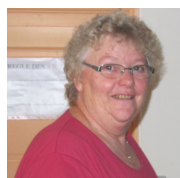


Johan Yebbou



David Zmiaikou

Nos hôtes



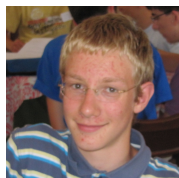
Brigitte Bourdet



André Bourdet

Les élèves

Nikola Bjecogrlic



Rémi Bricout



Charley Brion Anezo



Thomas Budzinski



Sébastien Chevalyre

Guillaume
Conchon Kerjan

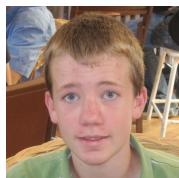
Léonard Dekens



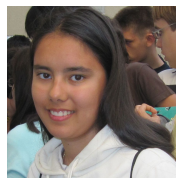
Aurélien Emmanuel



Matthew Fitch



Cédric Fuchs



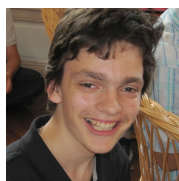
Diane Gallois-Wong



Louise Gassot



Victor Godet



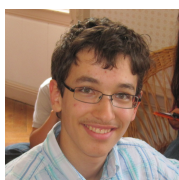
Louis Hauseux



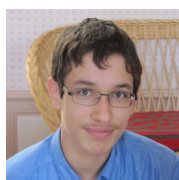
Jean Kieffer



Alexis Le Dantec



Luc Lehéricy



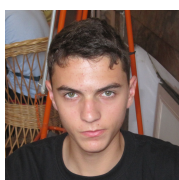
Thomas Lehéricy



Matthieu Lequesne



Guido Maria Lido



Corentin Lohat



Marie Laura Luisada



Jean-François Martin



Adrien Messenger



Léo Miolane



Theodor
Misiakiewicz



Victor Mizrahi



Solène Moulin



Vincent Mouly



Jaouad Mourtada



Séginus Mowlavi



Stefano Novello



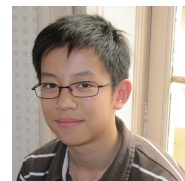
Grégoire Paille



Michel Pain



Arthur Patora



Victor Quach



Isabelle Rao



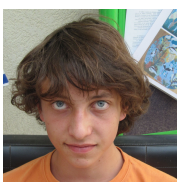
Aurélien Richard



Charles Riou



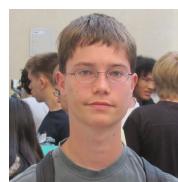
Vincent Sebag



Oliver Sieweke



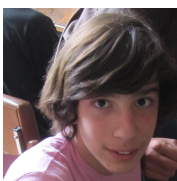
Christoph Standke



Alexander Thomas



Sergio Vega



Oscar Walter



Matthieu Zhang

II. Déroulement du stage

La journée du vendredi 21 août a été consacrée à l'accueil des élèves. Après quelques présentations les élèves ont fait connaissance autour du piano, des jeux de carte, des parties d'échec et surtout autour d'exercices qui leurs étaient donnés pour s'acclimater. Voir en VII. D'autre part, afin de déterminer trois groupes niveaux : **Olympique**, **Intermédiaire** et **Marmot**, chaque élève a été interrogé sur un exercice tiré au hasard. Les exercices sont donnés en IV.



Le programme détaillé de la semaine est donné dans le tableau II.1.

Le stage s'est déroulé en trois parties. La première a commencé par une journée consacrée aux stratégies de base, tandis que le groupe **O** suivait des cours/TD de géométrie principalement, d'un niveau avancé. La deuxième partie fut consacrée à l'arithmétique. Enfin en troisième partie les élèves s'entraînèrent en géométrie. On sanctionnait chaque partie par des tests en fonction des trois niveaux.

On distinguait deux types de séance d'exercices, les TD et les TND.

Les TD étaient des séances d'exercices « classiques », pendant lesquelles les élèves réfléchissaient, avec l'aide du professeur, sur un certain nombre d'exercices. L'enseignant dispensait une correction des exercices au fur et à mesure, et n'hésitait pas à apporter individuellement son aide aux élèves.

Les TND fonctionnaient de la façon suivante. Le professeur donnait aux élèves un exercice sur lequel ils planchaient seuls pendant au moins une heure. À l'issue de cette réflexion, les idées de chacun étaient confrontées puis l'exercice corrigé.

En plus des cours et de ces séances d'exercices, les élèves ont eu à plancher sur plusieurs tests en temps limité. Pour les **Marmots** et les **Intermédiaires** le premier était sur les stratégies de base et le deuxième sur la géométrie. Quant aux **Olympiques**, leurs tests ont principalement été sur la géométrie et un peu en combinatoire, d'un niveau olympique. Enfin, le dernier test, portant sur

		Olympique	Intermédiaire	Marmot
Vendredi 21	journée	Arrivée et accueil des élèves		
	18h – 19h	Présentation du stage		
	20h30 – 21h30	Conférence		
Samedi 22	9h – 12h		Cours strat. de base	Cours strat. de base
	14h – 18h		TD strat. de base	TD/Cours strat. de base
	20h30 – 21h30	Volley		
Dimanche 23	9h – 12h		TND strat. de base	TD strat. de base
	14h – 18h	Test		
	18h – 19h30	Correction du test		
	20h30 – 21h30	Problème du jour et projection de film		
Lundi 24	9h – 12h		Cours arith.	Cours arith.
	14h – 18h		TD arith.	Cours/TD arith.
	20h30 – 21h30	Correction du problème de dimanche, nouveau problème, film		
Mardi 25	9h – 12h		TND arith.	TD arith.
	14h – 18h	Chasse au trésor		
	20h30 – 21h30	Conférence, problème du jour, volley		
Mercredi 26	9h – 12h		Cours géom.	Cours géom.
	14h – 18h		TD géom.	Cours/TD géom.
	20h30 – 21h30	Correction du problème de mardi, volley, film		
Jeudi 27	9h – 12h		TND géom.	TD géom.
	14h – 17h	Test		
	17h – 18h30	Correction du test		
	20h20 – 21h30	Conférence et correction du problème de mercredi, volley		
Vendredi 28	8h – 11h	Test final		
	après-midi	Départ des élèves		

TABLE II.1 – Planning du stage

les connaissances acquises tout au long du stage, a eu lieu le dernier jour, dans des conditions les plus proches possibles de celles des olympiades internationales.

À l'issue des tests, des séances de correction d'une heure ont permis de donner une solution aux exercices pour chaque niveau.

Quelques liens utiles :

- ☞ Le site d'Animath bien sûr ! www.animath.fr
- ☞ Le site de MathLinks, qui présente toutes les compétitions au monde : www.mathlinks.ro
- ☞ Le site du château de Grésillon : www.gresillon.org

III. Les exposés

Trois soirées ont été consacrées à des exposés.

Pour le premier exposé, Martin Andler présentait *Ce que sont les mathématiques*. Il y a environ 57000 mathématiciens dans le monde, aujourd'hui.

Mais, qu'est ce qu'un mathématicien ? C'est quelqu'un qui a une activité de recherche en mathématiques. En France, ils sont 3500, dont 90% d'universitaires et le reste dans des organismes de recherche tels que CNRS.

Que fait un mathématicien ? Principalement, il écrit des articles de recherche. La quantité varie en fonction des mathématiciens. Par exemple, Andrew Wiles, mathématicien de premier plan aux USA, a publié 24 articles à 55 ans tandis que Jean Bourgain au même âge et Pierre Louis Lions plus jeune encore, ont publié près de 350 articles ! Il ne faut donc pas se fier au critère quantitatif. Sachez qu'un article est lu par seulement quelques personnes au monde... De même que pour les médailles Fields, il ne faut pas oublier que « bon mathématicien » $\not\Rightarrow$ « médaille Fields » !

Les pays importants en mathématiques. Les USA sont en première position, regroupant le plus grand nombre de mathématiciens au monde. L'URSS détenait cette place il y a 20 ans. La France est en deuxième position. Pourquoi ? Du point de vue de sa capacité, la France est très bonne, contrairement à son classement aux OIM. La Grande Bretagne, le Japon et l'Allemagne sont aussi des pays très actifs en mathématiques, malgré une baisse de l'Allemagne depuis 1933. Preuve en est leurs médaillés Fields. L'Inde a produit au *XXe* un grand nombre de très bons mathématiciens, tels que Ramanudjan. La Chine suite à la révolution culturelle des années 60, a anéanti la classe intellectuelle.

L'activité mathématique a toujours bénéficié d'une grande communication. Elle est évidemment aujourd'hui facilitée par Internet. Timothy Gowers, médaillé Fields, avait proposé d'attaquer un problème de mathématiques via un site Internet où chacun pourrait donner ses idées. Cette collaboration internationale a ainsi permis des avancées et des démonstrations collectives. Le mérite intellectuel disparaît pour faire place à une oeuvre collective...

Ce qu'on fait en mathématiques. On distingue deux grandes attitudes distinctes : les mathématiques appliquées et les mathématiques pures ou dites fondamentales.

Mathématiques appliquées : C'est sortir de son domaine, forger de nouveaux outils, les confronter avec les spécialistes de la discipline en question. Cet aller-retour entre les deux permet après tests de découvrir les outils les plus performants. Contrairement à l'idée générale, il ne s'agit pas d'appliquer des « choses déjà faites », mais d'avoir de nouvelles idées.

Mathématiques pures : Des mathématiciens proposent des problèmes endogènes, i.e au sein des mathématiques. Fermat, par exemple avait énoncé un théorème qui ne fut démontré que 374 ans plus tard par Andrew Wiles. Celui-ci n'a aucun intérêt cependant. En revanche, les travaux de recherche de démonstration, ont permis la création de nombreux outils mathématiques. L'énoncé de l'équation de Navier Stokes, utile en mécanique des fluides, a des applications quotidiennes : étude des turbulences dans un tuyau ou dans un fleuve, par exemple. On ne sait toujours pas si elle a des solutions en mathématiques, mais elle en a physiquement !

Les mathématiques et l'informatique. Aujourd'hui, à l'aide des outils informatiques puissants, on peut arriver à trouver des solutions. Mais il faut remarquer qu'une équation sera toujours difficile à résoudre et des méthodes numériques difficiles à créer, sans bases logiques, sans informations théoriques de départ. Et ce quelque soit la performance des outils informatiques.

Les domaines qui inspirent les mathématiques Les mathématiques appliquées sont fortement en lien avec les sciences physiques : mécanique des fluides, trajectoire des planètes, astronomie, structure et résistance des matériaux, fréquences propres d'un pont (tout le monde connaît l'histoire de ces soldats qui marchant au pas sur un pont, sont entrés en résonance avec ce dernier, causant sa destruction.) Ces problèmes ont motivé l'étude de l'analyse harmonique, pour les vibrations, de la théorie de Fourier.

L'informatique s'est développée dans les années 30/40 pour créer le premier ordinateur en 1945. Cela rendu possible par l'élaboration d'une nouvelle discipline : la logique. En 1940, Turing et Von Neumann reformulent les idées logiques et créent les « machines de Turing ».

De nombreux problèmes naissent de l'informatique : le fonctionnement des réseaux (la compréhension de la géométrie du web), le traitement d'image, la théorie des graphes, etc.

En biologie, l'analyse des génomes (humains, animaux, céréales) demande des outils mathématiques. La molécule d'ADN qui contient l'information génétique est rangée dans un certain ordre déterminé par le génotype. La structure spatiale et la complexité combinatoire nécessitent de nouvelles idées mathématiques.

Les sciences de l'ingénieur, comme la cryptographie, les codages d'informations, sont autant d'outils mathématiques très sophistiqués. La théorie des nombres est un des principaux outils.

Ainsi la frontière en mathématiques appliquées et fondamentales est devenue floue.

Les mathématiques contemporaines. Dans celles ci, il existe de très fortes connexions entre algèbre/géométrie (géométrie algébrique appliquée en théorie des nombres) et analyse/géométrie (géométrie et topologie différentielle). Le domaine des probabilités a de nombreuses applications. Les combinatoires, laissées de côté pendant longtemps car soi disant « pas très intéressant », sont en réalité des mathématiques très astucieuses. Ce domaine, qui a beaucoup évolué depuis 40 ans avec Rota, est aujourd'hui très important. Souvent des jugements fermés à certaines époques ont donné de grandes avancées à d'autres !



Le deuxième exposé s'intitulait *Jouer à Colin-Maillard au bord de la falaise diminue-t-il l'espérance de vie ?*

Dans *Retour vers le futur II*, Lorraine, excédée par l'attitude de Biff, lui conseille d'aller jouer à Colin-maillard au bord de la falaise. Dans ce texte, je me suis demandé dans quelle mesure cela est vraiment dangereux.

Nous allons très grossièrement modéliser le jeu de Colin-maillard par une marche aléatoire en dimension 1 : initialement Biff fait face à une falaise distante de d pas de sa position et a les yeux bandés (il ne sait donc pas où est la falaise ni même, on peut supposer, qu'il y en a une), tandis que de son côté, chaque minute, Lorraine joue à pile ou face et ordonne à Biff d'avancer d'un pas si le résultat a été « pile » et de reculer d'un pas sinon.

Théorème 0.1. *La probabilité que Biff tombe dans la falaise (en un temps fini mais non précisé) est 1*

L'espérance de vie de Biff, c'est-à-dire le temps moyen t avant que la chute n'arrive (ou pour être plus gai, que le jeu se termine), est $+\infty$.

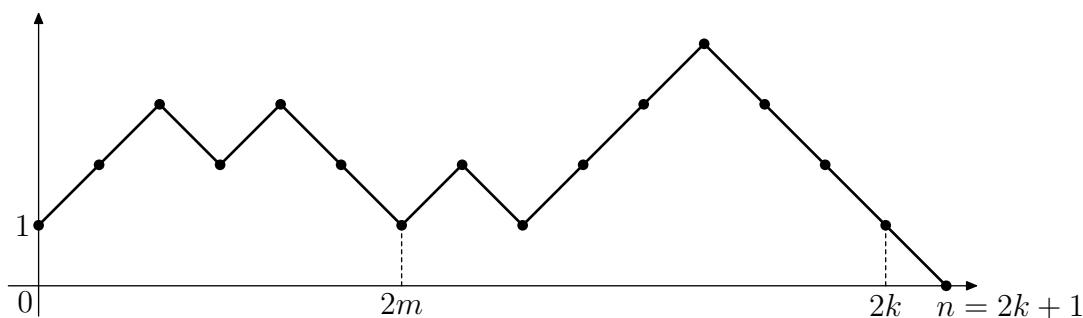
Avant de commenter ce résultat, nous allons nous attarder quelque peu sur sa démonstration. Notons p_n la probabilité que Biff tombe de la falaise au temps n . Elle s'obtient en divisant le nombre de tirages conduisant à un chemin faisant tomber Biff au temps n par le nombre de tirages totaux (c'est-à-dire 2^n). La probabilité que Biff tombe de la falaise (à un temps non précisé) est alors :

$$p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n + \dots$$

tandis que son espérance de vie est :

$$p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots + np_n + \dots$$

Il nous faut maintenant estimer les p_n et pour cela le nombre de chemins qui conduisent à la chute de Biff au temps n . On commence par supposer que $d = 1$, c'est-à-dire que Biff commence le jeu à un pas de la falaise. Voici un exemple de chemin qui conduit à une chute au temps n :



On remarque tout de suite qu'il n'y a pas de chute possible à un temps n pair. A partir de maintenant, nous allons donc supposer que n est pair, *i.e.* $n = 2k + 1$. En introduisant le temps $2m$ de premier retour à un pas de la falaise (voir dessin ci-dessus), on montre la relation de récurrence suivante :

$$c_k = c_0 c_{k-1} + c_1 c_{k-2} + \dots + c_{k-1} c_0$$

où c_k désigne le nombre de chemins que l'on cherche à calculer. Si l'on pose

$$g(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \dots + c_n x^n + \dots$$

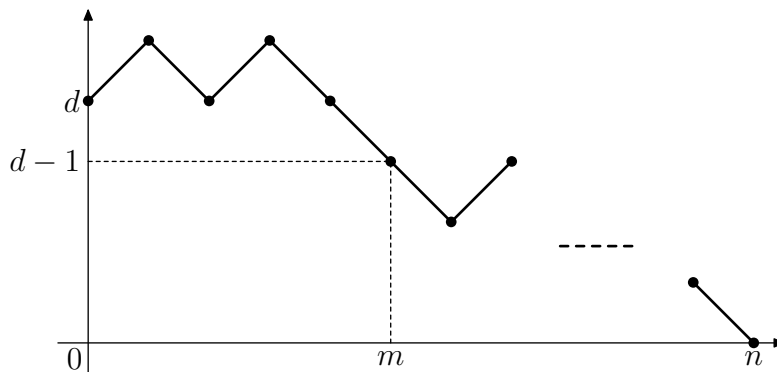
la relation obtenue se réécrit $g(x) - 1 = xg(x)^2$, ce qui conduit finalement à la solution $g(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}$. Au niveau des p_n , cela donne :

$$\begin{aligned} f(x) &= p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \dots \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{c_1}{2^3}x^3 + \frac{c_2}{2^5}x^5 + \dots \\ &= \frac{x}{2}g\left(\frac{x^2}{4}\right) \\ &= \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}. \end{aligned}$$

Les nombres cherchés se calculent à partir de là comme suit :

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 + \dots &= f(1) = 1 \\ p_1 + 2p_2 + 3p_3 + \dots &= f'(1) = \infty. \end{aligned}$$

On a ainsi bien démontré le théorème dans le cas $d = 1$. Lorsque $d > 1$, on peut raisonner comme suit. Si $p_n(d)$ désigne la probabilité de chute au temps n en partant à d pas du bord, le dessin suivant



conduit à la relation de récurrence

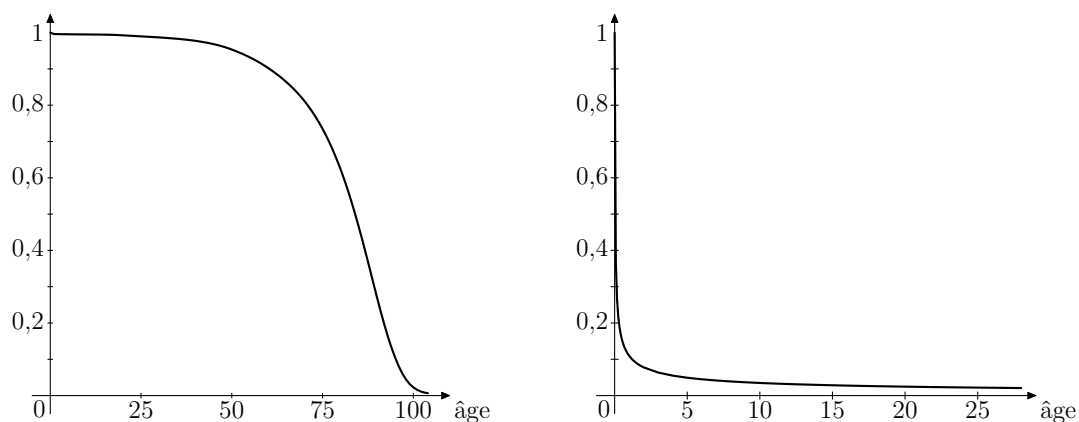
$$p_n(d) = p_0p_n(d-1) + p_1p_{n-1}(d-1) + \dots + p_np_0(d-1)$$

qui conduit à son tour à

$$f_d(x) = p_0(d) + p_1(d)x + p_2(d)x^2 + p_3(d)x^3 + \dots = f(x)f_{d-1}(x) = f(x)^d.$$

On conclut alors comme précédemment.

