Stage olympique de Grésillon

Du 25 août au 1er septembre 2007

Stage olympique de Grésillon, août 2007

Avant-propos

Le stage de Grésillon a été organisé par Animath.

Son objet a été de rassembler les lauréats de diverses compétitions mathématiques et de les faire travailler sur des exercices en vue de la formation de l'équipe qui représentera la France à l'Olympiade internationale de mathématiques en Espagne en juillet 2008.

Nous tenons à remercier le château de Grésillon pour son excellent accueil.

Table des matières

I. Le trombinoscope

Les profs

Xavier Caruso	François Charles	Pierre Dehornoy
Sandrine Henri	Bodo Lass	François Lo Jacomo
Rémy Oudompheng	Ilia Smilga	Dimitri Zvonkine

Les élèves

Mathieu Aria	Anca Arnautu	Guillaume Baraston	Louise Bertin
Lucas Boczkowski	François Caddet	Pierre Camilleri	Philippe Cloarec
Martin Clochard	Marc Coiffier	Noémie Combe	Thomas Cruzel
Jean-Alix David	Camille Dessirier	Yrvann Emzivat	Juliette Fournier
William Fujiwara	Marcus Hanzig	Alice Héliou	Amélie Héliou

Dmitry Ivanov	Vincent Langlet	Adrien Laroche	Charlotte Le Mouel
Anaïs Lecerf	Merlin Legrain	Ambroise Marigot	Léonard Martelli
Maxime Martelli	Jean-François Martin	Jeanne Nguyen	Alexandre Nolin
Quentin Soulet de Brugières	Florian Tep	Rémi Varloot	Rémi Vergnaud

Christopher Wells

Thomas Williams

Jean-Denis Zafar

II. Déroulement du stage

1 Emploi du temps

Une grande partie de la journée du samedi 25 août a été consacrée à l'accueil des élèves. Cette année, étant donné le nombre important d'élèves, nous avons décidé de former deux groupes de niveau (**A**vancé et **B**albutiant). Le programme de la semaine était le suivant

<table>
<tr><th></th><th></th><th>groupe A</th><th>groupe B</th></tr>
<tr><td rowspan="6">stratégie de base</td><td>dim. 26 matin</td><td>TD (François Charles)</td><td>Cours (Sandrine Henri)</td></tr>
<tr><td>dim. 26 après-midi</td><td>colles et TPE</td><td>TD (Xavier Caruso)</td></tr>
<tr><td>dim. 26 soirée</td><td colspan="2">Compléments</td></tr>
<tr><td>lun. 27 matin</td><td>TD (Rémy Oudompheng)</td><td>colles et TPE</td></tr>
<tr><td>lun. 27 après-midi</td><td colspan="2">Test</td></tr>
<tr><td>lun. 27 soirée</td><td colspan="2">Suites et fonctions (F. Lo Jacomo)</td></tr>
<tr><td rowspan="6">géométrie</td><td>mar. 28 matin</td><td>TD (Bodo Lass)</td><td>Cours (Pierre Dehornoy)</td></tr>
<tr><td>mar. 28 après-midi</td><td>colles et TPE</td><td>TD (Rémy Oudompheng)</td></tr>
<tr><td>mar. 28 soirée</td><td colspan="2">Constructions à la règle et au compas (S. Henri)</td></tr>
<tr><td>mer. 29 matin</td><td>TD (Pierre Dehornoy)</td><td>colles et TPE</td></tr>
<tr><td>mer. 29 après-midi</td><td colspan="2">Test</td></tr>
<tr><td>mer. 29 soirée</td><td colspan="2">Présentation des OIM (I. Smilga), Nœuds (P. Dehornoy)</td></tr>
<tr><td rowspan="6">arithmétique</td><td>jeu. 30 matin</td><td>TD (François Lo Jacomo)</td><td>Cours (François Charles)</td></tr>
<tr><td>jeu. 30 après-midi</td><td>colles et TPE</td><td>TD (Rémy Oudompheng)</td></tr>
<tr><td>jeu. 30 soirée</td><td colspan="2"></td></tr>
<tr><td>ven. 31 matin</td><td>TD (Rémy Oudompheng)</td><td>colles et TPE</td></tr>
<tr><td>ven. 31 après-midi</td><td colspan="2">Test</td></tr>
<tr><td>ven. 31 soirée</td><td colspan="2"></td></tr>
</table>