Il est temps maintenant de discuter un peu le théorème. *A priori*, dès que l'on naît, on a également une probabilité 1 de mourir, et notre espérance de vie n'est certainement pas infinie mais plutôt de l'ordre de 80 ans. Il semble donc que jouer à Colin-maillard au bord de la falaise soit moins dangereux que tout simplement vivre ! En fait, en creusant un peu, on se rend bien entendu compte qu'il faut faire plus attention que cela. Par exemple, le calcul de la mortalité infantile est intéressant : alors qu'en France, il est de l'ordre de 6,3 ‰, il atteint 89% pour le jeu de Colin-maillard avec $d = 100$ (en supposant que Lorraine lance la pièce toutes les minutes). En fait, les courbes de mortalité sont très différentes comme on le voit sur la figure ci-dessous

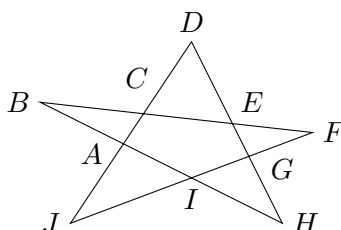


A gauche, est représentée la courbe de mortalité naturelle : en ordonnée est représentée la proportion de personnes qui atteignent l'âge indiquée en abscisse. La deuxième courbe, quant à elle, décrit la mortalité d'une personne jouant à Colin-maillard comme précédemment avec $d = 100$ et un lancé toutes les minutes. Pour le jeu de Colin-maillard, la plupart des personnes meurent très jeunes (avant d'avoir atteint un an), mais il y a malgré tout quelques rares exceptions qui vivent très longtemps, et ce sont ces gens qui arrivent à rendre l'espérance de vie infinie ! En réalité, si l'on tient compte à la fois de la mortalité naturelle et de celle due à Colin-maillard au bord de la falaise, on peut calculer que l'espérance de vie chute à à peine 3 ans. Jouer à Colin-maillard au bord de la falaise a donc tendance à diminuer l'espérance de vie !

Enfin un troisième présentait les *Olympiades Internationales de Mathématiques*. Johan, ayant participé, encadré depuis de nombreuses années les OIM, donnait un aperçu de ce qu'elles sont. On pourra regarder les sujets des années 2008 et 2009 donnés au chapitre X.

IV. Déterminons les niveaux : Olympique, Intermédiaire, Marmot

Exercice 1 a) Est-ce qu'on peut dessiner une étoile de façon que $AB < BC$, $CD < DE$, $EF < FG$, $GH < HI$ et $IJ < JA$?




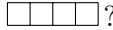
b) Prouvez que la somme des angles aux sommets B, D, F, H et J d'une étoile est 180° .

Exercice 2 On se donne un cercle de rayon 1 et n points dans le plan. Montrez qu'il existe un point sur le cercle tel que la somme des distances de ce point aux n points donnés est $\geq n$.

Exercice 3 Est-ce qu'on peut dessiner 9 segments dans le plan tels que chaque segment intersecte exactement trois autres segments?

Exercice 4 Deux élèves jouent au jeu suivant : le jeu commence par le nombre 60, chacun son tour les élèves diminuent le nombre obtenu d'un de ses diviseurs. Perd celui qui obtient zéro. Qui a une stratégie gagnante?

Exercice 5 Montrez que 3^{2010} divise $2^{3^{2009}} + 1$.

Exercice 6 Est-ce qu'on peut paver une table 10×10 en utilisant a) des T -figures ? b) des rectangles .

Exercice 7 Le produit des nombres réels positifs a_1, a_2, \dots, a_n est égal à 1. Prouver que

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \dots (1 + a_n) \geq 2^n.$$

Exercice 8 Résoudre l'équation $3^m + 7 = 2^n$ en nombres entiers positifs.

Exercice 9 Soit $ABCD$ un parallélogramme et O un point à l'intérieur de $ABCD$ tel que $\widehat{OAD} = \widehat{OCD}$. Prouvez que $\widehat{OBC} = \widehat{ODC}$.

Exercice 10 Trouvez tous les polynômes P à coefficients réels tels que

$$xP(x - 1) = (x - 2)P(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

V. En cours



1 Ordre d'un élément

Il s'agit ici d'introduire la notion d'ordre modulo un entier et de donner des applications à la divisibilité entre entiers.

1.1 Fonction indicatrice d'Euler

Définition 1.1. Pour un entier positif n , on note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers premiers avec n et compris au sens large entre 1 et n . φ est appelée fonction indicatrice d'Euler.

Exemple 1.2. $\varphi(6) = 2$. Si p est premier, $\varphi(p) = p - 1$.

Proposition 1.3. Si p est premier et $\alpha \geq 1$, alors :

$$\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}.$$

Démonstration 1.4. Un entier n'est pas premier avec p^α si, et seulement si c'est une puissance de p . Comme il y a exactement $p^{\alpha-1}$ puissances de p entre p et p^α , cela fournit l'égalité désirée.

La proposition suivante est admise.

Proposition 1.5 (Multiplicativité de φ). Si m et n sont deux entiers premiers entre eux, alors :

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n).$$

La multiplicativité de φ nous fournit une formule pratique de calcul.

Corollaire 1.6. *Si la décomposition en facteurs premiers de n est $n = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$ alors :*

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^k (p_i^{\alpha_i} - p_i^{\alpha_i-1}) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

Exemple 1.7. $\varphi(2000) = \varphi(125 \times 16) = \varphi(5^3)\varphi(2^4) = (5^3 - 5^2)(2^4 - 2^3) = 800$.

Un des intérêts de la fonction d'Euler provient du théorème admis suivant.

Théorème 1.8. *Soient a et n deux entiers premiers entre eux. Alors :*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \quad \text{modulo } n.$$

Remarque 1.9. *En prenant $n = p$ un nombre premier dans le théorème précédent, nous retrouvons le petit théorème de Fermat.*

Remarque 1.10. *Les théorèmes admis ne sont pas particulièrement difficiles à montrer, mais leurs preuves nécessitent d'introduire le langage de la théorie des groupes.*

1.2 Ordre d'un élément

Le théorème suivant nous permettra de définir la notion d'ordre.

Théorème 1.11. *Soient a, n des entiers naturels. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *a et n sont premiers entre eux.*
2. *Il existe un entier k tel que :*

$$a^k \equiv 1 \quad \text{modulo } n.$$

Démonstration 1.12. *Prouvons d'abord le sens direct. D'après le théorème 1.8, il suffit de prendre $k = \varphi(n)$. Donnons une autre preuve qui n'utilise pas ce théorème (parce qu'il a été admis). Comme l'ensemble des résidus modulo n est fini, il existe deux entiers distincts $r < s$ tels que :*

$$a^s \equiv a^r \quad \text{modulo } n.$$

Alors n divise $a^r(a^{s-r} - 1)$, donc aussi $a^{s-r} - 1$ car a et n sont premiers entre eux. Il suffit donc de prendre $k = r - s$.

Pour le sens réciproque, raisonnons par l'absurde en supposant que $d = \text{pgcd}(a, n) > 1$. Par hypothèse, il existe un entier r tel que $a^k + rn = 1$. Cela implique que d divise 1, ce qui est contradictoire.

Définition 1.13. *Soient a, n des entiers naturels premiers entre eux. On appelle ordre de a modulo n le plus petit entier non nul noté $\omega(a)$, noté¹ $\omega(a)$, vérifiant :*

$$a^{\omega(a)} \equiv 1 \quad \text{modulo } n.$$

Remarque 1.14. *D'après le théorème 1.11, cette définition a bien un sens.*

Le théorème suivant illustre un des intérêts de cette définition.

1. En toute rigueur, il faudrait garder la dépendance en n et noter $\omega_n(a)$, mais la plupart du temps n sera implicite.

Théorème 1.15. Soient a, n des entiers naturels premiers entre eux et k un entier vérifiant :

$$a^k \equiv 1 \pmod{n}.$$

Alors $\omega(a)$ divise k .

Démonstration 1.16. Par l'absurde, supposons que $\omega(a)$ ne divise pas k . Soit $\omega(a) = qk + r$ la division euclidienne de $\omega(a)$ par k , avec $0 < r < k - 1$. Alors :

$$\begin{aligned} 1 &\equiv a^{\omega(a)} \pmod{n} \\ &\equiv (a^k)^q a^r \pmod{n} \\ &\equiv a^r \pmod{n}. \end{aligned}$$

Ceci contredit le caractère minimal de $\omega(a)$ et permet de conclure.

Corollaire 1.17. Soient a, n des entiers naturels premiers entre eux. Alors l'ordre de a divise $\varphi(n)$. En particulier, lorsque $n = p$ et premier, l'ordre de a divise $p - 1$.

Démonstration 1.18. Ceci provient du théorème précédent et du fait que $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Remarque 1.19. Attention ; il faut bien garder de croire que si p est premier et $0 < a \leq p - 1$, alors l'ordre de a est $p - 1$. Comme nous venons de le voir, s'il est vrai que l'ordre de a divise $p - 1$, il n'y a pas en général égalité : il suffit par exemple de prendre $p = 7$ et $a = 2$ pour s'en convaincre. Cependant, le théorème suivant donne un résultat allant en ce sens.

Théorème 1.20. Soit p un nombre premier. Alors il existe un entier r vérifiant $0 < r \leq p - 1$ et tel que l'ordre de r soit exactement $p - 1$.

Démonstration 1.21. Le niveau de la démonstration dépasse légèrement le cadre de ce cours, mais ce résultat fondamental est à retenir.

Remarque 1.22. Soit p un nombre premier. Un entier u vérifiant $0 < u \leq p - 1$ et tel que l'ordre de u soit exactement $p - 1$ est appelé racine primitive et vérifie la propriété suivante : si $0 < a \leq p - 1$, il existe k tel que $u^k \equiv a \pmod{n}$.

Exemple 1.23. 3 est une racine primitive modulo 7, mais 2 n'est pas une racine primitive modulo 7.

Remarque 1.24. Il est important de se rappeler que la propriété d'être une racine primitive dépend toujours du modulo considéré.

Exemple 1.25. Pour un exemple d'exercice faisant intervenir ce théorème, voir l'exercice 4 du Rallye Grésillomath.

1.3 Exemples d'utilisation

Citons deux exercices d'arithmétique de type « olympiade » qui peuvent se résoudre en utilisant cette notion.

Proposition 1.26. Il n'existe pas d'entier $n > 1$ tel que n divise $2^n - 1$.

Démonstration 1.27. Soit n tel que n divise $2^n - 1$. Soit p le plus petit facteur premier divisant n . Remarquons que n est nécessairement impair, donc $p > 2$ et p est premier avec 2. Or p divise n qui divise $2^n - 1$. Donc :

$$2^n \equiv 1 \pmod{p}.$$

D'autre part, d'après le petit théorème de Fermat :

$$2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ainsi, d'après le théorème 1.15, $\omega(2)$, l'ordre de 2 modulo p , divise à la fois n et $p - 1$. Ainsi, $1 < \omega(2) < p$, ce qui contredit le caractère minimal de p .

Proposition 1.28. *Il n'existe pas d'entier impair $n > 1$ tel que n divise $3^n + 1$.*

Démonstration 1.29. *Raisonnons de même ; soit $n > 1$ un entier impair divisant $3^n + 1$ et notons p le plus petit facteur premier divisant n de sorte que $p > 3$. D'une part, $3^n \equiv -1$ modulo p , ce qui fournit :*

$$3^{2n} \equiv 1 \pmod{p}.$$

D'autre part, d'après le petit théorème de Fermat :

$$3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Ainsi, d'après le théorème 1.15, $\omega(3)$, l'ordre de 3 modulo p , divise à la fois $2n$ et $p-1$. Par suite, $\omega(3)$ est pair, et le cas $\omega(3) = 2$ est à exclure puisqu'alors $9 \equiv 1$ modulo p . Ainsi, $1 < \frac{\omega(3)}{2} < p$ et $\frac{\omega(3)}{2}$ divise n , ce qui contredit le caractère minimal de p .

2 Géométrie projective

3 Exercices de révision

3.1 Rudiments de logique

Formules mathématiques

Exercice 1 1. Dresser la table de vérité des formules $\neg(F \wedge G)$ et $\neg F \vee \neg G$. Que constate-t-on ?
2. Dresser la table de vérité des formules $F \Rightarrow G$ et $\neg F \vee G$. Que constate-t-on ?

Exercice 2 Nier la phrase « S'il fait beau, alors j'irai jouer au Volley, sauf si personne ne veut ».

Exercice 3 Les points du plan sont coloriés de telle sorte que chaque point soit rouge ou bleu. Montrer qu'il existe une couleur telle que pour tout réel x on puisse trouver deux points de cette couleur distants de x .

Raisonnement par récurrence

Exercice 4 Trouver tous les $n \in \mathbb{Z}$ tels que $2^n \geq n^2$.

Exercice 5 A Mathland, deux villes sont toujours reliées soit par une ligne aérienne, soit un canal navigable (à double sens). Montrer qu'il est possible de choisir un moyen de transport, tel que, en partant de n'importe quelle ville, on puisse atteindre n'importe quelle autre ville uniquement à l'aide de ce moyen de transport.

Exercice 6 Soit u_0, u_1, \dots une suite de nombres vérifiant $u_0 = 1$ et pour $n \geq 0$:

$$u_{n+1} = u_0 + \dots + u_n.$$

Calculer u_n .

Exercice 7 Soit α un nombre réel tel que $\alpha + 1/\alpha \in \mathbb{Z}$. Montrer que :

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z}.$$

3.2 Stratégies de base

Principe des tiroirs

Exercice 8 Démontrer les deux assertions suivantes, où n est un entier strictement positif : 1. Si $n + 1$ chaussettes sont réparties dans n tiroirs, montrer qu'il existe un tiroir contenant au moins deux chaussettes. 2. Soit k un entier strictement positif. Si au moins $kn + 1$ chaussettes sont réparties dans n tiroirs, alors il existe un tiroir contenant au moins $k + 1$ chaussettes.

Exercice 9 Lors d'une réunion de n personnes, montrer qu'il existe deux personnes qui ont serré la main au même nombre de personnes.

Exercice 10 On choisit A_1, \dots, A_5 5 points du plan à coordonnées entières (par rapport au repère orthonormé usuel). Montrer qu'il existe deux entiers i, j (avec $i \neq j$) tels que $]A_i A_j[$ passe par un point à coordonnées entières.

Invariants

Exercice 11 Xavier écrit les nombres $(2, 3, 4)$ au tableau. Sandrine a le droit d'effectuer l'opération suivante : choisir deux de ces nombres (a, b) et remplacer le troisième par $a + b - 1$. Est-ce que Sandrine peut obtenir $(2009, 2010, 2011)$ en utilisant uniquement cette opération ?

Exercice 12 Lors d'une réunion de n personnes, montrer que le nombre de personnes qui ont échangé un nombre impair de poignées de main est pair.

Exercice 13 Est-il possible de paver avec des dominos 2×1 : (i) un damier 9×9 ? (ii) un damier 8×8 auquel manque les coins en haut à gauche et en bas à droite ?

Descente infinie

Exercice 14 Résoudre l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz,$$

où $x, y, z \in \mathbb{Z}$ sont des nombres entiers relatifs.

3.3 Géométrie

Exercice 15 Soient Δ une droite, \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux cercles tangents à Δ en respectivement A_1 et A_2 avec $A_1 \neq A_2$, et tangents entre eux. On note r_1 le rayon de \mathcal{C}_1 et r_2 le rayon de \mathcal{C}_2 . Montrer que $A_1 A_2^2 = 4r_1 r_2$.

Exercice 16 Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles de rayons respectifs r_1 et r_2 se coupant en A et B , Δ une droite quelconque passant par A et pas par B . Soient C et D les points d'intersection respectifs de Δ avec Γ_1 et Γ_2 . Calculer le rapport $\frac{BC}{BD}$ en fonction uniquement de r_1 et r_2 .

Exercice 17 Droite de Simpson. Soit Γ un cercle et A, B, C trois points de Γ . Soit P un point du plan, P_A, P_B, P_C ses projections sur les droites $(BC), (CA), (AB)$ respectivement. Montrer que les points P_A, P_B, P_C sont alignés si et seulement si P appartient à Γ .

Exercice 18 Étant donné un triangle ABC , construire trois points A', B' et C' tels que B' soit le milieu de $[AC']$, C' celui de $[BA']$ et A' celui de $[CB']$.

Exercice 19 Étant donnés n points A_1, \dots, A_n du plan, existe-t-il n points B_1, \dots, B_n tels que A_1, \dots, A_n soient les milieux de, respectivement, $[B_1B_2], \dots, [B_nB_1]$?

Exercice 20 Soient A, B, A' et B' quatre points du plans tels que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{A'B'}$. Construire le centre de la similitude directe qui envoie A sur A' et B sur B' .

4 Les solutions

4.1 Rudiments de logique

Solution de l'exercice 1 1. On constate que les deux tables de vérité sont identiques à :

F	G	$\neg(F \wedge G)$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

2. On constate que les deux tables de vérité sont identiques à :

F	G	$F \Rightarrow G$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Solution de l'exercice 2 Soit B la proposition « je jouerai au Volley » et C la proposition « quelqu'un veut jouer au Volley ».

Concentrons-nous d'abord sur la proposition « B sauf si $\neg C$ ». Si B est vraie, nécessairement C est vraie (sinon, personne veut jouer et donc je ne joue pas). Réciproquement, si C est vraie, alors nécessairement je joue au Volley, autrement dit B est vraie. En conclusion, la proposition « B sauf si $\neg C$ » est équivalente à la proposition « B si, et seulement si C ».

Comme la négation de « si F , alors G » est $F \wedge \neg G$, la négation de la proposition de départ est :

il fait beau et soit je joue au Volley alors que personne ne veut jouer, soit je ne joue pas au Volley alors que quelqu'un veut jouer.

Solution de l'exercice 3 Raisonnons par l'absurde en supposant qu'on puisse trouver des distances x et y telles que deux points rouges ne soient jamais distants de x et deux points bleus ne soient jamais distants de y .

Il existe alors un point rouge ; notons le A . Considérons ensuite un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC = x$ et $BC = y$. Ainsi, B et C doivent être bleus. Or ces deux points sont distants de y , ce qui est contradictoire. Notre supposition de départ était donc fautive ; ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4 On commence par remarquer que $n = 0, 1, 2, 4$ conviennent mais pas $n = 3$. Des essais conduisent à conjecturer que les entiers recherchés sont exactement $n = 0, 1, 2$ et $n \geq 4$. Soit n un entier tel que $2^n \geq n^2$. D'une part, si $n < 0$, alors $2^n < 1$ et $n^2 \geq 1$, ce qui montre que $n \geq 0$. Ensuite, notons P_n la proposition suivante :

$$P_n : \quad \ll 2^n \geq n^2, \gg$$

que nous allons démontrer par récurrence sur n . - (Initialisation) On a déjà vu que P_4 est vérifiée. - (Hérédité) Soit $n \geq 4$ un entier et supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est satisfaite. Il s'agit donc de montrer que $2^{n+1} \geq n^2$. Écrivons $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n$ afin de faire apparaître le terme 2^n et de pouvoir utiliser l'hypothèse de récurrence. Celle-ci nous fournit :

$$2^{n+1} \geq 2 \cdot 2^n \geq 2n^2.$$

Il suffit donc de montrer que $2n^2 \geq (n+1)^2$. Or cette dernière inégalité est équivalente à :

$$(n-1)^2 \geq 2,$$

qui est vérifiée car $n \geq 4$.

Solution de l'exercice 5 Notons n le nombre de villes. Pour avoir une intuition de ce qui se passe, il est conseillé de tester différentes configurations pour des petites valeurs de n . Pour $n = 2$, il n'y a qu'un seul moyen de transport. Pour $n = 3$, soient A, B, C les trois villes. Sans perte de généralité, supposons que $A - B$ est une ligne aérienne. Alors soit C peut être relié à A ou B par une ligne aérienne, auquel cas l'avion convient, soit C est relié à A et B par un canal, auquel cas le bateau convient.