2 Colles et travaux pilotés électroniquement (TPE)

L'organisation du créneau consacré à cette discipline était le suivant. Pendant que trois groupes de trois élèves subissaient une colle, les autres planchaient sur les TPE.

Le principe des colles est très semblable à celui pratiqué dans les classes préparatoires ; pendant une heure ou une heure et quart, un groupe d'élèves se retrouvait devant un examinateur (l'un des professeurs du stage) qui lui proposait un exercice très relié au thème de la journée. Nous donnons dans le chapitre suivant la liste des exercices de colles résolus. La liste des groupes de colles et le colloscope sont donnés dans les tableaux suivants :

	Groupe A		Groupe B
1	Juliette Fournier	**11**	Pierre Camilleri
	Marcus Hanzig		William Fujiwara
	Rémi Vergnaud		Quentin Soulet de Brugières
2	Alice Héliou	**12**	Yrvann Emzivat
	Jean-François Martin		Anaïs Lecerf
	Rémi Varloot		Merlin Legrain
3	Amélie Héliou	**13**	Martin Aria
	Vincent Langlet		Anca Arnautu
	Christopher Wells		Léonard Martelli
4	Philippe Cloarec	**14**	Jean-Alix David
	Thomas Cruzel		Dmitry Ivanov
	Charlotte Le Mouel		Jean-Denis Zafar
5	Martin Clochard	**15**	Noémie Combe
	Camille Dessirier		Maxime Martelli
	Jeanne Nguyen		Alexandre Nolin
6	Lucas Boczkowski	**16**	Guillaume Baraston
	Adrien Laroche		Louise Bertin
	Ambroise Marigot		Thomas Williams
		17	François Caddet
			Marc Coiffier
			Florian Tep

		Stratégies de base	Arithmétique	Géométrie
François Charles	14h00	1	6	2
	15h30	4	3	5
	33h00	11	16	15
	34h10	14	13	12
	35h20	17		
Bodo Lass	14h00	2	4	3
	15h30	5	1	6
	33h00	12	17	16
	34h10	15	11	13
	35h20		14	
François Lo Jacomo	14h00	3	5	1
	15h30	6	2	4
	33h00	13	15	14
	34h10	16	12	17
	35h20			11

Les TPE fonctionnaient de la façon suivante. Les élèves seuls, ou par groupe de deux ou trois, demandaient un exercice, et celui-ci était tiré au hasard par l'ordinateur parmi une liste de cent, à l'aide d'une méthode tenant compte du niveau de l'élève et de la difficulté de l'exercice. Une fois la solution trouvée et rédigée, elle nous était rendue et nous effectuions la correction. Si elle était juste, les élèves pouvaient obtenir un nouvel exercice, de même dans le cas d'abandon de l'exercice. Selon le cas, le niveau de l'élève augmentait ou diminuait. Nous donnons dans le chapitre suivant la liste complète des exercices proposés, ainsi que leurs solutions.

III. Les exercices

1 En TD

1.1 Les énoncés

Stratégie de base (groupe A)

Exercice 1. Montrer que le nombre de sous-ensembles à 3 éléments de $\{1,\ldots,63\}$ dont la somme est supérieure à 95 est plus grand que le nombre de ceux dont la somme est inférieure à 95.

Exercice 2. On se donne un ensemble S de $n > 4$ points du plan, coloriés en rouge et noir. On suppose que trois points de la même couleur ne sont jamais alignés. Montrer que l'on peut trouver trois points de la même couleur formant un triangle dont au moins l'un des côtés ne contient pas de point de S.

Exercice 3. Soit P un polygone convexe d'aire 1. Montrer qu'il existe un rectangle d'aire 2 qui le contient. Peut-on améliorer le résultat ?

Exercice 4. On tire 51 nombres entre 1 et 100. Montrer que l'on peut en trouver un qui divise l'autre.

Exercice 5. 25 personnes sont dehors, armées d'un pistolet à eau. Au même moment, chacun tire sur la personne la plus proche de lui (que l'on suppose unique). Montrer que quelqu'un n'est pas mouillé.

Exercice 6. Vingt enfants attendent leurs grands-pères dans la cour de lamaternelle. Deux enfants quelconques ont toujours un grand-père commun.Prouver qu'un des grands-pères a au moins 14 petits enfants dans cetteécole maternelle.

Exercice 7. Dans un stage olympique, on trouve a stagiaires et b examinateurs, où b est impair et vaut au moins 3. Chaque examinateur décide pour chaque stagiaire s'il a réussi ou raté le stage. Soit k un nombre entier tel que deux examinateurs ne peuvent avoir le même avis sur plus de k élèves. Montrer l'inégalité

$$\frac{k}{a} \geqslant \frac{b-1}{2b}.$$

Exercice 8 (*OIM 1972*). Prouver que de tout ensemble de 10 entiers naturels à deux chiffres,on peut extraire deux sous-ensembles disjoints dont la somme de tous leséléments sont égales.

Exercice 9 (*Tournoi des villes 1988*). Est-il possible de recouvrir le plan par des cercles de sorte que par toutpoint passent exactement 1988 de ces cercles ?

Exercice 10 (*URSS 1977*). On considère un ensemble fini de points du plan, non tous alignés. Achacun de ces points, on attribue un nombre de sorte que, pour toute droitepassant par au moins deux de ces points, la somme des nombres de tous lespoints de cette droite soit égale à 0.

Prouver que tous les nombres sont égaux à 0.

Exercice 11. Soient n et k deux entiers strictement positifs. On considère uneassemblée de k personnes telle que, pour tout groupe de n personnes,il en existe une $(n+1)$-ième qui les connaîsse toutes. (La relation « se connaître » est symétrique.)
a) Si $k = 2n+1$, prouver qu'une des personnes de l'assemblée connaît toutes les autres.
b) Si $k = 2n+2$, donner un exemple d'une telle assemblée dans laquelle personne ne connaît tous les autres.

Exercice 12 (*Angleterre 2003*). Soit f une permutation de $\mathbb{N}^*$.

a) Prouver qu'il existe une progression arithmétique de trois termes $a, a+d, a+2d$, avec $d > 0$, telle que $f(a) < f(a+d) < f(a+2d)$.

b) Existe-t-il nécessairement une progression de 2004 termes $a, a+d, \ldots, a+2003d$, avec $d > 0$, telle que $f(a) < f(a+d) < \cdots < f(a+2003d)$?

Exercice 13 (*Tournoi des villes 2001*). Initialement, on dispose de trois piles contenant respectivement 51,49 et 5 jetons. Deux types de mouvements sont autorisés :

a) on réunit deux piles en une seule,

b) on peut diviser une pile contenant un nombre pair de jetons en deux pileségales.

Est-il possible d'obtenir une configuration avec 105 piles de un jetonà l'aide d'un nombre fini de telles opérations ?

Exercice 14. On considère un damier rectangulaire comportant $2m$ lignes et $2n$colonnes. Dans chaque case, se trouve soit un jeton rouge soit un jetonvert. Chaque ligne contient autant de jetons rouges que de jetons verts, etde même pour les colonnes. Deux jetons rouges adjacents d'une mêmeligne ou d'une même colonne sont joints par un segment rouge. Demême les jetons verts par des segments verts. Prouver que le nombre desegments rouges et égal au nombre de segments verts.