Cela suggère de démontrer que la véracité de la proposition suivante par récurrence² sur n :

P_n : \ll Pour toute configuration de n villes, il existe un moyen de transport vérifiant les conditions requises. \gg

- (Initialisation) On a déjà vu que P_2 est vérifiée. - (Hérédité) Soit $n \geq 2$ un entier et supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est satisfaite. Considérons A une ville quelconque et appliquons la propriété P_n à la configuration des n villes restantes. Sans perte de généralité, supposons que c'est l'avion qui convient. Alors de deux choses l'une : soit il existe une ligne aérienne reliant A à une autre ville, auquel cas l'avion convient, soit A est relié à toutes les autres villes par un canal, auquel cas le bateau convient.

Solution de l'exercice 6 En calculant les premiers termes de la suite, on est amené à conjecturer que $u_n = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$ (mais pas pour $n = 0$). Soit donc, pour $n \geq 1$, P_n la propriété :

$$u_n = 2^{n-1}.$$

Démontrons ceci par récurrence sur l'entier n . - (Initialisation) On calcule que $u_1 = 1$, de sorte que P_1 est vérifiée. - (Hérédité) Soit $n \geq 1$ un entier et supposons que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est satisfaite. Nous remarquons que d'après la formule de l'énoncé (utilisée pour n et $n+1$) :

$$u_{n+1} = u_n + u_n = 2u_n.$$

D'après l'hypothèse de récurrence, $u_{n+1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$. Cela montre que P_{n+1} est vérifiée et conclut la récurrence.

Solution de l'exercice 7 Montrons que la propriété suivante est vérifiée par récurrence sur n :

2. il faut toujours connaître la propriété précise que l'on veut prouver afin d'éviter les mauvaises surprises (par exemple lors de deux récurrences imbriquées ou autre réjouissances de ce type).

$$P_n : \quad \ll \alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \in \mathbb{Z} \gg.$$

- (Initialisation) P_1 est clairement vraie. - (Hérédité) Soit $n \geq 1$ un entier et supposons que P_n est vraie. Remarquons que :

$$\alpha^{n+1} + \frac{1}{\alpha^{n+1}} = \left(\alpha + \frac{1}{\alpha} \right) \left(\alpha^n + \frac{1}{\alpha^n} \right) - \left(\alpha^{n-1} + \frac{1}{\alpha^{n-1}} \right),$$

qui est entier gr,ce à l'hypothèse de l'énoncé et à l'hypothèse de récurrence P_n . Cela conclut.

4.2 Stratégies de base

Solution de l'exercice 8 Contentons-nous de montrer le deuxième point (celui-ci implique le premier avec $k = 1$). Montrons la proposition contraposée, à savoir que s'il n'existe pas de tiroir contenant au moins $k + 1$ chaussettes, alors il n'y a pas au moins $kn + 1$ chaussettes réparties dans n tiroirs.

Or dire qu'il n'existe pas de tiroir contenant au moins $k + 1$ chaussettes, c'est dire que tous les tiroirs contiennent au plus k chaussettes, et comme il a n tiroirs, cela implique qu'il y a au plus kn chaussettes. Cela conclut.

Solution de l'exercice 9 Ici, les tiroirs et les chaussettes s'imposent naturellement : les personnes, au nombre de n , jouent le rôle de chaussettes et le nombre de personnes auxquelles on a serré la main, compris entre 0 et $n - 1$, jouent le rôle de tiroirs. Il y a ainsi n tiroirs et n chaussettes. D'après le principe des tiroirs, le seul cas où il n'existe pas de tiroir contenant au moins deux chaussettes se produit lorsque chaque tiroir est occupé par exactement une chaussette. Mais alors, il existerait à la fois une personne n'ayant serré aucune main et une personne ayant serré la main de tout le monde, ce qui n'est pas possible. Ainsi, il existe un tiroir contenant au moins deux chaussettes, ce qui exactement ce qu'il fallait prouver.

Solution de l'exercice 10 Les parités des coordonnées d'un point à coordonnées entières ne peuvent être que de quatre types : (pair, pair), (impair, pair), (pair, impair) et (impair, impair). Comme nous avons affaire à cinq points, d'après le principe des tiroirs il existe deux points différents, disons A_i et A_j , de même type de parité. Alors le milieu de $]A_i A_j[$ est un point à coordonnées entières, ce qui montre que nous pouvons choisir A_i et A_j pour répondre aux exigences de l'énoncé.

Solution de l'exercice 11 On remarque que la parité de la somme des nombres écrits au tableau est toujours impaire. La configuration hypothétique (2009, 2010, 2011) est telle que la somme de ces nombres est paire. On ne peut donc pas l'obtenir en utilisant l'unique opération autorisée.

Solution de l'exercice 12 Soient N le nombre total de poignées de main échangées, X_i l'ensemble des personnes ayant échangé un nombre impair de poignées de main et X_p l'ensemble de personnes ayant échangé un nombre pair de poignées de main. Pour une personne x , notons $n(x)$ le nombre de poignées de mains échangées par x . Nous avons alors, chaque poignée de main étant comptée deux fois :

$$2N = \sum_{x \in X_i} n(x) + \sum_{x \in X_p} n(x).$$

En considérant cette équation modulo 2, il vient :

$$0 \equiv \sum_{x \in X_i} 1 + \sum_{x \in X_p} 0 \pmod{2}.$$

Ainsi, le cardinal de X_i est pair, ce qu'il fallait démontrer.

Solution de l'exercice 13 (i) Une figure pavée entièrement par des triminos 1×2 possède un nombre multiple de 2 cases. Or le damier à paver possède un nombre de cases qui n'est pas multiple de 2. La réponse est donc *non*. (ii) Colorions le damier comme un échiquier. On remarque qu'un domino recouvre nécessairement 2 cases dont les couleurs sont différentes. Comme la figure à paver ne possède pas la même nombre de cases de chaque couleur, la réponse est encore *non*.

Solution de l'exercice 14 La solution triviale $(0, 0, 0)$ convient. Nous allons montrer que c'est la seule qui soit en utilisant le principe de descente infinie. Raisonnons par l'absurde en supposant qu'il existe une solution (x_0, y_0, z_0) de l'équation de départ telle que $(x_0, y_0, z_0) \neq (0, 0, 0)$. 1. Si l'un des entiers est nul, disons x_0 par symétrie, alors $y_0^2 + z_0^2 = 0$, ce qui impose $(y_0, z_0) = (0, 0)$. Nous pouvons donc supposer qu'aucun des entiers n'est nul. 2. Si tous les entiers ne sont pas strictement positifs, comme le terme de droite de l'équation est positif, il y a nécessairement deux entiers négatifs, disons x_0 et y_0 , et un entier positif, disons z_0 . Mais alors, $(-x_0, -y_0, z_0)$ est également une solution non triviale. En conclusion, on peut supposer que x_0, y_0, z_0 sont tous strictement positifs. 3. Comme le terme de droite est pair, on voit qu'au moins un entier parmi x_0, y_0, z_0 est pair, disons x_0 . Écrivons alors $x_0 = 2x_1$ avec $x_1 > 0$. En réinjectant la valeur de x_0 , il vient :

$$4x_1^2 + y_0^2 + z_0^2 = 4x_1y_0z_0.$$

Ceci impose que $y_0^2 + z_0^2$ soit pair et donc que y_0 et z_0 aient la même parité. 4. Nous allons montrer que nécessairement y_0 et z_0 sont tous les deux pairs. Raisonnons par l'absurde en supposant que y_0 et z_0 sont tous les deux impairs. Écrivons $y_0 = 2y' + 1$ et $z_0 = 2z' + 1$. En réinjectant les valeurs de y_0 et de z_0 dans l'équation, nous obtenons :

$$4x_1^2 + 4y'^2 + 4z'^2 + 2 = 4x_1y_0z_0,$$

ce qui est absurde car le terme de gauche n'est pas divisible par 4. 5. Ainsi, nous pouvons écrire $y_0 = 2y_1$ et $z_0 = 2z_1$. En réinjectant les valeurs de y_0 et de z_0 dans l'équation, il vient :

$$4x_1^2 + 4y_1^2 + 4z_1^2 = 16x_1y_1z_1,$$

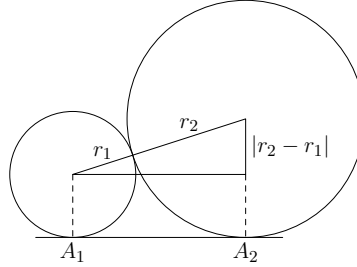
ou encore $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 4x_1y_1z_1$. Remarquons que dans le raisonnement qui précède, nous n'avons fait qu'utiliser le fait que le terme de droite était pair. Comme $(x_1, y_1, z_1) \neq (0, 0, 0)$, nous pouvons itérer par récurrence ce que nous avons fait en construisant une suite de triplets d'entiers (x_n, y_n, z_n) tels que pour $n \geq 0$:

$$x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 = 2^{n+1}x_ny_nz_n \quad \text{et} \quad x_{n+1} = \frac{x_n}{2} \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{2} \quad z_{n+1} = \frac{z_n}{2},$$

6. La suite (infinie) (x_n) est ainsi une suite strictement décroissante d'entiers strictement positifs, ce qui est absurde.

4.3 Géométrie

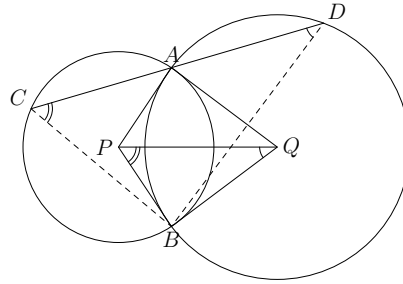
Solution de l'exercice 15 La droite joignant les centres de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 passe par leur point de contact. On applique alors le théorème de Pythagore au triangle rectangle dessiné sur la figure ci-dessous.



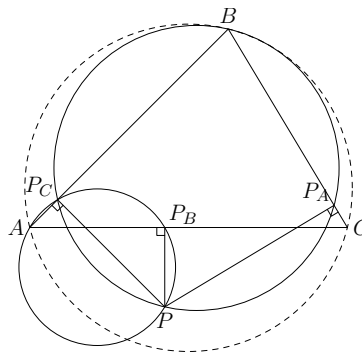
On obtient $A_1A_2^2 + (r_2 - r_1)^2 = (r_2 + r_1)^2$ ce qui donne bien $A_1A_2^2 = 4r_1r_2$.

Solution de l'exercice 16 Première méthode. D'après la loi des sinus, on a $BC = 2r_1 \sin \widehat{BAC}$ et $BD = 2r_2 \sin \widehat{BAD}$. Or on a $\widehat{BAC} + \widehat{BAD} = \pi$, d'où $\sin \widehat{BAC} = \sin \widehat{BAD}$ et donc $\frac{BC}{BD} = \frac{r_1}{r_2}$.

Deuxième méthode. Soient P et Q les centres respectifs de Γ_1 et Γ_2 . D'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{BCA} = \frac{1}{2}\widehat{BPA} = \widehat{BPQ}$. De même, $\widehat{ADB} = \frac{1}{2}\widehat{AQB} = \widehat{PQB}$. Ainsi, les triangles CBD et PBQ sont semblables, et $\frac{BC}{BD} = \frac{BP}{BQ} = \frac{r_1}{r_2}$.



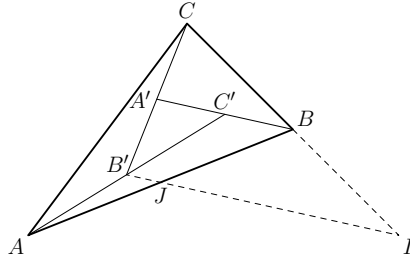
Solution de l'exercice 17 On raisonne dans le cas où P est de l'autre côté de (AC) par rapport à B comme sur la figure, les autres cas se traitent de même.



Les angles $\widehat{PP_A B}$, $\widehat{PP_C B}$, $\widehat{PP_B A}$ et $\widehat{PP_C A}$ étant droits, les points P, P_A, B, P_C d'une part, P, A, P_B, P_C d'autre part, sont cocycliques. D'où $\widehat{PP_C P_A} = \widehat{PP_B P_A} = \widehat{PBC}$ et $\widehat{PP_C P_B} = \widehat{PAP_B} = \widehat{PAC}$. Or les points P_A, P_B, P_C sont alignés si et seulement si $\widehat{PP_C P_A} = \widehat{PP_C P_B}$, donc si et seulement si $\widehat{PBC} = \widehat{PAC}$, donc si et seulement si les points A, B, C, P sont cocycliques.

Solution de l'exercice 18 Première méthode. L'homothétie $h_{A, \frac{1}{2}}$ de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$ envoie C' sur B' . De même, $h_{B, \frac{1}{2}}(A') = C'$ et $h_{C, \frac{1}{2}}(B') = A'$. Ainsi, $h_{A, \frac{1}{2}} \circ h_{B, \frac{1}{2}} \circ h_{C, \frac{1}{2}}(B') = B'$. Or, la composée d'homothéties de rapports non inverses est une homothétie. Donc $h_{A, \frac{1}{2}} \circ h_{B, \frac{1}{2}} \circ h_{C, \frac{1}{2}}$ est l'homothétie de centre B' et de rapport $\frac{1}{8}$.

Soit I le point tel que B soit le milieu de $[CI]$, et soit J le milieu de $[AB]$. On vérifie facilement que $h_{A, \frac{1}{2}} \circ h_{B, \frac{1}{2}} \circ h_{C, \frac{1}{2}}(I) = J$, et on en déduit que $\overrightarrow{B'J} = \frac{1}{8}\overrightarrow{B'I}$ puis la position du point B' , et enfin les positions de C' et A' .



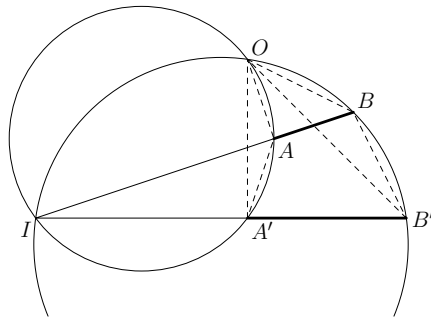
Deuxième méthode. Le point B' étant le milieu de $[AC']$, c'est le barycentre du système pondéré $\{(A, 4), (C', 4)\}$; et C' est le barycentre du système pondéré $\{(B, 2), (A', 2)\}$. Par associativité des barycentres et unicité, on en déduit que B' est le barycentre du système pondéré $\{(A, 4), (B, 2), (A', 2)\}$. Puis, de même, A' étant le barycentre de $\{(C, 1), (B', 1)\}$, le point B' est finalement le barycentre de $\{(A, 4), (B, 2), (C, 1), (B', 1)\}$, donc de $\{(A, 4), (B, 2), (C, 1)\}$. On en déduit que $\overrightarrow{AB'} = \frac{2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{7}$. On construit ensuite comme précédemment les points C' et A' .

Solution de l'exercice 19 Considérons les symétries s_{A_i} de centre A_i . S'il existe des points B_i vérifiant les conditions de l'énoncé, alors $s_{A_i}(B_i) = B_{i+1}$ ($i < n$) et $s_{A_n}(B_n) = B_1$. En particulier, $B_1 = s_{A_n} \circ s_{A_{n-1}} \circ \dots \circ s_{A_1}(B_1)$. Or, la composée de n symétries centrales est une translation si n est pair, et une symétrie centrale si n est impair.

Par conséquent, si n est impair, il existe un unique B_1 point fixe de $s_{A_n} \circ \dots \circ s_{A_1}$, et les autres B_i s'en déduisent de manière unique. Il y a donc une unique solution au problème posé.

Si n est pair, deux cas : soit $s_{A_n} \circ \dots \circ s_{A_1}$ est une translation de vecteur non nul, et alors elle n'a aucun point fixe, donc il n'y a aucune solution. Soit $s_{A_n} \circ \dots \circ s_{A_1}$ est l'identité du plan, et alors tout point B_1 du plan donne lieu à une solution.

Solution de l'exercice 20 Si (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, la similitude en question est une homothétie de centre le point d'intersection de (AA') et (BB') . Sinon, soit I le point d'intersection de (AB) et $(A'B')$. Soit O le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits à IAA' et IBB' . Alors O est le centre de la similitude que l'on cherche.



En effet, montrons que les triangles OAA' et OBB' sont directement semblables. Par le théorème de l'angle inscrit, les angles orientés $\widehat{AOA'}$ et $\widehat{AIA'}$ sont égaux, ainsi que les angles $\widehat{BOB'}$ et $\widehat{BIB'}$, donc $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'}$. De même pour les angles $\widehat{OAA'}$ et $\widehat{OBB'}$, tous deux égaux à $\widehat{OIA'} = \widehat{OIB'}$.

VI. En TD

Les exercices suivants sont classés par thème, et par ordre de difficulté croissante.



1 Les énoncés

1.1 Stratégies de base

Exercice 1 Nier les propositions suivantes.

1. Dans la classe, toutes les filles sont brunes et il y a au moins un garçon blond.
2. S'il pleut, je prendrai un parapluie ou un imperméable.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall y \in \mathbb{R}, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Question bonus : que signifie la proposition 3 ?

Exercice 2 On considère des « mots » écrits avec les lettres x, y, z et t . On s'autorise les trois transformations suivantes : $xy \leftrightarrow yyx, xt \leftrightarrow ttx$ et $yt \leftrightarrow ty$. Les mots suivants sont-ils équivalents ?

1. $xyxy$ et $xyyyxx$,
2. $xytx$ et $txyt$,
3. xy et xt .

Exercice 3 a) Déterminer le nombre maximal de rois que l'on peut disposer sur un échiquier de sorte que deux quelconques ne s'attaquent jamais.

b) Idem pour les cavaliers.

Exercice 4 Est-il possible de répartir les entiers $1, 2, \dots, 33$ en 11 groupes disjoints de trois éléments chacun de telle sorte que dans chaque groupe l'un des éléments soit la somme des deux autres ?

Exercice 5 Existe-t-il un triangle dont le périmètre fait moins de 1 centimètre, tandis le rayon de son cercle circonscrit excède 1 kilomètre ?

Exercice 6 Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers.

Exercice 7 La somme de vingt entiers consécutifs est 1030. Quel est le plus petit de ces entiers ?

Exercice 8 Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telle que $f(2007) = 1$ et $f \circ f \circ f(x) = x$?

Exercice 9 Montrer le principe de récurrence forte à partir du principe de récurrence simple.

Exercice 10 Trouver tous les triplets d'entiers (x, y, z) tels que $x^3 + 2y^3 = 4z^3$.

Exercice 11 À partir d'un triplet (a, b, c) on peut effectuer l'opération suivante : on choisit deux des nombres du triplet, mettons x et y , et on remplace x par $\frac{x-y}{\sqrt{2}}$ et y par $\frac{x+y}{\sqrt{2}}$, en laissant le troisième nombre inchangé. Peut-on passer du triplet initial $(2, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ au triplet $(1, \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2})$ en respectant ces règles ?

Exercice 12 Vingt-deux arbres sont placés en rond, et sur chaque arbre se pose un corbeau. Puis, toutes les minutes, deux corbeaux se déplacent chacun sur un arbre voisin du leur. Est-il possible qu'au bout d'un certain temps, tous les corbeaux soient sur le même arbre ?

Exercice 13 Prouver les relations suivantes :

a) $(1 - \frac{1}{4})(1 - \frac{1}{9}) \dots (1 - \frac{1}{n^2}) = \frac{n+1}{2n}$;

b) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \frac{n-1}{n}$.

Exercice 14 Prouver que tout nombre entier $n > 0$ peut s'écrire comme une somme de nombres distincts de Fibonacci.

Exercice 15 Prouver que 133 divise $11^{1006} + 12^{2009}$.

Exercice 16 Montrer les inégalités suivantes :

a) $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}}$ pour tout $n > 1$;

b) $(1+x)^n > 1 + nx$ pour tous $n > 1$ et $x > -1$;

c) $2(\sqrt{n+1} - 1) < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ pour tout $n > 1$;

d) $1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2$ pour tout $n > 1$.