Exercice 15 (*Hongrie 2004*). Un palais a la forme d'un carré divisé en 2003×2003pièces, comme les cases d'un grand échiquier. Il y a une porte entredeux pièces si et seulement si elles ont un mur en commun. La porteprincipale permet, venant de l'extérieur du palais, d'entrer dans lepalais par la pièce située au coin nord-ouest. Une personne entredans le palais, visite certaines des pièces, puis ressort du palais, parla porte d'entrée, alors qu'il revient pour la première fois dans lapièce du coin nord-ouest. Il apparaît qu'il a visité chacune desautres pièces exactement 100 fois, sauf la pièce située aucoin sud-est. Combien de fois le visiteur a-t-il été dans lapièce du coin sud-est ?

Exercice 16 (*Olympiade de Leningrad 1989*). Soit $k > 1$ un entier. Prouver qu'il est impossible de placer les nombres $1, \ldots, k^2$, un dans chaque cases d'un tableau carré $k \times k$ desorte que les sommes de tous les nombres marqués dans une ligne ou dansune colonne soit toujours une puissance de 2 (pas nécessairementtoujours la même).

Exercice 17 (*Bulgarie 1987*). Soit $k > 1$ un entier. Prouver qu'il existe un nombre premier p et unesuite d'entiers $(a_n)_{n>1}$ strictement croissante tels que la suite $(p + ka_n)_{n>1}$ soit entièrement formée de nombres premiers.

Exercice 18 (*Kazakstan 2003*). Soient (a_n) et (b_n) les suites définies par $a_0 = b_0 = 0$ et $a_n = a_{n-1}^2 + 3$ et $b_n = b_{n-1}^2 + 2^n$.

Comparer les nombres a_{2003} et b_{2003}.

Exercice 19 (*Olympiade de Leningrad 1988*). Dans un immeuble de 120 appartements, vivent 119 locataires. Un de cesappartements sera dit *surpeuplé* lorsqu'au moins 15 personnesy habitent. Chaque jour, tous les locataires d'un appartement surpeuplé,s'il y en a, s'en vont habiter dans des appartements différentsquelconques. Arrivera-t-il un jour où il n'y aura plus d'appartementssurpeuplé ?

Exercice 20 (*Olympiades académiques 2004*). On considère un entier $n \geqslant 3$.

Dans un tournoi des n nations, chaque nation joue avec les $n-1$ autres.

Le classement se fait selon le nombre de matchs gagnés (un match nepouvant être que gagné ou perdu). En cas d'égalité, leclassement se fait en regardant le nombre de points marqués.

Faire le grand chelem, c'est gagner tous ses matchs. Obtenir la cuillèrede bois, c'est perdre tous ses matchs.

a) Existe-t-il des tournois pouvant donner ces scores :

Tournoi des 6 nations.

$$\begin{pmatrix} \text{Equipe} & \text{Victoires} & \text{Défaites} \\ A & 5 & 0 \\ B & 4 & 1 \\ C & 4 & 1 \\ D & 1 & 4 \\ E & 1 & 4 \\ F & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Tournoi des 5 nations.

$$\begin{pmatrix} \text{Equipes} & \text{Victoires} & \text{Défaites} \\ A & 3 & 1 \\ B & 3 & 1 \\ C & 2 & 2 \\ D & 1 & 3 \\ E & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Démontrer que les entiers n pour lesquels il existe un tournoi où le vainqueur a autant de victoires que de défaites sont les entiers impairs.

c) Pour quelles valeurs de n existe-t-il un tournoi où le second compte plus de défaites que de victoires ?

d) Pour quelles valeurs de n existe-t-il un tournoi où l'on peut faire un classement des trois premiers sans avoir à regarder le nombre de points marqués ?

e) Pour quelle valeur minimale de n existe-t-il un tournoi où l'on peut faire un classement des trois premiers sans avoir à regarder le nombre de points marqués, sachant qu'il n'y a pas eu de grand chelem ?

f) Soit $k \geqslant 0$ un entier fixé. Pour quelle valeur minimale de n existe-t-il un tournoi où l'on peut faire un classement des trois premiers sans avoir à regarder le nombre de points marqués, sachant que le premier a au moins k défaites ?