Exercice 17 Une table $m \times n$ est remplie par des nombres réels tels que la somme des nombres dans chaque ligne et chaque colonne est 1. Montrer que $m = n$.

Exercice 18 Une souris ronge un cube de fromage 3×3 qui est découpé en 27 petits cubes. Après avoir mangé un petit cube, elle procède avec un autre petit cube qui est adjacent au précédent (c-a-d qui a une face en commun). Est-ce que la souris peut manger tout le cube sauf le petit cube au centre ?

Exercice 19 a) Les nombres $1, 2, \dots, 20$ sont écrits au tableau. On peut effacer deux nombres quelconques a et b et écrire à leur place le nombre $a + b - 1$. Quel nombre sera au tableau après 19 opérations ?

b) Et si l'on remplace deux nombres a et b par $a + b + ab$?

Exercice 20 Pierre a une carte avec le couple de nombres $(5, 19)$. Chaque fois qu'il montre une carte (a, b) , Ivan lui donne la carte $(a + 1, b + 1)$. Si de plus a et b sont pairs, alors Thomas lui

donne aussi la carte $(a/2, b/2)$. Enfin, si Pierre montre deux cartes (a, b) et (b, c) , alors Guillaume lui offre la carte (a, c) . Est-ce que Pierre peut ainsi obtenir la carte $(1, 2009)$?

Exercice 21 Combien y-a-t-il de nombres de 6 chiffres qui ont 2 chiffres pairs et 4 chiffres impairs ?

Exercice 22 Prouver que a) $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$; b) $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = 0$; c) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \dots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

Exercice 23 15 garçons ont trouvé 100 champignons. Prouver qu'au moins deux de ces garçons ont trouvé le même nombre de champignons.

Exercice 24 a) On a placé 6 points dans un rectangle 3×4 . Montrer que la distance entre au moins deux de ces points est inférieure à $\sqrt{5}$.

b) On a placé 51 points dans un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en choisir trois qui se trouvent dans un cercle de rayon $1/7$.

1.2 Géométrie

Exercice 25 Soient h_1, h_2 et h_3 les longueurs des hauteurs d'un triangle. Est-ce possible que $h_1 = h_2/2 = h_3/3$?

Exercice 26 Dans un triangle ABC on a tracé les hauteurs $[AA_1], [BB_1], [CC_1]$ et les médianes $[AA_2], [BB_2], [CC_2]$. Prouver que la longueur de la ligne brisée $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ est égale au périmètre du triangle ABC .

Exercice 27 Sur les côtés BC et CD d'un parallélogramme $ABCD$ on a construit de manière externe deux triangles équilatéraux BCP et CDQ . Prouver que le triangle APQ est équilatéral.

Exercice 28 Deux cercles se rencontrent en les points P et Q . Une droite intersecte le segment $[PQ]$ et rencontre les cercles en les points A, B, C et D dans cet ordre-là. Prouver que $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 29 Soit M le milieu de la base $[BC]$ d'un triangle isocèle ABC . Le point E sur le côté AC est tel que $HE \perp AC$, le point O est le milieu de $[HE]$. Montrer que les droites (AO) et (BE) sont perpendiculaires.

Exercice 30 On se donne un triangle ABC et des points X, Y, Z tels que $\widehat{ABZ} = \widehat{XBC}$, $\widehat{BCX} = \widehat{YCA}$, $\widehat{CAY} = \widehat{ZAB}$. Prouver que les droites AX, BY et CZ sont concurrentes.

Exercice 31 Soient (OA) et (OB) deux droites passant par le point O qui touchent un cercle aux points A et B . On a tracé une corde $[AC]$ parallèle à (OB) , soit E le deuxième point de l'intersection du segment $[OC]$ avec le cercle. Montrer que la droite (AE) rencontre le segment $[OB]$ en son milieu.

1.3 Arithmétique

Exercice 32 Montrer que quel que soit n , $n!$ n'est jamais divisible par 2^n , mais qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $n!$ soit divisible par 2^{n-1} .

Exercice 33 On considère la suite de Fibonacci, définie par : $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \geq 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$. Montrer que pour tous n et k entiers, $F_{n+k} = F_{k+1} \cdot F_n + F_k \cdot F_{n-1}$. En déduire que si a divise b , F_a divise F_b .

Exercice 34 Quel est le plus grand diviseur commun de tous les $n^{13} - n$ pour n entier positif quelconque ?

Exercice 35 Pour quelles valeurs de l'entier n le nombre $n^4 + 4^n$ est-il premier ?

Exercice 36 Montrer que quel que soit $n \geq 1$, $n^5 + 7$ n'est pas un carré.

Exercice 37 Montrer que les entiers de la forme $2^{2^n} + 1$ sont deux à deux premiers entre eux.

Exercice 38 Montrer que, si a et b sont deux entiers premiers entre eux, tous les facteurs premiers impairs de $a^2 + b^2$ sont de la forme $4k + 1$.

Montrer plus généralement que, si a et b sont deux entiers premiers entre eux, tous les facteurs premiers impairs de $a^{2^n} + b^{2^n}$ sont de la forme $2^{n+1}k + 1$.

En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 1$, $8k + 1$... et plus généralement $2^{n+1}k + 1$ quel que soit n positif.

Exercice 39 Soit p un nombre premier.

a) Montrer que le dénominateur de : $S_p = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p}$ est divisible par p . On pose donc : $S_p = \frac{a}{bp}$.

b) Montrer que $a - b$ est divisible par p^2 .

c) $a - b$ est-il divisible par p^3 ?

Exercice 40 Soit S_n l'ensemble des entiers compris entre 1 et 2^n . Montrer que l'on peut partitionner S_n en deux sous-ensembles disjoints :

$A = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ et $B = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$ (avec bien évidemment $p + q = 2^n$) tels que pour tout k compris entre 1 et $n - 1$,

$$\sum_{a_i \in A} (a_i)^k = \sum_{b_i \in B} (b_i)^k$$

Exercice 41 Olympiade internationale 1998

Trouver tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que $ab^2 + b + 7$ divise $a^2b + a + b$.

Exercice 42 Olympiade internationale 2005

Déterminer tous les entiers strictement positifs premiers avec tous les nombres de la forme $2^n + 3^n + 6^n - 1$, pour n entier naturel.

Exercice 43

1. Calculer $m = V_2(73!)$, l'entier maximal tel que : 2^m divise $73!$.
2. Trouver la somme $S_2(73)$ des « décimales » en base 2.
3. Trouver une relation entre $V_2(n!)$ et $S_2(73)$ et la prouver.

Exercice 44 Soient $n = p_1^{\alpha_1}$ et $\tau(n)$ est le nombre de diviseurs de n . Trouver une formule pour $\tau(n)$ telle que $\tau(n) = (\alpha_1 + 1) \dots (\alpha_k + 1)$.

Exercice 45 Soit l'algorithme suivant :

n lampes (éteintes)

changer (i.e allumer) 1, 2, 3, ..., n lampes

changer (i.e éteindre) 2, 4, 6, ... lampes

changer (i.e allumer) 3, 6, 9, ...

...

changer n .

Quelles sont les lampes allumées ?

Exercice 46 Trouver toutes les solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ telles que :

1. $2^y = x^2 + 13$

2. $5^y = x^2 + 2x + 9$

3. $3^y = x^2 + 8x + 19$

Exercice 47 Trouver toutes les solutions dans \mathbb{Z} de $y^2 = x^5 - 4$.

Exercice 48 Montrer que la somme de n carrés strictement positifs consécutifs n'est jamais la somme des n puissances quatrièmes positives consécutives. Essayer avec $n = 2$ par exemple.

Exercice 49 Trouver tout $a, b, c > 1$ tel que

a divise $b^2 - 1$, b divise $a^2 - 1$, a divise $c^2 - 1$, c divise $a^2 - 1$, b divise $c^2 - 1$, c divise $b^2 - 1$.

2 Les solutions

2.1 Stratégies de base

Solution de l'exercice 1

1. Dans la classe, il y a au moins une fille qui n'est pas brune, ou aucun garçon n'est blond.
2. Il pleut, et je ne prendrai ni parapluie, ni imperméable.
3. $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \varepsilon > 0, \forall \eta > 0, \exists y \in \mathbb{R}, |x - y| < \eta$ et $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$.

La proposition 3 signifie que la fonction f est continue sur \mathbb{R} .

Solution de l'exercice 2

1. Les deux mots sont équivalents : $xyyy \leftrightarrow xyxyx \leftrightarrow xyxyyx$.
2. Les deux mots ne sont pas équivalents : en effet, le nombre de x est un invariant.
3. Les deux mots ne sont pas équivalents : la présence de y (ou celle de t) est un invariant.

Solution de l'exercice 3

a) On divise l'échiquier 8×8 en 16 carrés 2×2 . D'après le principe des tiroirs, si l'on place au moins 17 rois sur l'échiquier, au moins deux se retrouveraient dans le même carré 2×2 et donc s'attaqueraient. Par conséquent, il est impossible de placer plus de 16 rois sur l'échiquier sans que deux s'attaquent. Réciproquement, on trouve facilement une disposition à 16 rois. Le maximum cherché est donc 16.

b) Le maximum cherché est 32. Tout d'abord, on note qu'un cavalier situé sur une case blanche n'attaque que des cases noires. Ainsi, en plaçant 32 cavaliers, un sur chaque case blanche, on a une disposition à 32 cavaliers sans que deux s'attaquent. Réciproquement, on divise l'échiquier en 8 rectangles 2×4 , puis on divise chacun de ces rectangles en 4 paires de 2 cases comme indiqué

1	2	3	4
3	4	1	2

D'après le principe des tiroirs, si l'on plaçait au moins 33 cavaliers sur l'échiquier, au moins 5 seraient dans un même rectangle 2×4 considéré ci-dessus. Et donc, tiroirs toujours, au moins deux seraient sur des cases de même numéro dans ce rectangle, et donc s'attaqueraient. Ainsi, il est impossible de placer plus de 32 cavaliers en respectant les contraintes.

Solution de l'exercice 4

C'est impossible. En effet, si ça l'était, dans chaque groupe de trois la somme des trois nombres serait paire (double du plus grand des trois), et donc la somme de tous les éléments serait encore paire. Or, $1 + 2 + \dots + 33 = \frac{33 \times 34}{2} = 33 \times 17$ est impair.

Solution de l'exercice 5

Oui. Il suffit de considérer un cercle de rayon supérieur à 1 kilomètre, et de choisir sur ce cercle trois points distants de moins de 1 millimètre les uns des autres...

Solution de l'exercice 6 On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers, et notons-les p_1, \dots, p_n . Soit $N = p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Le nombre N est premier avec chacun des p_i ; or, il admet un facteur premier (ceci peut se démontrer par récurrence forte), qui n'est donc aucun des p_i . Contradiction.

Solution de l'exercice 7 Notons n le plus petit de ces entiers. On a donc $n + (n+1) + \dots + (n+19) = 1030$, c'est-à-dire $20n + 190 = 1030$. On obtient finalement $n = 42$.

Solution de l'exercice 8 La fonction définie par $f(2007) = 1$, $f(1) = 0$, $f(0) = 2007$ et $f(x) = x$ pour tout x distinct de $0, 1, 2007$ est solution du problème.

Solution de l'exercice 9

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un paramètre $x \in \mathbb{N}$. On suppose $P(0)$, et que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $(P(0) \text{ et } \dots \text{ et } P(x) \Rightarrow P(x+1))$. On veut montrer que $\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$.

Considérons la proposition $Q(x) = (\forall y \in \mathbb{N}, y \leq x, P(y))$. Nous allons montrer par récurrence simple que $\forall x, Q(x)$. On a $Q(0) = P(0)$ donc $Q(0)$ est bien vraie par hypothèse. Soit $x \in \mathbb{N}$ et supposons $Q(x)$. Alors, $\forall y \leq x, P(y)$. Donc, d'après la deuxième hypothèse faite sur P , on a $P(x+1)$. On a donc finalement $\forall y \leq x+1, P(y)$, c'est-à-dire $Q(x+1)$. On en déduit par récurrence simple que $\forall x \in \mathbb{N}, Q(x)$. Or, $Q(x) \Rightarrow P(x)$ donc $\forall x \in \mathbb{N}, P(x)$ et le principe de récurrence forte est démontré.

Solution de l'exercice 10

Le triplet $(0, 0, 0)$ est bien entendu solution. Montrons que c'est le seul. Supposons que nous avons une autre solution (x, y, z) . Alors $x^3 = 4z^3 - 2y^3$ est pair, donc x aussi. On écrit $x = 2x'$ et on obtient $8x'^3 + 2y^3 = 4z^3$ soit $y^3 = 2z^3 - 4x'^3$. On en déduit que y^3 , puis y , est pair et on écrit $y = 2y'$. On obtient alors $4x'^3 + 8y'^3 = 2z^3$ et $2x'^3 + 4y'^3 = z^3$; z^3 , et z , sont donc pairs et on écrit $z = 2z'$. Enfin, on obtient $2x'^3 + 4y'^3 = 8z'^3$ et $x'^3 + 2y'^3 = 4z'^3$. Ainsi, (x', y', z') est encore solution. Mais $x' < x$, $y' < y$ et $z' < z$ et on construit ainsi trois suites strictement décroissantes d'entiers positifs, ce qui est impossible. On en déduit que $(0, 0, 0)$ est la seule solution.

Solution de l'exercice 11 On ne peut pas. En effet, pour un triplet (a, b, c) , la quantité $a^2 + b^2 + c^2$ est invariante par les opérations autorisées. Mais pour le premier triplet, $22 + (\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 = 6 + 1/2$ et pour le deuxième $12 + (\sqrt{2})^2 + (1 + \sqrt{2})^2 = 6 + 2\sqrt{2}$.

Solution de l'exercice 12 Ce n'est pas possible. On colorie les arbres alternativement en noir et en blanc (c'est possible, puisqu'il y en a un nombre pair). Alors, à chaque étape, la parité du nombre de corbeaux sur les arbres blancs ne change pas. Comme, initialement, il y a 11 corbeaux sur les arbres blancs, il y en a toujours un nombre impair, et il ne peut y en avoir ni 22, ni 0.

Solution de l'exercice 13 a) Récurrence sur n .

b) Récurrence sur n .

c) Récurrence sur n ou comme suit :

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}.$$

Solution de l'exercice 14 Récurrence sur n . Pour $n = 1$ c'est vrai, supposons que c'est vrai pour tout $k \leq n$ et on va le montrer pour $n + 1$. En effet, soit F_l le plus grand nombre de Fibonacci qui n'exède pas $n + 1$, alors $n + 1 - F_l \leq n$ et $n + 1 - F_l < F_l$, car sinon on aurait $n + 1 \geq 2F_l > F_l + F_{l-1} = F_{l+1}$ ce qui contredit au choix de F_l . Donc, par récurrence $n + 1 - F_l = F_i + \dots + F_j$ et $n + 1$ est une somme de nombres de Fibonacci distincts.

Solution de l'exercice 15 Par récurrence sur n on montre que 133 divise $11^{n+2} + 12^{2n+1}$. Dans notre cas $n = 1004$.

Solution de l'exercice 16 a), b) et c) par récurrence sur n .

d) On montre par récurrence l'inégalité suivante :

$$1 + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

ce qui est plus fort que l'inégalité donnée.

Solution de l'exercice 17 D'un côté la somme des nombres dans toutes les lignes est $m \cdot 1$ et de l'autre côté la somme des nombres dans toutes les colonnes est $n \cdot 1$. Vu que c'est la même chose, on a $m = n$.

Solution de l'exercice 18 Non. Supposons que la souris peut le faire. On colorie les petits cubes en noir et blanc de façon que deux cubes adjacents soient de couleurs différentes (les cubes dans les coins sont noirs). Alors en passant d'un petit cube à l'autre, la souris change de couleur. Or, elle devra manger 12 cubes blancs et 14 cubes noirs. Contradiction.

Solution de l'exercice 19 a) Invariant : si sur le tableau sont écrits n nombres a_1, a_2, \dots, a_n , alors l'expression $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n - n$ reste constante. Au début elle est égale à $S_{20} = 1 + 2 + \dots + 20 - 20 = \frac{(1+20)20}{2} - 20 = 190$ et si à la fin il reste le nombre r , alors $190 = S_1 = r - 1$, d'où $r = 191$.

b) On vérifie aisément qu'étant donnés n nombres a_1, a_2, \dots, a_n sur le tableau, l'opération ne change pas le produit $(a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_n + 1)$. Soit r le nombre qui reste, alors

$$r + 1 = (1 + 1)(2 + 1) \dots (20 + 1) = 21!, \text{ d'où } r = 21! - 1.$$

Solution de l'exercice 20 Non. On constate que Ivan ne peut obtenir que des cartes (a, b) telle que $b - a$ est divisible par 7. Or, $2009 - 1 = 2008$ ne l'est pas.

Solution de l'exercice 21 Réponse : $14 \cdot 5^6$.

Il y a 5 chiffres pairs et 5 chiffres impairs. Le nombre de nombres de 6 chiffres avec 2 chiffres pairs et 4 chiffres impairs (le premier chiffre n'est pas nul) est égale à $(\binom{6}{2} \cdot 5^2) \cdot 5^4 - (5 \cdot 5) \cdot 5^4 = 14 \cdot 5^6$, où $(\binom{6}{2} \cdot 5^2) \cdot 5^4$ est le nombre de mots composés de 2 chiffres pairs et 4 chiffres impairs (y compris ceux qui commencent par 0) et $(5 \cdot 5) \cdot 5^4$ est le nombre de mots composés de 2 chiffres pairs et 4 chiffres impairs commençant forcément par 0.

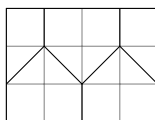
Solution de l'exercice 22 a) D'après le binôme de Newton on a $(1+x)^n = \binom{n}{0} \cdot x^0 + \binom{n}{1} \cdot x^1 + \dots + \binom{n}{n} \cdot x^n$. En posant $x = 1$ on obtient la relation voulue.

b) D'après le binôme de Newton on a $(1-x)^n = \binom{n}{0} \cdot x^0 - \binom{n}{1} \cdot x^1 + \dots + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot x^n$. En posant $x = 1$ on obtient la relation voulue.

c) On considère une table $2n \times 2n$ et on place un pion sur la case au coin en bas à gauche. Il est permis de bouger le pion soit d'une case à droite, soit d'une case en haut. Le nombre de possibilités de se retrouver sur la case au coin en haut à droite après n pas est égal à $\binom{2n}{n}$. De l'autre côté le nombre de possibilité de passer par la k -ième case sur la diagonale est $\binom{n}{k}^2$. D'où le résultat.

Solution de l'exercice 23 Supposons le contraire, alors les garçons ont trouvé au moins $0 + 1 + \dots + 14 = \frac{1+14}{2} \cdot 14 = 105 > 100$ champignons. Contradiction.

Solution de l'exercice 24 a) On découpe le rectangle 3×4 en 5 figures (voir le dessin ci-dessous). Alors au moins deux des 6 points tombent dans la même figure, donc la distance entre eux sera $\leq \sqrt{5}$.



b) On découpe le carré en 25 carreaux de côté 0,2. D'après le principe des tiroirs au moins trois des 51 points se trouvent dans le même carreau. Ce carreau est inscrit dans le cercle de rayon $\frac{1}{2} \cdot 0,2 \cdot \sqrt{2} < 1/7$;

2.2 Géométrie

Solution de l'exercice 25 ...

Solution de l'exercice 26 ...

Solution de l'exercice 27 ...

Solution de l'exercice 28 ...

Solution de l'exercice 29 ...

Solution de l'exercice 30 ...

Solution de l'exercice 31 ...

2.3 Arithématique

Solution de l'exercice 32 Dans le produit $n!$ des entiers inférieurs ou égaux à n , le facteur 2 apparaît $\left[\frac{n}{2}\right]$ fois pour les entiers pairs, $\left[\frac{n}{4}\right]$ fois de plus pour les multiples de 4, ... $\left[\frac{n}{2^k}\right]$ fois de plus pour les multiples de 2^k : en tout, l'exposant de 2 dans la décomposition de $n!$ vaut $\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] + \dots + \left[\frac{n}{2^k}\right] + \dots$. Les termes de cette somme sont nuls à partir d'un certain rang q , donc la somme est inférieure ou égale à : $\frac{n}{2} + \frac{n}{4} + \dots + \frac{n}{2^{q-1}} = n \left(1 - \frac{1}{2^{q-1}}\right) < n$. En revanche, si $n = 2^q$, pour $k \leq q$, $\left[\frac{n}{2^k}\right] = \frac{n}{2^k} = 2^{q-k}$, et la somme : $2^{q-1} + 2^{q-2} + \dots + 2 + 1 = 2^q - 1 = n - 1$, donc $n!$ est divisible par 2^{n-1} .

Solution de l'exercice 33 La définition : $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ entraîne : $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = 2.F_n + F_{n-1}$, puis $F_{n+3} = 3.F_n + 2.F_{n-1}$, $F_{n+4} = 5.F_n + 3.F_{n-1}$... Cela se généralise par récurrence, à condition de poser comme hypothèse de récurrence deux relations consécutives : $F_{n+k-1} = F_k.F_n + F_{k-1}.F_{n-1}$ et $F_{n+k} = F_{k+1}.F_n + F_k.F_{n-1}$, et d'en déduire les deux relations suivantes : $F_{n+k} = F_{k+1}.F_n + F_k.F_{n-1}$ et $F_{n+k+1} = F_{k+2}.F_n + F_{k+1}.F_{n-1}$. La première n'est pas à redémontrer, car elle était déjà parmi les hypothèses de récurrence, et la seconde résulte immédiatement de $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$ et $F_{k+1} = F_k + F_{k-1}$. Mais il faut deux relations consécutives pour initialiser la récurrence (nous en avons donné plus que deux), sinon la démonstration est fautive.

Pour en déduire que F_a divise F_b si a divise b , donc si $b = ka$, il faut construire une autre récurrence, sur k . La formule ci-dessus permet d'écrire : $F_{2a} = F_{a+1}.F_a + F_a.F_{a-1}$, ce qui est manifestement divisible par F_a . Supposons donc que F_{ka} soit divisible par F_a . $F_{(k+1)a} = F_{k+1}.F_{ka} + F_k.F_{(k-1)a}$ est lui aussi divisible par F_a , ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 34 Soit p un nombre premier. Pour tout n premier avec p , $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, donc quel que soit k , $n^{k(p-1)} \equiv 1^k \equiv 1 \pmod{p}$. Il en résulte que pour tout n premier ou non avec p , $n^{k(p-1)+1} - n$ est divisible par p . Or les diviseurs de $13 - 1$ sont : 1, 2, 3, 4, 6 et 12 : si $p - 1$ en fait partie, ce qui est le cas pour $p = 2, 3, 5, 7$ et 13, $n^{13} - n$ sera divisible par p quel que soit n . $2730 = 2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 13$ est donc un diviseur commun de tous les $n^{13} - n$. Ce n'est pas obligatoirement le plus grand, mais le plus grand cherché doit diviser notamment $2^{13} - 2 = 8190 = 2 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$, ce ne peut être que 2730 ou 8190, selon que 3^2 divise ou non tous les $n^{13} - n$. Or 3^2 ne divise pas $3^{13} - 3$, puisqu'il divise 3^{13} et pas 3. La réponse est donc 2730.

Solution de l'exercice 35 Il est quasiment impossible de démontrer mathématiquement qu'un nombre est premier, donc pour un tel problème, on s'attend à un très petit nombre de solutions que l'on peut expliciter à la main (en l'occurrence, $n = 1$). Il s'agit donc de prouver que pour tous les autres n , $n^4 + 4^n$ est non premier, donc manifestement factorisable : la meilleure manière de factoriser ce genre d'expression est de l'écrire comme différence de deux carrés. De fait, si n est pair $n^4 + 4^n$ est pair et supérieur à 4, donc non premier, et si n est impair, $n^4 + 4^n = (n^2 + 2^n)^2 - \left(2^{\frac{n+1}{2}} n\right)^2 = \left(n^2 - 2^{\frac{n+1}{2}} n + 2^n\right) \left(n^2 + 2^{\frac{n+1}{2}} n + 2^n\right)$. Pour $n = 1$, le premier facteur est égal à 1 de sorte que le produit, 5, est un nombre premier, mais pour $n > 1$, $\left(n^2 - 2^{\frac{n+1}{2}} n + 2^n\right) = \left(n - 2^{\frac{n-1}{2}}\right)^2 + 2^{n-1} \geq 2^{n-1} \geq 2$: $n^4 + 4^n$ est produit de deux facteurs supérieurs ou égaux à 2, il est donc non premier.

C'est à Sophie Germain qu'on doit la factorisation plus générale :

$$a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2) (a^2 + 2ab + 2b^2)$$

Solution de l'exercice 36 Il existe deux méthodes habituellement utilisables pour prouver qu'un nombre n'est pas un carré : soit il est trop proche d'un carré pour être lui-même un carré (il n'existe pas de carré entre $n^2 + 1$ et $n^2 + 2n$), mais ce n'est manifestement pas le cas dans notre

problème, soit en utilisant les résidus. Pour tout $p \geq 3$, il existe des entiers a tels qu'aucun carré ne soit congru à a modulo p . Par exemple, aucun carré n'est congru à 2 modulo 3, aucun n'est congru à 2 ni 3 modulo 4... Modulo un nombre premier impair p , il existe $\frac{p-1}{2}$ entiers $a < p$ tels qu'aucun carré ne soit congru à a modulo p . Par exemple, modulo 5, aucun carré n'est congru à 2 ni 3. Quand il existe un carré congru à a modulo p , on dit que a est résidu quadratique modulo p . Le souci, ici, c'est que modulo la plupart des nombres premiers p , $n^5 + 7$ peut prendre toutes les valeurs possibles, donc être résidu quadratique. Il faut donc chercher un nombre premier pour lequel le nombre de valeurs prises par $n^5 + 7$ est réduit, et pour cela utiliser le théorème de Fermat : par exemple si n est premier avec 11, $(n^5)^2 = n^{10} \equiv 1 \pmod{11}$, donc n^5 ne peut prendre que les valeurs 0, 1 ou -1 modulo 11. $n^5 + 7 \equiv 6, 7$ ou $8 \pmod{11}$, or les résidus quadratiques modulo 11 sont : $1^2 \equiv 10^2 \equiv 1$, $2^2 \equiv 9^2 \equiv 4$, $3^2 \equiv 8^2 \equiv 9$, $4^2 \equiv 7^2 \equiv 5$, $5^2 \equiv 6^2 \equiv 3$, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 37 Deux solutions méritent d'être signalées : par récurrence sur $k \geq 1$, on prouve que $2^{2^{n+k}} + 1$ est premier avec $2^{2^n} + 1$. C'est vrai pour $k = 1$, car $2^{2^{n+1}} + 1 = (2^{2^n} + 1)(2^{2^n} - 1) + 2 \equiv 2 \pmod{2^{2^n} + 1}$. Supposons plus généralement que $2^{2^{n+k}} + 1 \equiv 2 \pmod{2^{2^n} + 1}$, $2^{2^{n+k+1}} + 1 = (2^{2^{n+k}} + 1)^2 - 2(2^{2^{n+k}} + 1) + 2 \equiv 2 \pmod{2^{2^n} + 1}$, ce qui achève la démonstration. Mais on peut aussi remarquer que :

$$\begin{aligned} 2^{2^n} - 1 &= (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-1}} - 1) = (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1)(2^{2^{n-2}} - 1) = \\ &\dots = (2^{2^{n-1}} + 1)(2^{2^{n-2}} + 1) \dots (2^{2^1} + 1)(2^{2^1} - 1) \end{aligned}$$

Donc non seulement $2^{2^n} - 1$ est divisible par tous les $2^{2^k} + 1$ qui précèdent, mais c'est précisément le produit de tous ces $2^{2^k} + 1$, ce qui prouve que $2^{2^n} + 1$ est premier avec chacun d'eux, car un diviseur commun diviserait 2.

Solution de l'exercice 38 Soit $p = 2q + 1$ un facteur premier impair de $a^2 + b^2$. $a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}$, donc $a^{2q} \equiv (-1)^q b^{2q} \pmod{p}$. Par ailleurs, si a ou b était divisible par p , $a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}$ impliquerait que l'autre est aussi divisible par p , les deux nombres ne seraient pas premiers entre eux. Comme a et b sont premiers avec p , $a^{p-1} \equiv 1 \equiv b^{p-1} \pmod{p}$, et comme $p - 1 = 2q$, $(-1)^q = 1$ donc q est pair : $q = 2k$ donc $p = 4k + 1$.

Ce résultat se généralise par récurrence. Supposons que, pour a et b premiers entre eux, tous les facteurs premiers impairs de $a^{2^n} + b^{2^n}$ soient de la forme $2^{n+1}k + 1$: on vient de le démontrer pour $n = 1$. Un facteur premier impair de $a^{2^{n+1}} + b^{2^{n+1}} = (a^2)^{2^n} + (b^2)^{2^n}$ s'écrit lui aussi sous la forme $2^{n+1}k + 1$. Par ailleurs, puisque $a^{2^{n+1}} \equiv -b^{2^{n+1}} \pmod{p}$, $a^{2^{n+1}k} \equiv (-1)^k b^{2^{n+1}k} \pmod{p}$: comme $2^{n+1}k = p - 1$ et que $a^{p-1} \equiv 1 \equiv b^{p-1} \pmod{p}$, k est nécessairement pair, ce qui achève la démonstration.

Dés lors, s'il existait un nombre fini de nombres premiers de la forme $2^n k + 1$, soit P le produit de tous ces nombres. $(2P)^{2^{n-1}} + 1$ est impair et premier avec P . Or tous ses facteurs premiers sont de la forme $2^n k + 1$, ce qui prouve qu'il existe des nombres premiers de cette forme qui ne sont pas dans le produit P : contradiction.

D'une manière générale, on peut prouver, mais par une méthode très différente, que si a et b sont premiers entre eux, il existe une infinité de nombres premiers de la forme $ak + b$. Mais on ne connaît pas d'autre résultat de ce type : par exemple, on ne sait pas s'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $n^2 + 1$ bien que ce soit hautement vraisemblable.

Le cas $2^{2^k} + 1$ est intéressant historiquement : au XVII^e siècle, on s'est demandé à quelle condition $2^n - 1$ ou $2^n + 1$ était premier. Si $n = pq$, $2^n - 1$ est divisible par $2^q - 1$, donc $2^n - 1$ ne peut être premier que si n est lui-même premier. Quant à $2^n + 1$, il est divisible par $2^q + 1$ si $n = pq$ avec p impair. Il ne peut être premier que si tous les diviseurs de n sont pairs, donc si n est une puissance de 2. Si n est premier ou même seulement impair, $2^n + 1$ est divisible par 3.

Mersenne avait émis l'hypothèse que pour tout nombre premier p , $2^p - 1$ était premier, et Fermat, que pour toute puissance de 2 : $n = 2^k$, $2^{2^k} + 1$ était premier. Toutes les conjectures de ce type sur les nombres premiers sont fausses, et concernant Fermat, c'est la seule conjecture fautive qu'il nous ait laissée. Déjà $2^{11} - 1 = 23 \times 89$ est non premier, et on n'a trouvé pour l'instant que 47 nombres premiers de Mersenne parmi des millions de nombres testés. Il demeure toutefois probable qu'il existe une infinité de nombres premiers de Mersenne. Quant aux nombres de Fermat, ils sont premiers jusqu'à $2^{16} + 1$, mais il se peut qu'il n'en existe pas d'autre : on n'en connaît aucun qui soit premier pour $k \geq 5$. C'est Euler qui, en 1732, a trouvé la première exception : $2^{32} + 1$ est divisible par 641. Il connaissait la démonstration ci-dessus, prouvant que les facteurs premiers de $2^{32} + 1$ étaient impérativement de la forme $64k + 1$, il n'avait donc pas beaucoup d'essais à faire avant d'atteindre 641. Mais il existe une démonstration élégante qui ne nécessite aucun calcul. $641 = 5^4 + 2^4$ divise $2^{28} (5^4 + 2^4)$. Par ailleurs, $641 = (5 \times 2^7) + 1$ divise $5^4 \times 2^{28} - 1$ car $a^4 - 1$ est toujours divisible par $a - 1$ et $a + 1$. Il divise donc la différence de ces deux nombres, à savoir $2^{32} + 1$.

Solution de l'exercice 39 a) Il est clair que p n'apparaît pas au dénominateur de S_{p-1} que l'on notera : $\frac{c}{b}$, car les dénominateurs des termes additionnés, tous strictement plus petits que p , sont tous premiers avec p . Donc $S_p = \frac{c}{b} + \frac{1}{p} = \frac{cp+b}{bp}$, et comme b n'est pas multiple de p , cette fraction ne peut pas se simplifier par p , son dénominateur est obligatoirement multiple de p .

b) Avec la notation précédente, $a - b = cp$ est au moins multiple de p . c est le numérateur de S_{p-1} . Or pour p premier impair, on peut regrouper deux par deux les termes de $S_{p-1} = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{p-1}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{p-2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{p-k}\right) + \dots = \left(\frac{p}{1 \times (p-1)}\right) + \left(\frac{p}{2 \times (p-2)}\right) + \dots + \left(\frac{p}{k \times (p-k)}\right) + \dots = p \times \left(\frac{1}{1(p-1)} + \dots + \frac{1}{k(p-k)} + \dots\right)$. Donc S_{p-1} a un numérateur divisible par p , ce qui signifie que $a - b$ est divisible par p^2 .

A partir de $p = 5$, $a - b$ est même divisible par p^3 . Pour le prouver, il faut montrer que le numérateur de $\left(\frac{1}{1(p-1)} + \dots + \frac{1}{k(p-k)} + \dots\right)$ est lui aussi multiple de p . Soit D le dénominateur commun de cette somme : D est premier avec p . Pour tout k compris entre 1 et $p - 1$, il existe un et un seul i_k tel que $k \times i_k \equiv 1 \pmod{p}$. Après réduction au même dénominateur D , le numérateur de $\frac{1}{k(p-k)}$ vaut : $\frac{D}{k(p-k)} \equiv -Di_k^2 \pmod{p}$ car $k(p-k)i_k^2 \equiv -1 \pmod{p}$. La somme des numérateurs est donc congrue, modulo p , à : $-D \sum i_k^2$, et la somme $\sum i_k^2$ des résidus quadratiques est divisible par p dès lors que $p \geq 5$. En effet, on remarque que les i_k constituent une permutation des entiers de 1 à $p - 1$, car chacun de ces entiers y apparaît une et une seule fois : à deux k distincts correspondent deux i_k distincts. Qui plus est, si l'on multiplie par un même j^2 tous ces résidus, on obtient les mêmes résidus à nouveau permutés, car $j^2 i_k^2 = (ji_k)^2$ est un résidu et à deux i_k distincts correspondent deux ji_k distincts modulo p . Donc $\sum i_k^2 = j^2 \sum i_k^2$. Dès lors qu'il existe un $j \not\equiv 0 \pmod{p}$ vérifiant $j^2 \not\equiv 1 \pmod{p}$, cela suffit à prouver que $\sum i_k^2 \equiv 0 \pmod{p}$. Mais cela exclut $p = 2$ et $p = 3$.

Solution de l'exercice 40 La méthode qui s'impose est la démonstration par récurrence sur n , en explicitant les ensembles A_n et B_n pour chaque n . On supposera donc que pour un n donné, il existe deux ensembles A_n et B_n ayant le même nombre d'éléments, vérifiant pour tout k compris entre 1 et $n - 1$, $\sum_{a_i \in A_n} (a_i)^k = \sum_{b_i \in B_n} (b_i)^k$. C'est vrai pour $n = 2$: il suffit de poser $A_2 = \{1, 4\}$ et $B_2 = \{2, 3\}$, car $1 + 4 = 2 + 3$. Construisons $A_{n+1} = A_n \cup (B_n + 2^n)$ et $B_{n+1} = (A_n + 2^n) \cup B_n$, $A_n + 2^n$ désignant l'ensemble obtenu en ajoutant 2^n à chaque élément de A_n . Par exemple, $A_3 = \{1, 4\} \cup \{6, 7\}$ et $B_3 = \{5, 8\} \cup \{2, 3\}$. Il est clair que si A_n et B_n ont chacun 2^{n-1} éléments, et si leur réunion vaut $\{1, 2, \dots, 2^n\}$, A_{n+1} et B_{n+1} ont chacun 2^n éléments et leur réunion vaut $\{1, 2, \dots, 2^{n+1}\}$. En outre, la somme des puissances k -ièmes des éléments de A_{n+1} vaut : $\sum a_i^k + \sum (2^n + b_i)^k = \sum a_i^k + \sum b_i^k + k \cdot 2^n \sum b_i^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} 2^{2n} \sum b_i^{k-2} + \dots$. Si pour $k = 1, 2, \dots, n - 1$ $\sum a_i^k = \sum b_i^k$, cette somme est manifestement égale, pour $k = 1, 2, \dots, n$, à la somme des puissances k -ièmes des

éléments de B_{n+1} . On gagne une valeur de k car pour l'exposant k , le terme $\Sigma a_i^k + \Sigma b_i^k$ est identique dans les deux sommes sans aucune hypothèse.

Solution de l'exercice 41 Si $ab^2 + b + 7$ divise $a^2 + a + b$, il divise également $a(ab^2 + b + 7) - b(a^2b + a + b) = 7a - b^2$. Donc $|7a - b^2| \geq ab^2 + b + 7$

Soit $7a < b^2$, ce qui entraîne $|7a - b^2| < b^2$ alors que $ab^2 + b + 7$ ne peut pas être inférieur à b^2 puisque, par hypothèse, a est non nul : pas de solution.

Soit $7a = b^2$, donc b est multiple de 7 : si l'on pose $b = 7k$, on voit que tous les couples $(7k^2, 7k)$ sont solutions.

Soit $7a > b^2$. $ab^2 + b + 7 < 7a$ n'est possible que si $b^2 < 7$, d'où deux possibilités :

$b = 1$, et $a + 8$ doit diviser $7a - 1$, donc $(7a - 1) - 7(a + 8) = -57 = -3 \times 19$, soit $a + 8 = 19$ ou $a + 8 = 57$: on vérifie que les couples $(11, 1)$ et $(49, 1)$ sont tous deux solutions du problème initial.

$b = 2$, et $4a + 9$ doit diviser $7a - 4$, donc $4(7a - 4) - 7(4a + 9) = -79$. Comme 79 est un nombre premier, on doit avoir $4a + 9 = 79$, ce qui n'a pas de solution entière.

Les seules solutions du problème sont donc les couples $(11, 1)$, $(49, 1)$ et $(7k^2, 7k)$ pour tout entier $k \geq 1$.

Solution de l'exercice 42 Cherchons les nombres premiers qui ne divisent aucun des $2^n + 3^n + 6^n - 1$ pour n entier naturel.

2 n'en fait pas partie, car il divise $2 + 3 + 6 - 1$ (et même $2^0 + 3^0 + 6^0 - 1$).

3 non plus, car il divise $2^2 - 1$, donc également $2^2 + 3^2 + 6^2 - 1$.

Soit $p \geq 5$ premier. 2, 3 et 6 étant premiers avec p , $2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 6^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
 $6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1) = (3 \times 2^{p-1}) + (2 \times 3^{p-1}) + 6^{p-1} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0 \pmod{p}$.
 Donc p divise $6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1)$, et comme p est premier avec 6, p divise $2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1$.