Exercice 21. Si a, b, c sont trois nombres, il est autorisé de transformer (a, b, c)en $(a, b, 2a+2b-c)$ ou d'échanger les places de deux des nombres.Est-il possible de transformer $(1, 21, 42)$ en $(5, 13, 40)$ à l'aide d'unnombre fini de telles opérations ?

Stratégie de base (groupe B)

Exercice 22. *a)* Montrer que parmi 101 entiers, il en existe toujours deux dont la différence est multiple de 100.

b) Montrer que parmi 502 entiers, il en existe toujours deux dont la somme ou la différence est multiple de 1000.

c) Soient $a_1, \dots, a_n$ des entiers. Montrer qu'il existeune partie non vide $I \subset \{1, \dots, n\}$ telle que la somme$\sum_{i \in I} a_i$ soit multiple de n.

Exercice 23. Montrer que dans un ensemble fini d'au moins deux personnes, il y en a toujours au moins deux qui connaissent exactement le même nombre degens. (On supposera que la relation de connaissance est symétrique eton conviendra qu'une personne ne se connaît pas elle-même.)

Exercice 24. Soit $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{N}$ une fonction vérifiant :

$$4f(x,y) = f(x-1,y) + f(x,y+1) + f(x+1,y) + f(x,y-1).$$

Montrer que f est constante.

Exercice 25. Trouver toutes les suites $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs telles que pour tout entier n, on ait :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2.$$

Exercice 26. Soient $a_1 < \cdots < a_n < \cdots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs telle que tout entier $k > 0$ appartienne à la suite ou puisse s'écrire comme la somme de deux termes, éventuellement égaux, de la suite.

Prouver que $a_n \leqslant n^2$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Exercice 27. On démarre avec un grand morceau de papier. On le déchire en quatre.On choisit ensuite un des quatre morceaux que l'on déchire à nouveauen quatre et ainsi de suite un certain nombre de fois. Est-il possibled'avoir après ces opérations 2007 petits bouts de papier ?

Exercice 28. Peut-on paver, avec des dominos 2×1, un damier 8×8 auquel on a retiré deux coins opposés ?

Exercice 29. À quelle condition est-il possible de paver un damier rectangulaire$x \times y$ par des briques de taille $n \times 1$?

Exercice 30. Dans un grand sac, on a placé 2007 boules noires et 2007 boulesblanches. On retire deux boules du sac au hasard : si elles n'ont pasla même couleur, on repose la boule blanche dans le sac et on met lanoire de côté tandis que si elles ont la même couleur, on les retire toutes les deux du sac. On recommance la manipulation jusqu'à ce qu'ilreste zéro ou une boule.

Montrer qu'il reste en fait une boule dans le sac et déterminer sa couleur.

Exercice 31. Dans chacune des 16 cases-unité d'un carré 4×4, on aécrit un + sauf dans la deuxième case de la première ligne. Onpeut effectuer les trois opérations suivantes :

- ☞ Changer le signe de chacune des cases d'une ligne.
- ☞ Changer le signe de chacune des cases d'une colonne.
- ☞ Changer le signe de chacune des cases d'une diagonale (pas seulement les deux diagonales principales).

Est-il possible d'obtenir une configuration pour laquelle chaque case contiendrait un + à l'aide d'un nombre fini de telles opérations ?

Exercice 32. Dans chaque case d'un échiquier 8×8, on a écrit le nombre1. On répète 2003 fois l'opération suivante : on choisit un carré 3×3 et on augmente d'une unité la valeur de toutes lescases intérieures à ce carré (donc on incrémente 9 nombres).

Montrer qu'il existe un carré 4×4 tel que la somme des nombresécrits dans ses quatre coins est 2007.

Exercice 33. Peut-on colorier les entiers strictement positifs en deux couleurs detelle façon à n'avoir aucune progression arithmétique (infinie) monochrome ?