Il n'existe pas de nombre premier qui ne divise aucun des $2^n + 3^n + 6^n - 1$, donc le seul entier qui soit premier avec tous les nombres de cette forme est 1.

Remarque : on peut même écrire $2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2} - 1 \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, ce qui rend la démonstration moins artificielle. Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on peut calculer $\frac{a}{b}$: c'est l'élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui, multiplié par b , est congru à a , et l'addition de telles "fractions" peut se faire de la même manière que dans l'ensemble \mathbb{Q} des rationnels. La méthode proposée plus haut revient à additionner les numérateurs de ces "fractions".

VII. Les TND

Les exercices suivants sont classés par thème, et par ordre de difficulté croissante.



1 Exercices d'acclimatation non corrigés

Exercice 1 Est-ce qu'une table 75×75 peut être pavée par des dominos (rectangles 1×2) et des croix (figures constituées d'un carreau et de ses quatre voisins) ?

Exercice 2 Soit $ABCDE$ un pentagone régulier tel que l'aire de l'étoile $ACEBD$ est 1. Soit P le point d'intersection de (AC) and (BE) , et soit Q le point d'intersection de (BD) et (CE) . Déterminer l'aire de $APQD$.

Exercice 3 Montrez qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ telle que $f(x + f(y)) = f(x) - y$ pour tous entiers x et y .

Exercice 4 Soit $n > 1$ un nombre entier. On dénote par $\sigma(n)$ et $\tau(n)$ la somme et le nombre de diviseurs de n (y compris 1 et n) respectivement. Montrez que les inégalités suivantes

$$\tau(n) \cdot \sqrt{n} < \sigma(n) < \sqrt{2\tau(n)} \cdot n$$

sont satisfaites pour tout $n > 1$.

Exercice 5 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle et soit X l'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$. Les perpendiculaires abaissées de X sur chacun des côtés rencontrent les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ respectivement aux points A' , B' , C' et D' . Démontrer que

$$|A'B'| + |C'D'| = |A'D'| + |B'C'|.$$

($|A'B'|$ est la longueur du segment $A'B'$, etc.)

Exercice 6 $2n + 1$ segments sont placés sur une droite. Chaque segment intersecte au moins n autres segments. Prouvez que l'un des segments intersecte tous les autres.

Exercice 7 Soient x_1, x_2, \dots et y_1, y_2, \dots deux suites définies de manière récursive :

$$x_1 = y_1 = \sqrt{3}, \quad x_{n+1} = x_n + \sqrt{1 + x_n^2}, \quad y_{n+1} = \frac{y_n}{1 + \sqrt{1 + y_n^2}}$$

pour tout $n \geq 1$. Prouver que $2 < x_n y_n < 3$ pour tout $n > 1$.

Exercice 8 Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus et soit H son orthocentre. Les tangentes au cercle de diamètre BC issues du point A touchent le cercle aux points P et Q . Montrez que P, Q et H sont colinéaires.

Exercice 9 Dans une classe chaque garçon est ami avec au moins une fille. Montrez qu'il existe un groupe constitué d'au moins une moitié d'élèves tel que chaque garçon dans ce groupe est ami avec un nombre impair de filles.

Exercice 10 Est-ce qu'il existe trois entiers $a, b, c > 1$ premiers entre eux tels que b divise $2^a + 1$, c divise $2^b + 1$ et a divise $2^c + 1$?

2 Les énoncés

2.1 Stratégies de base

Exercice 1 On considère la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ définie par $a_1 = 1$ et

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n} + \frac{n}{a_n}$$

pour tout entier $n \geq 1$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 4$, on a $[a_n^2] = n$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x).

Exercice 2 Sur un échiquier rectangulaire de taille 5×9 , on joue au jeu suivant. Au départ, un certain de pions sont répartis sur l'échiquier, au plus un par case. Un tour consiste à déplacer tous les pions selon les règles suivantes :

(i) chaque pion peut-être déplacé soit d'une case vers la gauche, vers la droite, vers le haut ou vers le bas

(ii) si un pion a été déplacé horizontalement au tour précédent, il doit être déplacé verticalement ce tour-ci et vice versa

(iii) à la fin de tous les déplacements, aucune case ne doit contenir plusieurs pions.

Le jeu s'arrête s'il devient impossible de déplacer les pions en respectant les règles précédentes. Montrer que s'il y a 33 pions, le jeu s'arrête forcément au bout d'un nombre fini de tours, alors que ce n'est pas le cas s'il n'y en a que 32.

2.2 Arithmétique

Test, durée : 3h

Exercice 3 Trouver toutes les solutions de l'équation :

$$2^x + 3^y = z^2,$$

où x, y, z sont des entiers naturels.

Exercice 4

1. Trouver tous les entiers naturels non nuls n tels que :

$$(n - 1)! + 1 = n^2.$$

2. Trouver tous les nombres premiers p tels qu'il existe un entier naturel m de sorte que :

$$(p - 1)! + 1 = p^m.$$

Exercice 5 Montrer que pour tout entier $n > 0$ le nombre :

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} (2^n - 2^k)$$

est divisible par $n!$.

Fin



Résultats applaudis de la chasse au trésor !

Chasse au trésor, durée 4h

Principe : 9 énigmes étaient cachées dans le domaine du château de Grésillon (forêt et bâtiments). A l'aide d'un plan, il s'agissait de trouver toutes les énigmes pour résoudre tous les exercices le plus rapidement possible avec réponse et démonstrations correctes. Ramener une énigme et y répondre donnait droit à l'énoncé d'un exercice. La solution de l'exercice donnait un nombre correspondant aux coordonnées de l'emplacement de l'énigme suivante. Ainsi de suite !

Énigme numéro 1. Qui a réussi à démontrer le grand théorème de Fermat ?

Exercice 6 Xavier a caché quelques entiers distincts. Il n'accepte de donner que leurs sommes deux à deux : 17, 20, 28, 14, 42, 36, 28, 39, 25 et 31. Retrouvez-les, puis allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant aux trois premiers chiffres du produit de ces nombres ?

Énigme numéro 2. Qui a énoncé la conjecture suivante : « Tout objet de dim n qui a les mêmes caractéristiques qu'une sphère est une sphère » ?

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction suivante :

$$f(n) = \frac{\sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{i}}{\sum_{i=0}^n \binom{n}{k}^{-1}}.$$

Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant aux deux derniers chiffres de la partie entière de $f(31)$.

Énigme numéro 3. Citer un nom de mathématicien médaillé Fields encore en activité.

Exercice 8 Les longueurs des deux côtés adjacents et de la diagonale d'un rectangle sont des entiers. Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant à l'aire minimale d'un tel rectangle.

Énigme numéro 4. Quelle est la périodicité de nomination pour la médaille Fields ?

Exercice 9 Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant aux trois premiers chiffres de la plus grande valeur possible de $p^2 + q^2$ où p, q sont des nombres premiers tels que :

$$\alpha^{3pq} \equiv \alpha \pmod{3pq}$$

pour tout entier naturel α .

Énigme numéro 5. Citer un des « pères » de l'ordinateur.

Exercice 10 Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant aux trois derniers chiffres de la plus grande valeur entière que peut prendre l'expression

$$\frac{29 \div 28 \div 27 \div \dots \div 16}{15 \div 14 \div 13 \div \dots \div 2}$$

lorsqu'on place des parenthèses de la même façon au numérateur qu'au dénominateur.

Énigme numéro 6. Quel est l'âge limite pour être médaillé Fields ?

Exercice 11 Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant à la somme des $x^4 + y^4$, où x, y sont des entiers relatifs satisfaisant à :

$$x^6 + x^3y = y^3 + 2y^2.$$

Énigme numéro 7. Donner un exemple d'application des mathématiques ?

Exercice 12 L'entier A possède la propriété suivante : l'écriture décimale de la somme des entiers compris au sens large entre 1 et A est égale à celle de A à laquelle on concatène trois autres chiffres. Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant aux trois premiers chiffres de A .

Énigme numéro 8. De quelle nationalité est le mathématicien Ramanudjan ?

Exercice 13 Soit P^* l'ensemble des nombres premiers plus petits que 10000. Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant au plus grand $p \in P^*$ modulo 825 pour lequel la propriété suivante est vérifiée :

Pour tout sous-ensemble S de P^* de cardinal au moins 2 et ne contenant pas p , il existe $q \in P^* \setminus S$ tel que :

$$q + 1 \mid \prod_{s \in S} (s + 1).$$

Énigme numéro 9. Citer une mathématicienne.

Exercice 14 Allez chercher une nouvelle énigme aux coordonnées correspondant au trois premiers chiffres du nombre de quadruplets d'entiers (x, y, z, w) compris au sens large entre 0 et 36 tels que :

$$x^2 + y^2 \equiv z^3 + w^3 \pmod{37}.$$

Fin

2.3 Géométrie

3 Les solutions

3.1 Stratégies de base

Solution de l'exercice 1 Posons $u_n = a_n^2$. On a $u_{n+1} = \frac{u_n}{n^2} + \frac{n^2}{u_n} + 2 = f_n(u_n)$. Remarquons tout de suite que la fonction f_n est décroissante sur l'intervalle $]0, n^2]$.

Soit $n \geq 5$. Nous allons montrer que de $u_{n-1} < n$, on peut déduire $u_n > n$ et $u_{n+1} < n + 2$. La première assertion résulte de

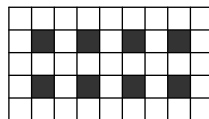
$$u_n = f_{n-1}(u_{n-1}) \geq f_{n-1}(n) = \frac{n}{(n-1)^2} + \frac{(n-1)^2}{n} + 2 > \frac{1}{n} + n - 2 + \frac{1}{n} + 2 = n + \frac{2}{n}$$

d'où il suit directement $u_n > n$ comme voulu. Maintenant, en reprenant $u_n > n + \frac{1}{n}$, on obtient

$$u_{n+1} = f_n(u_n) \leq f_n\left(n + \frac{2}{n}\right) = \frac{n^3}{n^2 + 2} + \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3} + 2 = n + 2 - \frac{n^2 - 2}{n(n^2 + 2)} + \frac{2}{n^3} < n + 2 + \frac{n^2}{n^3} < n + 2.$$

On vérifie par le calcul que $[u_4] = 4$ et $[u_5] = 5$. Une récurrence à partir de l'implication que l'on vient de prouver montre que $u_n < n + 1$ pour tout $n \geq 4$. Une nouvelle utilisation de l'implication entraîne alors $u_n > n$ pour tout $n \geq 5$, d'où il suit $[u_n] = n$ pour tout $n \geq 5$.

Solution de l'exercice 2 Si l'on noircit certaines cases de l'échiquier comme suit



on se rend compte que, tant que le jeu se poursuit, chaque pion passe exactement un tour sur quatre sur une case noircie. Ainsi, il ne peut pas y avoir plus de quatre fois plus de pions qu'il n'y a de cases. On compte : il y a 8 cases, donc au maximum 32 pions.

Pour 32 pions, une solution consiste à les placer initialement dans le rectangle 4×8 en haut à gauche, puis à déplacer tous les pions d'abord vers la droite, puis vers le bas, puis vers la gauche, puis vers le haut, et ainsi de suite.

3.2 Arithmétique

Solution de l'exercice 3 Soit (x, y, z) une solution. Traitons d'abord le cas $y = 0$. Alors :

$$2^x = z^2 - 1 = (z - 1)(z + 1).$$

Cela implique que $z - 1$ et $z + 1$ sont tous les deux des puissances de 2. Or les seules puissances de 2 de différence égale à deux sont 4 et 2. Donc $z = 3$, puis $x = 3$. Réciproquement, $(3, 0, 3)$ est bien une solution.

Le cas où $x = 0$ se traite de la même manière et fournit la solution $(0, 1, 2)$.

Supposons dorénavant que $x > 0$ et $y > 0$. En regardant modulo 3 l'équation, il vient que x est pair car il n'existe pas de carré congru à 2 modulo 3. Écrivons $x = 2x'$, de sorte que :

$$3^y = z^2 - 2^{2x'} = (z - 2^{x'})(z + 2^{x'}).$$

Il existe donc deux entiers $a \leq b$ de somme y tels que $z - 2^{x'} = 3^a$ et $z + 2^{x'} = 3^b$. En ré-injectant la première de ces égalités dans l'identité initiale, il vient :

$$2^{2x'} + 3^{a+b} = (3^a + 2^{x'})^2,$$

ou encore, après simplifications :

$$3^b = 3^a + 2^{x'+1}.$$

Modulo 3, ceci fournit $a = 0$. Ensuite, comme $x' \geq 1$, modulo 4 cela entraîne que b est pair. Écrivons donc $b = 2b'$:

$$2^{x'+1} = 3^{2b'} - 1 = (3^{b'} - 1)(3^{b'} + 1).$$

Comme précédemment, on en tire $b' = 1$. Finalement, $b = 2$, $y = 2$; $x' = 2$, $x = 4$; $z = 5$. Réciproquement, $(4, 2, 5)$ est bien solution.

En conclusion, les seules solutions sont $(3, 0, 3)$, $(0, 1, 2)$ et $(4, 2, 5)$.

Solution de l'exercice 4

1. Pour $n \geq 2$ l'équation est équivalente à :

$$(n - 2)! = n + 1.$$

Parmi les entiers $n \leq 6$, on vérifie par le calcul que seul $n = 5$ est solution. Il semblerait que $(n - 2)!$ croisse beaucoup plus vite que $n + 1$, ce que nous allons maintenant démontrer. Soit P_n la proposition :

$$\ll (n - 2)! > n + 1 \gg.$$

Montrons par récurrence sur l'entier n que P_n est vraie pour $n \geq 6$.

- (i) (Initialisation) Nous avons vu que P_6 est vérifiée.
- (ii) (Hérédité) Soit $n \geq 6$. Supposons que P_n est vraie et montrons P_{n+1} . D'après l'hypothèse de récurrence :

$$(n - 1)! = (n - 1)(n - 2)! \geq (n - 1)(n + 1)$$

Il suffit donc de montrer que $(n - 1)(n + 1) \geq (n + 2)$, ou encore que

$$(n - 1/2)^2 - 13/4 = n^2 - n - 3 \geq 0,$$

ce qui est vérifié pour $n \geq 6$.

2. Il est clair que $p = 2$, $p = 3$ et $p = 5$ conviennent (prendre $m = 1$, $m = 1$ et $m = 2$). Supposons donc que $p \geq 5$ soit un nombre premier impair vérifiant les conditions de l'énoncé. Ainsi :

$$(p-2)! = p^{m-1} + \dots + p + 1.$$

Comme $p > 5$ est impair, le terme de droite est divisible par $p-1$. De plus, chaque terme intervenant dans la somme de droite est congru à 1 modulo $p-1$. Modulo $p-1$, cette égalité entraîne que $p-1$ divise m et donc que $m \geq p-1$. En définitive :

$$p^m \geq p^{p-1} > (p-1)^{p-1} > (p-1)!,$$

ce qui est absurde. Ainsi, seuls $p = 2, 3, 5$ conviennent.

Solution de l'exercice 5 On vérifie que $2!$ divise $A_2 = 6$. Supposons donc $n \geq 3$. Soit p un nombre premier divisant n . Nous allons montrer que la valuation p -adique $v_p(n!)$ est inférieure à $v_p(A_n)$.

D'une part, d'après la formule de Legendre, pour tout entier k :

$$\begin{aligned} v_p(n!) &\leq \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{p^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor. \\ &\leq \frac{n}{p} + \dots + \frac{n}{p^2} + \dots + \frac{n}{p^k} \\ &= \frac{n}{p} \cdot \frac{1 - \frac{1}{p^k}}{1 - \frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{n}{p} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} \\ &\leq \frac{n}{p-1}. \end{aligned}$$

Ainsi, $v_p(n!) \leq \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor$.

Traisons d'abord le cas $p = 2$ à part. Comme :

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} 2^k \prod_{k=0}^{n-1} (2^{n-k} - 1),$$

on a $v_2(A_n) = 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$. Or pour $n \geq 3$, on a :

$$v_2(n!) \leq n \leq \frac{n(n-1)}{2} = v_2(A_n),$$

d'où le résultat.

Ensuite, dans le cas général, écrivons :

$$A_n = \prod_{k=0}^{n-1} 2^k \prod_{k=1}^n (2^{n-k} - 1).$$

D'après le petit théorème de Fermat, p divise $2^{(p-1)} - 1$, et donc $2^{k(p-1)} - 1$ pour tout entier $k > 0$. Or le nombre d'entiers $k > 0$ tels que $k(p-1) \leq n$ est exactement égal à $\left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor$. Nous venons donc d'obtenir que :

$$v_p(n!) \leq \left\lfloor \frac{n}{p-1} \right\rfloor \leq v_p(A_n),$$

ce qui conclut la résolution de l'exercice.

Fin

Solution de la chasse au trésor

Solution de l'énigme 1 : Andrew Wiles.

Solution de l'exercice 6 Soient $a > b > c > d > e$ les cinq nombres cachés. Dans la liste des sommes deux à deux, ils interviennent chacun 4 fois, d'où, en sommant :

$$a + b + c + d + e = \frac{17 + 20 + 28 + 14 + 42 + 36 + 28 + 39 + 25 + 31}{4} = 70.$$

D'autre part, $a + b = 42$ et $d + e = 14$, donc $c = 70 - 42 - 14 = 14$. De plus, $a + c$ est la deuxième plus grande somme, donc $a = 39 - 14 = 25$, et de même $e = 17 - 14 = 3$. Mais alors $b = 42 - 25 = 17$ et $d = 14 - 3 = 11$. Réciproquement, on vérifie facilement que ces nombres donnent bien les sommes annoncées.

Solution de l'énigme 2 : Henri Poincaré.

Solution de l'exercice 7 Le calcul des petites valeurs de $f(n)$ nous permet de conjecturer que $f(n) = \frac{2^n}{n+1}$. Notons ainsi :

$$S_n = \frac{n+1}{2^{n+1}} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{2^i}{i}, \quad T_n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^{-1}.$$

On vérifie que S_n satisfait à la relation de récurrence :

$$2(n+1)S_{n+1} = (n+2)S_n + 2(n+1).$$

Comme $S_1 = T_1 = 2$, il suffit donc de montrer que T_n vérifie la même relation de récurrence. Or :

$$\begin{aligned} 2(n+1)T_{n+1} - (n+2)T_n - 2(n+1) &= (2n+2) \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i}^{-1} - (n+1) \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^{-1} - (2n+2) \\ &= (2n+2) + \sum_{i=0}^n \left(\frac{2(i)!(n+1-i)!}{n!} - (n+2) \frac{i!(n-i)!}{n!} \right) - (2n+2) \\ &= \sum_{i=0}^n \frac{i!(n-i)!}{n!} (n-2i) = \sum_{i'=0}^n \frac{i'!(n-i')!}{n!} (2i' - n). \end{aligned}$$

Cette somme est égale à son opposée et est donc nulle.

Solution de l'énigme 3 : Terence Tao, Pierre-Louis Lions, Alain Connes, Jean-Christophe Yoccoz, etc.

Solution de l'exercice 8 Soit a la longueur du rectangle, b sa largeur et c la longueur de ses diagonales. Le triplet d'entiers (a, b, c) vérifie donc $a^2 + b^2 = c^2$, autrement dit est pythagoricien. Il existe donc des entiers p, q, k avec p, q premiers entre eux tels que :

$$a = k(p^2 - q^2), \quad b = 2kpq, \quad c = k(p^2 + q^2).$$

L'aire d'un tel rectangle est alors $2k^2(p-q)(p+q)pq$, qui est minimale pour $k = 1, p = 2$ et $q = 1$. La réponse cherchée vaut donc 12.

Solution de l'énigme 4 : 4 ans.