Exercice 34. Est-il possible de colorier le plan en deux couleurs de telle façonà n'avoir aucun segment (non réduit à un point) monochrome ?

Exercice 35 (*Tournoi des villes 1987*). On choisit une case d'un échiquier classique 8×8, dont les ca-sessont alternativement blanches et noires. On désigne par a (resp. b)la somme des carrés des distances du centre du carré choisi auxcentres des carrés noirs (resp. blancs).

Prouver que $a = b$.

Exercice 36 (*Biélorussie 2002*). *a)* Déterminer tous les entiers $k \geqslant 3$ pour lesquels il existe un ensemble de k entiers strictement positifs deux à deux jamais premiers entre eux, et trois quelconques premiers entre eux dans leur ensemble.
b) Existe-t-il un ensemble infini d'entiers strictement positifs ayant la même propriété ?

Exercice 37. Dans le plan, on a tracé $n > 0$ droites. Prouver que l'on peut colorierles régions ainsi délimitées soit en rouge soit en bleu, desorte que deux régions quelconques séparées par un segmentsoient toujours de couleurs différentes.

Exercice 38. Soit $n > 1$ un entier. Prouver que dans tout sous-ensemble de $\{1,...,2n\}$contenant $n+2$ éléments, on peut toujours en trouver troisdistincts dont l'un est la somme des deux autres.

Exercice 39 (*Olympiades académiques 2004*). Un entier $n \geqslant 2$ est dit *académique* si on peut répartirles entiers $1, 2, \ldots, n$ en deux groupes disjoints $\mathscr{S}$ et $\mathscr{P}$, de sorte que la somme des nombres du groupe $\mathscr{S}$ soit égale au produit des nombres du groupe $\mathscr{P}$.

Déterminer tous les entiers académiques.

Exercice 40. On considère six points dans le plan, trois jamais alignés. Oncolorie en rouge ou en bleu chacun des segments qui les relient deux àdeux.

Prouver que, quelle que soit la coloration, il y aura toujours un trianglemonochrome.

Exercice 41. On considère six points dans le plan, trois jamais alignés et onsuppose que les distances entre deux points sont toutes distinctes. Montrer qu'il existe un triangle dont le plus petit côté est le même quele plus grand côté d'un autre triangle.

Exercice 42 (*Olympiade de Leningrad 1988*). On place un jeton dans certaines cases, mais pas toutes, d'un échiquier $n \times n$, où $n > 0$ est entier. A chaque seconde, l'un des jetons passed'une case à une autre qui est vide. Après un certain nombre de telsmouvements, on s'aperçoit que chaque jeton est de retour dans sa caseinitiale après avoir visité toutes les autres cases une et une seulefois. Prouver qu'il y a eu un instant où aucun jeton n'était dans sacase initiale.

Exercice 43. On se donne $mn+1$ de l'espace tels que, parmi $m+1$ quelconques d'entreeux, on puisse toujours en trouver deux à une distance au plus égale à 1 l'un de l'autre. Prouver qu'il existe une sphère de rayon 1contenant au moins $n+1$ de ces points.

Exercice 44 (*Ukraine 2001*). Trois pays ont chacun envoyé n mathématiciens à uneconférence. Chaque mathématicien a des échanges avec au moins $n+1$ des mathématiciens qui ne sont pas de son pays. Prouver qu'il existe trois mathématiciens qui ont deux à deux eu des échanges.

Exercice 45. Un polygone régulier convexe à 1997 sommets a été décomposé en triangles en utilisant des diagonales qui ne s'intersectentpas intérieurement. Combien de ces triangles sont-ils acutangles ?