Solution de l'exercice 9 Par symétrie des rôles, on peut supposer $p \leq q$. On a $2^{3pq} \equiv 2 \pmod{3}$, ce qui implique que p et q sont impairs (sinon 2^{3pq} serait congru à 1). Comme q est premier, on a $x^{3pq-1} \equiv 1 \pmod{q}$. Rappelons le résultat suivant¹ : il existe un entier x tel que pour tout n , on ait :

$$x^n \equiv 1 \pmod{q} \iff n \text{ est multiple de } q-1.$$

D'après ce résultat et la congruence précédente, on déduit que $q-1$ divise $3pq-1$. En outre, $3pq-1-3p(q-1) = 3p-1$, donc $q-1$ divise $3p-1$, et de même, $p-1$ divise $3q-1$. Supposons que $p = q$. Dans ce cas, $p-1$ divise $3p-1$, or $3p-1-3(p-1) = 2$ donc $p-1$ divise 2, d'où $p = q = 3$. Mais $4^{27} \equiv 1 \pmod{27}$, donc (3, 3) n'est pas solution. On a alors $p \neq q$.

Quitte à échanger p et q , on peut supposer $p < q$. Alors, comme p et q sont impairs, on a $q \geq p+2$, et donc l'entier $\frac{3p-1}{q-1}$ est strictement inférieur à 3. De plus, il est clairement différent de 1, et est donc égal à 2, c'est-à-dire que $2q = 3p+1$. Or, $p-1$ divise $3q-1$, donc aussi $6q-2 = 9p+1$ puis $(9p+1) - 9(p-1) = 10$. Il reste les deux possibilités (3, 5) et (11, 17). Mais $3^{45} \equiv 0 \pmod{45}$ donc (3, 5) n'est pas solution du problème.

Enfin, montrons que (11, 17) est solution. D'après le théorème chinois, il suffit de démontrer que $x^{3 \times 11 \times 17} \equiv x \pmod{3}$, $x^{3 \times 11 \times 17} \equiv x \pmod{11}$ et $x^{3 \times 11 \times 17} \equiv x \pmod{17}$. On a $3 \times 11 \times 17 \equiv 1 \pmod{2}$; pour $x \not\equiv 0 \pmod{3}$, on a $x^2 \equiv 1 \pmod{3}$ donc $x^{3 \times 11 \times 17} \equiv x \pmod{3}$, et ceci est encore vrai pour $x \equiv 0 \pmod{3}$. De même, on a $3 \times 11 \times 17 \equiv 1 \pmod{10}$, $x^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ pour $x \not\equiv 0 \pmod{11}$, donc $x^{3 \times 11 \times 17} \equiv x \pmod{11}$ et $3 \times 11 \times 17 \equiv 1 \pmod{16}$, $x^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ pour $x \not\equiv 0 \pmod{17}$, donc $x^{3 \times 11 \times 17} \equiv x \pmod{17}$, ce qui conclut : les solutions sont les couples (11, 17) et (17, 11).

Le maximum demandé est donc $11^2 + 17^2 = 410$.

Remarque. Les entiers n composés vérifiant $x^n \equiv x \pmod{n}$ pour tout x sont appelés les nombres de Carmichael. Celui de l'exercice $3 \times 11 \times 17 = 561$ est le plus petit et le plus connu, et comme on vient de le montrer c'est le seul de la forme $3pq$ avec p et q premiers. On sait aujourd'hui qu'il existe une infinité de nombres de Carmichael.

Solution de l'énigme 5 : Turing, Von Neumann.

Solution de l'exercice 10 Une fois parenthésée, l'expression s'écrit

$$x = \left(\frac{29}{15}\right)^{\varepsilon_1} \left(\frac{28}{14}\right)^{\varepsilon_2} \left(\frac{27}{13}\right)^{\varepsilon_3} \cdots \left(\frac{16}{2}\right)^{\varepsilon_{14}}$$

où les ε_i valent 1 ou -1 et même $\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = -1$. Comme les fractions $\frac{27}{13}, \dots, \frac{16}{2}$ sont toutes plus grandes que 1, on a nécessairement

$$x \leq \left(\frac{29}{15}\right) \left(\frac{14}{28}\right)^{\varepsilon_2} \left(\frac{27}{13}\right)^{\varepsilon_3} \cdots \left(\frac{16}{2}\right)^{\varepsilon_{14}} = 1\,292\,646.$$

Par ailleurs, comme le résultat de l'opération donne un entier, cette borne supérieure est atteinte. La réponse est donc 1 292 646.

Solution de l'énigme 6 : 40 ans.

Solution de l'exercice 11 Montrons que les seules solutions sont (0, 0), (0, -2) et (2, 4). Si $x = 0$, on démontre facilement que $y = 0$ ou $y = -2$. De même, si $y = 0$, il vient $x = 0$. Supposons à partir de maintenant que ni x ni y n'est nul.

1. On dit alors que x est d'ordre $q-1$. Le fait qu'un tel x existe n'est pas une évidence, mais c'est malgré tout un résultat à connaître.

Soit p un nombre premier divisant y . Supposons dans un premier temps $p > 2$. En réécrivant l'équation sous la forme $x^3(x^3 + y) = y^2(y + 2)$ puis en prenant les valuations p -adiques de deux côtés, on obtient

$$3v_p(x) + v_p(x^3 + y) = 2v_p(y). \quad (\text{VII.1})$$

puisque p ne divise pas $y + 2$ (sinon il diviserait 2). Si $3v_p(x) < v_p(y)$, on aurait $v_p(x^3 + y) = 3v_p(x)$, puis $3v_p(x) = v_p(y)$ en reportant dans VII.1. C'est une contradiction. De même si $3v_p(x) > v_p(y)$, il suit $v_p(x^3 + y) = v_p(y)$ puis $3v_p(x) = v_p(y)$, c'est-à-dire encore une contradiction. On en déduit que, nécessairement, $3v_p(x) = v_p(y)$. Si $p = 2$ et $v_2(y) > 1$, un raisonnement analogue conduit encore à $3v_2(x) = v_2(y)$. On déduit de tout cela qu'il existe des entiers a et b tels que le couple (x, y) soit de l'un des trois formes suivantes : $(ab, 2b^3)$, (ab, b^3) , $(ab, \frac{b^3}{2})$.

On reporte maintenant chacune des formes précédentes dans l'équation de départ. Dans le premier cas, on obtient $a^6 + 2a^3 = 8b^3 + 8$. Si $a > 1$, alors $(a^2 + 1)^3 > (2b)^3 > (a^2)^3$ et donc l'équation n'a pas de solution. De même, si $a < -2$, on a $(a^2)^3 > (2b)^3 > (a^2 - 1)^3$ et il n'y a à nouveau pas de solution. Enfin, on traite les cas $a = -2, -1, 0$ à la main et on ne trouve pas non plus de solution.

Les deuxième et troisième cas se traitent de façon analogue : pour le deuxième cas, on ne trouve encore pas de solution tandis que pour le troisième, on obtient la seule solution $(2, 4)$.

Solution de l'énigme 7 : Cryptographie, biologie, etc

Solution de l'exercice 12 Traduit sous forme mathématique, l'énoncé dit qu'il existe un entier B tel que $0 \leq B < 1000$ et

$$1 + 2 + \dots + A = \frac{A(A + 1)}{2} = 1000A + B.$$

La dernière égalité se réécrit $A(A - 1999) = 2B$. La contrainte d'inégalité sur B montre que la seule solution est $A = 1999$.

Solution de l'énigme 8 : Indien.

Solution de l'exercice 13 Nous allons montrer que p vérifie la propriété si, et seulement si, il est de la forme $M_n = 2^n - 1$: on dit alors que p est un *nombre premier de Mersenne*. Notons T l'ensemble des nombres premiers de Mersenne dans P^* ; un calcul direct montre que $T = \{3, 7, 31, 127, 8191\}$.

Supposons d'abord que p n'est pas un nombre premier de Mersenne. Nous allons montrer que p ne vérifie pas la propriété de l'énoncé pour l'ensemble T . En effet, il est clair que le produit des $s + 1$ pour s parcourant T est une puissance de 2 et donc il n'y a aucun $q \in P^* \setminus T$ tel que $q + 1$ divise ce produit.

Réciproquement, supposons que p appartienne à T . Soit $S \subset P^*$ de cardinal au moins 2 ne contenant par p . Notons $p_1 < \dots < p_k$ les éléments de S . On a $k \geq 2$. Raisonnons par l'absurde en supposant que pour tout $q \in P^*$, on a

$$(q + 1) \mid (p_1 + 1) \cdots (p_k + 1) \implies q \in S.$$

Comme 4 divise $(p_1 + 1)(p_2 + 1)$, on a nécessairement $M_2 \in S$, puis successivement

- comme 8 divise $(M_2 + 1)(p_2 + 1)$, on déduit $M_3 \in S$;
- comme 32 divise $(M_2 + 1)(p_2 + 1)$, on déduit $M_5 \in S$;
- comme 128 divise $(M_2 + 1)(p_2 + 1)$, on déduit $M_7 \in S$;
- comme 8192 divise $(M_2 + 1)(p_2 + 1)$, on déduit $M_{13} \in S$.

Ainsi, puisque $p \in T = \{M_2, M_3, M_5, M_7, M_{13}\}$, on doit avoir $p \in S$. C'est une contradiction, d'où résulte la réciproque.

Au final, le plus grand p convenable est 8191 et la réponse à la question est $8191 \pmod{825} = 766$.

Solution de l'énigme 9 : Sophie Germain, Sophia Kowaleskaia.

Solution de l'exercice 14 On va raisonner en fixant le couple (z, w) , et en comptant le nombre de couples (x, y) qui conviennent. Soit $k = z^3 + w^3$.

Si $k \equiv 0 \pmod{37}$, on doit dénombrer les couples (x, y) modulo 37 tels que $x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod{37}$. On écrit :

$$x^2 \equiv -y^2 \equiv 36y^2 = (6y)^2 \pmod{37}$$

de sorte que 37 divise $(x - 6y)(x + 6y)$, donc divise l'un des deux facteurs, d'où $x \equiv \pm 6y \pmod{37}$. Or $6y$ et $-6y$ sont distincts modulo 37 si et seulement si $y \neq 0$, donc on trouve en tout $1 + 2 \times 36 = 73$ solutions.

Si à l'inverse $k \not\equiv 0 \pmod{37}$, on est conduit à résoudre :

$$(x - 6y)(x + 6y) \equiv k \pmod{37} \quad (\text{VII.2})$$

On pose alors $a = x - 6y$, $b = x + 6y$. Notons qu'alors, $2x \equiv a + b \pmod{37}$, et donc $x \equiv 19 \cdot (2x) \equiv 19(a + b) \pmod{37}$. De la même manière, $y \equiv -3 \cdot 12y \equiv -3(b - a) \pmod{37}$. Ainsi, le nombre de couples (x, y) modulo 37 vérifiant (VII.2) est exactement le nombre de couple (a, b) modulo 37 vérifiant $ab \equiv k \pmod{37}$. Cela impose a et b non nuls modulo 37, et réciproquement, pour chaque a donné non divisible par 37, il existe un entier b , unique modulo 37, tel que $ab \equiv k \pmod{37}$.² Donc il y a exactement 36 couples (x, y) solutions.

Reste à déterminer le nombre de couples (z, w) tels que $k = z^3 + w^3 \equiv 0 \pmod{37}$. Si $w = 0$, la seule solution est $z = w = 0$. Sinon, on peut écrire $z \equiv tu \pmod{37}$ pour un certain u unique modulo 37, et l'équation devient :

$$u^3 + 1 = (u + 1)(u^2 - u + 1) \equiv 0 \pmod{37}$$

Il vient donc $u \equiv -1 \pmod{37}$ ou bien :

$$\left(u - \frac{1}{2}\right)^2 \equiv -\frac{3}{4} \pmod{37}$$

soit encore :

$$(u - 19)^2 \equiv 27 \equiv 8^2 \pmod{37}$$

(On obtient cette dernière congruence en calculant la table des carrés). Il y a donc en tout trois solutions distinctes à l'équation $u^3 + 1 \equiv 0 \pmod{37}$, soit -1 , 11 et 27. Il en résulte que pour chaque $w \neq 0$, l'équation $z^3 + w^3 \equiv 0 \pmod{37}$ admet trois solutions. Il y a donc en tout $36 \times 3 + 1 = 109$ couples (z, w) pour lesquels $k \equiv 0 \pmod{37}$.

Finalement, on obtient $109 \times 73 + (37^2 - 109) \times 36 = 53\,317$ quadruplets (x, y, z, w) solutions.

Fin

3.3 Géométrie

2. L'existence est une conséquence du théorème de Bézout. En effet, comme a est premier à 37, il existe b et m entiers tels que $ab + 37m = k$. L'unicité résulte de ce que, si $ab \equiv ab' \pmod{37}$, alors 37 divise $a(b - b')$ et pas a , donc $b \equiv b'$.

VIII. Les tests

Les exercices suivants sont classés par thème, et par ordre de difficulté croissante.



1 Les énoncés

1.1 Stratégies de base

Exercice 1 Cet exercice est constitué de deux parties indépendantes.

1. Nier les propositions suivantes :
 - a. Il fait beau et je prends mon parasol.
 - b. L'exposé sera donné par Xavier ou par François.
 - c. Aucun de mes stylos ne fonctionne.
 - d. J'aurai 7/7 à au moins un exercice du test.
2. Soit $F(x)$ une formule mathématique qui dépend de la variable x et G une autre formule mathématique qui ne dépend pas de la variable x . Montrer que les deux formules suivantes sont équivalentes :

$$(P1) \quad \forall x (F(x) \implies G)$$

$$(P2) \quad (\exists x F(x)) \implies G.$$

Exercice 2 Xavier écrit 2009 fois le nombre 1 au tableau. Sandrine a le droit d'effectuer l'opération suivante : remplacer deux de ces nombres (a, b) par les nombres $(a+2b, b+2a)$. Est-ce que Sandrine peut obtenir 2009 fois le nombre 2010 en utilisant uniquement cette opération ?

Exercice 3 Soit n un entier naturel. À un stage de mathématiques, $2n + 1$ élèves se réunissent, chacun étant muni d'un pistolet à eau. On suppose que les distances entre élèves sont deux à deux distinctes. À midi précises, chaque élève tire sur son plus proche voisin. Montrer qu'il existe au moins un élève qui restera sec.

Exercice 4 Soit n un entier naturel. On considère $2n + 1$ nombres entiers relatifs, deux à deux distincts, compris au sens large entre $-2n + 1$ et $2n - 1$. Montrer qu'on peut en choisir trois dont la somme soit nulle.

1.2 Géométrie

Exercice 5 Soient A, B, C trois points fixés sur un cercle K , et soit $P \in K$ un point variable tel que $(PC) \cap (AB)$ soient à l'intérieur de K . Notons I et J les centres des cercles inscrits de PCA et PCB respectivement. Montrer que si le cercle circonscrit de PIJ coupe K en P et Q , alors Q est un point fixe bien que P soit variable.

Exercice 6 Soit ABC un triangle et soit K son cercle circonscrit. Notons I le centre de son cercle inscrit et $(AI) \cap K = \{A, S\}$. Soient E et F les projections orthogonales de I sur (BS) et (CS) , respectivement. On suppose que $IE + IF = \frac{AS}{2}$. Déterminer \widehat{BAC} .

Exercice 7 Soit ABC un triangle et soit P un point de son intérieur. Posons $A_1 = (AP) \cap (BC)$, $B_1 = (BP) \cap (CA)$, $C_1 = (CP) \cap (AB)$. Soient A_2 et C_2 des points de (A_1C_1) tels que (CC_1) coupe $[B_1C_2]$ en son milieu et (AA_1) coupe $[B_1A_2]$ en son milieu. Posons $A_3 = (B_1A_2) \cap (CC_1)$ et $C_3 = (B_1C_2) \cap (AA_1)$. Montrer que $(A_3C_3) \parallel (AC)$.

Exercice 8 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et P un point de son intérieur. Montrer que les symétriques de (PA) , (PB) , (PC) , (PD) par rapport aux bissectrices de $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$ respectivement, sont concourantes si et seulement si $\widehat{APB} + \widehat{CPD} = \widehat{BPC} + \widehat{DPA}$.

Exercice 9 Soient a, b, c trois droites concourantes sur P et soient a', b', c' trois autres droites concourantes en Q . On suppose que a, a', b, b' , forment un quadrilatère circonscriptible et b, b', c, c' forment également un quadrilatère circonscriptible. Montrer que le quadrilatère formé par a, a', c, c' est circonscriptible.

Exercice 10 Soient $A_1A_2A_3A_4A_5$ un pentagone convexe quelconque. $A_1 = A_6, A_2 = A_7, A_3 = A_8, A_4 = A_9$. Pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, soit a_i la droite qui passe par A_i et par $A_{i+1}A_{i+3} \cap A_{i+3}A_{i+4}$. Posons $B_i = a_i \cap A_{i+2}A_{i+3}$.

Montrer que $\frac{|A_1B_4|}{|A_2B_4|} \cdot \frac{|A_2B_5|}{|A_3B_5|} \cdot \frac{|A_3B_1|}{|A_4B_1|} \cdot \frac{|A_4B_2|}{|A_5B_2|} \cdot \frac{|A_5B_3|}{|A_1B_3|} = 1$.

Exercice 11 Soient A, B, C, D trois points fixés sur un cercle K et soit $P \in K$ un point variable. Notons I et J les centres des cercles inscrits de $P \subset A$ et $P \subset B$, respectivement. Soit X le centre du cercle circonscrit de $P \subset J$. Déterminer le lieu des points X .

1.3 Test final

Exercice 12 Trouver tous les entiers $x, y > 0$ tels que :

$$x! + 3 = y^2.$$

Exercice 13 Trouver tous les entiers $a > 0$ tels que

$$\frac{a^2 + 8a + 2}{a^2 + 5a + 5} \text{ est un entier.}$$

2 Les solutions

2.1 Stratégies de base

Solution de l'exercice 1

- Il ne fait pas beau ou je ne prends pas mon parasol
- S'il y a un exposé, il ne sera donné ni par Xavier, ni par François.
- J'ai un stylo qui fonctionne.
- Je n'aurai 7/7 à aucun exercice du test.

Supposons dans un premier temps (P1). On souhaite démontrer (P2) et pour cela, on suppose qu'il existe x_0 tel que $F(x_0)$ et on veut prouver G . Mais, par (P1), on sait que $F(x_0)$ implique G . Ainsi G est vraie comme voulu.

Réciproquement supposons (P2) et considérons un x . On veut montrer que $F(x)$ implique G . Mais si l'on suppose $F(x)$, la prémisse de (P2) est clairement vérifiée. Ainsi la conclusion, c'est-à-dire G , l'est aussi.

Solution de l'exercice 2 On remarque que si a et b sont impairs, il en est de même de $a + 2b$ et $b + 2a$. Comme tous les nombres écrits initialement par Xavier sont impairs (ils sont tous égaux à 1), Sandrine ne pourra écrire que des nombres impairs en utilisant la seule opération qui lui est permise. Ainsi, elle n'arrivera jamais à écrire 2010.

Solution de l'exercice 3 Raisonnons par récurrence sur n . Si $n = 0$, le seul stagiaire reste sec. Supposons le résultat vrai pour $n - 1$ et démontrons-le pour n . Considérons pour une assemblée de $2n + 1$ stagiaires et isolons mentalement parmi eux les deux qui sont les plus proches, disons Sergio et Jean-François. Ceux-là vont clairement s'entre-mouiller à midi. Par ailleurs, d'après l'hypothèse de récurrence, si ni Sergio ni Jean-François n'étaient pas là, il resterait une personne sèche à l'issue des tirs, disons Thomas. Avec les deux stagiaires en plus, les seuls tirs qui pourraient être modifiés atteindraient soit Sergio, soit Jean-François. Ceci prouve que, quoi qu'il arrive, Thomas reste sec.

2.2 Géométrie

Solution de l'exercice 4 ...

Solution de l'exercice 5 ...

Solution de l'exercice 6 ...

Solution de l'exercice 7 ...

Solution de l'exercice 8 ...

Solution de l'exercice 9 ...

Solution de l'exercice 10 ...

Solution de l'exercice 11 ...

2.3 Test final

Solution de l'exercice 12

Cas 1 : $x \geq 4$

On remarque d'abord que 4 divise $x!$ dans ce cas. On trouve donc un nombre entier de la forme $4k + 3$ à gauche. Or, il est bien connu que les carrés ont toujours des restes 0 ou 1 modulo 4. (Soit $n = 2m$ et $n^2 = 4m^2$ avec reste 0, soit $n = 2m + 1$ et $n^2 = 4m^2 + 4m + 1$ avec reste 1.)

Il y a donc aucune solution dans ce cas.

Cas 2 : $x < 4$

Pour $x = 1, 2, 3$ on trouve $x! + 3 = 4, 5, 9$, ce qui donne les deux solutions $(x, y) = (1, 2)$ et $(x, y) = (3, 3)$.

Solution de l'exercice 13 Comme le numérateur et le dénominateur sont des nombres entiers strictement positifs, le quotient noté x l'est aussi.

Cas 1 : $x = 1$ On a $a^2 + 8a + 2 = a^2 + 5a + 5$, donc $3a = 3$ ou $a = 1$.

Cas 2 : $x \geq 2$

On a $a^2 + 8a + 2 \geq 2(a^2 + 5a + 5)$, donc $a^2 + 2a + 8 \leq 0$, ce qui est absurde.

On trouve donc la seule solution $a = 1$.

IX. Les problèmes du jour

Les problèmes du jour étaient proposés le soir après le repas, pour chercher et s’amuser ensemble entre deux parties de volley ou de cartes!

1 Remplissage de verres

On considère un damier rectangulaire sur lequel on a disposé sur chaque case un verre contenant une certaine quantité d’eau. Ni la taille du damier, ni les quantités d’eau ne sont pour l’instant fixées : on entend par là que le problème qui va suivre est posé pour des damiers de n’importe quelle taille, et pour des remplissages arbitraires des verres. Étant donné une telle configuration, on s’autorise à prendre l’un des verres et à verser tout ou partie de son contenu dans le verre immédiatement en-dessous (s’il existe) ou immédiatement à droite (s’il existe).

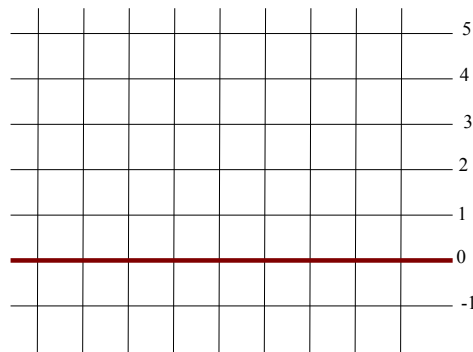
Déterminer les positions initiales pour lesquelles il est possible, après un certain nombre de transvasements licites, de parvenir à une configuration dans laquelle tous les verres sont également remplis.

2 Les pions sauteurs

On a le droit de sauter par dessus un pion en le supprimant (comme au Solitaire) :



Combien de pions faut-il mettre sur les lignes $-1, 0, etc...$ pour pouvoir monter jusqu’aux lignes : $1 ? 2 ? 3 ? 4 ? 5 ? etc ...$



3 Record des permutations

Soit \mathfrak{S}_n l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ sur lui-même. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On dit que l'entier $j \in \{1, \dots, n\}$ est un *record* de σ si pour tout i , $1 \leq i \leq j-1$, on a $\sigma(i) < \sigma(j)$. On note $\text{rec}(\sigma)$ le nombre de records de σ . Soit finalement P_n le polynôme :

$$P_n(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} x^{\text{rec}(\sigma)}.$$

Trouver tous les $x \in \mathbb{R}$ tels que $P_n(x) = 0$.

4 Les solutions

Solution de l'exercice 1 Appelons *diagramme de Young* un ensemble D de cases du damier possédant la propriété suivante : si une case c est dans D , alors il en est de même de la case située immédiatement à droite (si elle existe) et de celle située immédiatement en dessous (si elle existe). Dans la suite, si D est un diagramme de Young, nous noterons $V(D)$ le volume total d'eau contenu dans D et $S(D)$ la surface de D , c'est-à-dire le nombre de cases qu'il y a dans D .

Soit ℓ la quantité moyenne d'eau contenue dans un verre : c'est aussi la quantité finale que l'on souhaite mettre dans chaque verre. Comme il est clair que les déplacements autorisés ne permettent à l'eau que de rentrer dans un diagramme de Young, on a la condition nécessaire suivante :

$$(C) : \quad \text{Pour tout diagramme de Young } D, \text{ on a } V(D) \leq \ell S(D).$$

Il nous reste à montrer que cette condition est suffisante. Pour les besoins de la démonstration, nous commençons par étendre le problème aux damiers pas seulement rectangulaires, mais plus généralement en forme de diagramme de Young. Nous procédons à présent par récurrence sur le nombre de cases du damier. S'il y a une case, il n'y a rien à démontrer.

Donnons-nous maintenant un damier en forme de diagramme de Young de surface $S+1$. On appelle *coin* une case du damier qui n'admet aucun voisin à gauche, ni en dessous. Il est clair qu'un coin existe toujours : on peut par exemple prendre la case la plus à gauche de la première ligne. Soient c un coin, et v le volume d'eau qu'il y a sur c .

Appelons c_x (resp. c_y) la case située immédiatement à droite (resp. en dessous) de c , si elle existe. On cherche deux nombres positifs ou nuls x et y tels que si l'on verse, depuis c , une quantité d'eau égale à x dans c_x et une quantité d'eau égale à y dans c_y :

- il reste exactement une quantité d'eau égale à ℓ dans c et
- après transvasement, le damier auquel on a retiré la case c vérifie la condition (C).

Si V' désignent les nouveaux volumes d'eau (*i.e.* après transvasement), ces conditions se traduisent mathématiquement par :

$$\begin{aligned} x + y &= v - \ell \\ V'(D) &\leq \ell S(D) \end{aligned}$$

la dernière inégalité devant être vérifiée pour tout diagramme de Young D inclus dans le damier privé de la case c . A noter qu'étant donné qu'on laisse un volume d'eau égal à ℓ dans c , la moyenne dans le petit damier (celui auquel on a enlevé la case c) n'est pas modifiée : c'est la raison pour laquelle on retrouve bien ℓ dans la deuxième condition.

Examinons de plus près cette deuxième condition. Il y a en fait quatre cas. Si D ne contient ni c_x ni c_y , alors $V'(D) = V(D)$ et, par hypothèse de récurrence, l'inégalité est bien satisfaite. Si D contient c_x et c_y , l'inégalité se réécrit sous la forme $V'(D) \leq \ell S(D) + \ell - v + x + y$. Ainsi elle sera

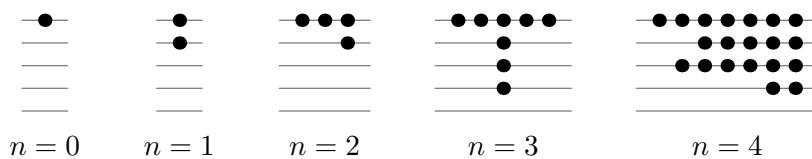
automatiquement vérifiée si on arrive à satisfaire $x + y = v - \ell$. Il n'y a donc pas à se préoccuper de ce cas. Si maintenant D contient c_x mais pas c_y , l'inégalité devient $x \leq \ell S(D) - V(D)$, ce qui donne une condition supplémentaire sur x . De même, si D contient c_y mais pas c_x , on obtient $y \leq \ell S(D) - V(D)$.

Parmi tous les diagrammes de Young D contenant c_x mais pas c_y (resp. c_y mais pas c_x), notons D_x (resp. D_y) celui pour lequel la quantité $S(D) - V(D)$ est maximale. Les conditions sur x et y se réécrivent alors

$$\begin{aligned} x + y &= v - \ell \\ x &\leq \ell S(D_x) - V(D_x) \\ y &\leq \ell S(D_y) - V(D_y) \end{aligned}$$

Pour conclure il suffit donc de montrer d'une part que $v \geq \ell$ et d'autre part que $\ell S(D_x) - V(D_x) + \ell S(D_y) - V(D_y) \geq v - \ell$. La première inégalité s'obtient en instanciant la condition (C) au damier privé de la case c . Pour la seconde, on introduit les ensembles de cases $D_x \cap D_y$ et $D = D_x \cup D_y \cup \{c\}$. Clairement $S(D_x) + S(D_y) = S(D_x \cap D_y) + S(D) - 1$ et $V(D_x) + V(D_y) = V(D_x \cap D_y) + V(D) - 1$. L'inégalité à prouver se réécrit alors $\ell S(D_x \cap D_y) + \ell S(D) - V(D_x \cap D_y) - V(D) \geq 0$, ce qui résulte encore de (C) dès que l'on remarque que $D_x \cap D_y$ et D sont des diagrammes de Young.

Solution de l'exercice 2 Notons n la hauteur à atteindre. Voici des configurations qui fonctionnent (A vous de trouver comment !) pour $n \leq 4$ (ce sont celles avec le nombre de pions minimal, mais nous n'allons pas le prouver) :



Pour $n \geq 5$, nous allons montrer que ce n'est pas possible. Bien entendu, il suffit de le faire pour $n = 5$. Raisonnons par l'absurde et supposons, sans perte de généralité, que l'on puisse atteindre le point de coordonnées $(0, 5)$. Attribuons un poids à chaque point à coordonnées entières : précisément au point de coordonnées (x, y) nous attribuons le poids $\alpha^{5-y+|x|}$ où α est la racine positive de l'équation $\alpha^2 = 1 - \alpha$.

Nous associons également un poids à une configuration de pions dans le plan, simplement en faisant la somme des poids associés aux positions de chacun des pions. On vérifie sans mal qu'un mouvement autorisé ne peut que diminuer le poids de la configuration. Or, la position à laquelle on souhaite arriver contient un pion dans la case de coordonnées $(0, 5)$ et a donc un poids supérieur ou égal à 1. Mais par ailleurs, le poids de la configuration est manifestement strictement majoré par

$$\sum_{x=-\infty}^{\infty} \sum_{y=-\infty}^0 \alpha^{5-y+|x|} = \alpha^5 \left(\sum_{x=-\infty}^{\infty} \alpha^{|x|} \right) \left(\sum_{y=0}^{\infty} \alpha^y \right) = \frac{\alpha^5(1 + \alpha)}{(1 - \alpha)^2} = 1$$

la dernière égalité s'obtenant en se rappelant que $\alpha^2 = 1 - \alpha$. On déduit de tout cela que le mouvement est impossible.

Solution de l'exercice 3

Première solution. Nous allons montrer par récurrence sur n que $P_n(x) = x(x - 1)(x - 2) \cdots (x - n + 1)$. Ainsi, les racines de P_n seront $0, 1, 2, \dots, n - 1$.

Pour $n = 1$, il n'y a qu'une permutation qui est l'identité. L'entier 1 en est un record, d'où $\text{rec}(\text{id}) = 1$. Le polynôme P_1 est donc bien $x \mapsto x$ comme voulu. Supposons maintenant que P_n

soit de la forme annoncée. On veut prouver que $P_{n+1}(x) = (x+n)P_n(x)$. Pour cela, il suffit de montrer la relation de récurrence (c'est en fait équivalent) :

$$c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + nc_{n,k}$$

où par définition $c_{n,k}$ désigne le nombre de permutations $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ayant k records.

Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_{n+1}$. Notons j l'entier tel que $\sigma(j) = 1$. Soit $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$ la permutation définie par :

$$\begin{aligned} \sigma'(i) &= \sigma(i) - 1 && \text{si } i < j \\ \sigma'(i) &= \sigma(i+1) - 1 && \text{textsinon} \end{aligned}$$

Il est facile de se convaincre que l'application $\mathfrak{S}_{n+1} \rightarrow \{1, \dots, n+1\} \times \mathfrak{S}_n$, $\sigma \mapsto (\sigma', i)$ est une bijection.

De plus, si $i = 1$, on vérifie immédiatement que 1 est un record de σ et que $i \in \{1, \dots, n\}$ est un record de σ' si, et seulement si $i+1$ est un record de σ . D'où on déduit que $\text{rec}(\sigma) = \text{rec}(\sigma') + 1$. Si au contraire $i \neq 1$, on a $\text{rec}(\sigma) = \text{rec}(\sigma') + 1$. De tout cela, il suit facilement la relation de récurrence $c_{n+1,k} = c_{n,k-1} + nc_{n,k}$ puis, comme on l'a déjà dit, la formule attendue pour P_{n+1} .

Deuxième solution. On considère l'application :

$$\begin{aligned} r : \mathfrak{S}_n &\longrightarrow \{0\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1, 2\} \times \dots \times \{0, \dots, n-1\} \\ \sigma &\longmapsto (r_1(\sigma), r_2(\sigma), \dots, r_n(\sigma)) \end{aligned}$$

où $r_i(\sigma)$ est le nombre d'entiers $j \leq i$ tels que $\sigma(j) > \sigma(i)$. Remarquons que la donnée de $r(\sigma)$ détermine uniquement σ , autrement dit que r est une bijection. En effet, la connaissance de $r_n(\sigma)$ permet de retrouver la valeur de $\sigma(n)$. Forts de cela, on retrouve ensuite de même $\sigma(n-1)$ en utilisant $r_{n-1}(\sigma)$. Et ainsi de suite.

Notons également que, par définition, i est un record de σ si, et seulement si $r_i(\sigma) = 0$. On en déduit que le polynôme P_n est égal à :

$$P_n(x) = \sum_{r_1=0}^0 \sum_{r_2=0}^1 \sum_{r_3=0}^2 \dots \sum_{r_n=0}^{n-1} x^{f(r_1)+f(r_2)+\dots+f(r_n)}$$

où f est la fonction qui associe 1 et 0 et 0 à tous les autres nombres. La somme précédente peut se réécrire comme un produit comme suit :

$$P_n(x) = \left(\sum_{r_1=0}^0 x^{f(r_1)} \right) \left(\sum_{r_2=0}^1 x^{f(r_2)} \right) \left(\sum_{r_3=0}^2 x^{f(r_3)} \right) \dots \left(\sum_{r_n=0}^{n-1} x^{f(r_n)} \right)$$

c'est-à-dire $P_n(x) = x(x+1)(x+2) \dots (x+n-1)$.

X. Les OIM

1 Sujets des OIM 2009

Problème 1

Soit n un entier strictement positif et a_1, \dots, a_k avec $k \geq 2$, des entiers strictement positifs distincts appartenant à l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ tels que n divise $a_i(a_{i+1} - 1)$ pour $i=1, \dots, k-1$.

Montrer que n ne divise pas $a_k(a_1 - 1)$.

Problème 2

Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit.

Les points P et Q sont des points intérieurs aux côtés CA et AB respectivement.

Soit K, L et M les milieux respectifs des segments BP, CQ et PQ .

Γ est le cercle passant par K, L et M .

On suppose que la droite (PQ) est tangente au cercle Γ .

Montrer que $OP = OQ$.

Problème 3

Soit s_1, s_2, s_3, \dots une suite strictement croissante d'entiers strictement positifs telle que les sous-suites

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \dots \quad \text{et} \quad s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \dots$$

soient deux progressions arithmétiques.

Montrer que la suite s_1, s_2, s_3, \dots est aussi une progression arithmétique.

Problème 4

Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$.

Les bissectrices de \widehat{CAB} et \widehat{ABC} rencontrent respectivement les côtés BC et CA en D et E .

Soit K le centre du cercle inscrit dans le triangle ADC . On suppose que $\widehat{BEK} = 45^\circ$.

Trouver toutes les valeurs possibles de \widehat{CAB} .

Problème 5

Déterminer toutes les fonctions f de l'ensemble des entiers strictement positifs dans l'ensemble des entiers strictement positifs telles que, pour tous entiers strictement positifs a et b , il existe un triangle non aplati dont les longueurs des côtés sont

$$a, \quad f(b) \quad \text{et} \quad f(b + f(a) - 1)$$

Problème 6

Soit a_1, a_2, \dots, a_n des entiers strictement positifs distincts et soit M un ensemble de $n-1$ entiers strictement positifs ne contenant pas $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Une sauterelle doit faire des sauts le long de l'axe réel; partant du point O , elle doit effectuer n sauts vers la droite de longueurs a_1, a_2, \dots, a_n dans l'ordre de son choix.

Montrer que la sauterelle peut choisir l'ordre de ses sauts de façon à ne passer par aucun point de M .

2 Sujets des OIM 2008

Problème 1

Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus, et soit H son orthocentre.

Le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[BC]$ coupe la droite (BC) en A_1 et A_2 . De même, le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[CA]$ coupe la droite (CA) en B_1 et B_2 , et le cercle passant par H et dont le centre est le milieu de $[AB]$ coupe la droite (AB) en C_1 et C_2 .

Montrer que $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sont cocycliques.

Problème 2

(a) Montrer que $\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{y^2}{(y-1)^2} + \frac{z^2}{(z-1)^2} \geq 1$

pour tous nombres réels x, y, z , différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$.

(b) Montrer qu'il existe une infinité de triplets de nombres rationnels x, y, z , différents de 1 et vérifiant $xyz = 1$, pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Problème 3

Montrer qu'il existe une infinité d'entiers strictement positifs n tels que $n^2 + 1$ possède un diviseur premier strictement supérieur à $2n + \sqrt{2n}$.

Problème 4

Trouver toutes les fonctions f de $]0, +\infty[$ dans $]0, +\infty[$ telles que $\frac{f(w)^2 + f(x)^2}{f(y^2) + f(z^2)} = \frac{w^2 + x^2}{y^2 + z^2}$ pour tous nombres réels strictement positifs w, x, y, z , vérifiant $wx = yz$.

Problème 5

Soient n et k des entiers strictement positifs tels que $k \geq n$ et $k - n$ est pair.

On suppose données $2n$ lampes numérotées de 1 à $2n$; chacune peut être allumée ou éteinte.

Au début, toutes les lampes sont éteintes.

Une opération consiste à allumer une lampe éteinte ou bien à éteindre une lampe allumée.

On considère des séquences constituées d'opérations successives.

Soit N le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n + 1$ à $2n$ sont éteintes.

Soit M le nombre de séquences constituées de k opérations et aboutissant à l'état où les lampes de 1 à n sont allumées et les lampes de $n + 1$ à $2n$ sont éteintes, mais où les lampes de $n + 1$ à $2n$ n'ont jamais été allumées.

Déterminer le rapport $\frac{N}{M}$.

Problème 6

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $BA \neq BC$.

Les cercles inscrits dans les triangles ABC et ADC sont notés respectivement ω_1 et ω_2 .

On suppose qu'il existe un cercle ω qui est tangent à la demi-droite $[BA)$ au-delà de A , tangent à la demi-droite $[BC)$ au-delà de C , et qui est aussi tangent aux droites (AD) et (CD) .

Montrer que les tangentes communes extérieures à ω_1 et à ω_2 se coupent en un point de ω .

XI. Le coin des élèves

Un petit aperçu sur l'ambiance du côté de la salle commune.



Le soleil, présent presque toute la semaine, a permis à tous d'aller travailler ou se détendre dehors.



Les parties de cartes à n'en plus finir.
Les voix de certains, surexcités par le jeu, traversaient les murs...



Voyez les attendre le résultat de la fameuse chasse au trésor :
attentifs et intrigués...



Mais quel est donc ce « prix » décerné aux gagnants ?



Luc ⇔ Thomas (lequel ? on a du mal à les distinguer ces jumeaux !)
explique à Aurélien la technique du Rubik's Cube.



La joyeuse bande de Matheux-Matheuses, fière de leur banderole des 50e OIM.



La fine équipe accro du mac, du pc et des cafés!