Exercice 46 (*Olympiades académiques 2005*). On dispose de 100 cartes. Sur chacune sont écrits deux entiersconsécutifs, de sorte que chacun des entiers $1, 2, \ldots, 200$ soitécrit sur une des cartes.

a) Alice a choisi 21 cartes au hasard. Elle fait la somme de tous les entiers écrits sur ses cartes et annonce à Bob que cette somme vaut 2004. Prouver qu'Alice s'est trompée dans son calcul.

b) Alice recompte et annonce cette fois 2005. Prouver qu'elle s'est à nouveau trompée dans son calcul.

c) En fait, le vrai total d'Alice est 2003. Pendant ce temps, Bob a choisi 20 cartes au hasard parmi celles qui restaient. Il fait la somme des nombres écrits sur ses cartes et annonce à Alice que cette somme vaut 1396.Prouver que Bob s'est trompé dans son calcul.

Exercice 47 (*Roumanie 2005*). Chaque point d'un cercle est colorié soit en vert soit en jaune de sorte que tout triangle équilatéral inscrit dans le cercle possède exactement deux sommets jaunes. Prouver qu'il existe un carré inscrit dans le cercle dont au moins trois des sommets sont jaunes.

Exercice 48 (*Canada 1987*). Dans une même très grande pièce, 2007 personnes sont disposées de sorte que leurs distances mutuelles soient deux à deux distinctes. Chaque personne est armée d'un pistolet à eau. A un signal donné, chacun tire sur la personne qui lui est la plus proche.

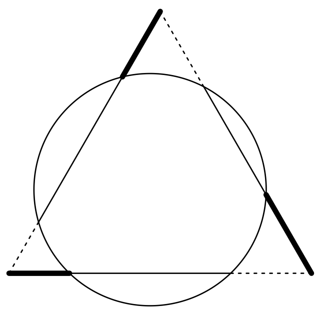
Prouver qu'au moins une personne reste sèche.

Exercice 49. On considère l'ensemble des points du plan à coordonnées entières, sur lesquels on pourra éventuellement placer des jetons. Une opération consiste à enlever un jeton situé en (x, y) et à en placer un en $(x+1, y)$ et un en $(x, y+1)$ si aucun de ces deux points ne possède déjà un jeton, sinon l'opération est impossible.

Initialement, on a placé un jeton sur chacune des cases $(0,0)$,$(1,0)$ et $(0,1)$. Prouver qu'il est impossible de libérer ces trois points en un nombre fini d'opérations.

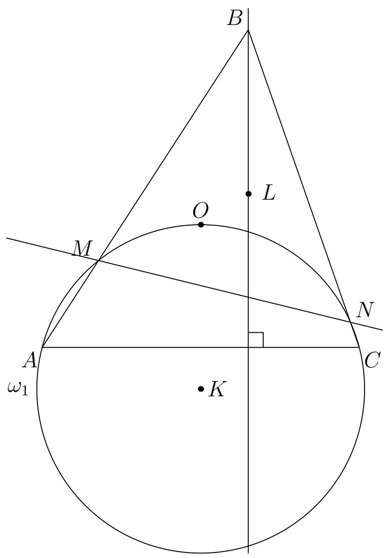
Géométrie

Exercice 50 (Le Monde *du 7 août 2007*). Soit ABC un triangle équilatéral, et un cercle coupant les 3côtés. Montrer que la somme des distances en gras est égale à la sommedes distances en pointillés.



Exercice 51 (*Canada, 1982*). Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On fixe un point O et on construitun quadrilatère $A'B'C'D'$ en posant $\overrightarrow{OA'} = \overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{OD'} = \overrightarrow{DA}$, Montrer que l'aire de $A'B'C'D'$ est double de celle de$ABCD$.

Exercice 52 (*Russie, 2000*). Soit ABC un triangle aigu, ω son cercle circonscrit, et O lecentre de ω. On note ω_1 le cercle de centre Kcirconscrit à AOC. Il coupe (BA) et (BC) en M et N. Soit L leréflexion de K par rapport à (MN). Montrer que (BL) estperpendiculaire à (AC).



Exercice 53. Soient Γ un cercle, D une droite et a une longueur donnés.Construire une droite parallèle à D coupant lecercle Γ en deux points situés à une distance a.

Exercice 54. On considère trois droites parallèles D_1, D_2, D_3.Construire un triangle équilatéral $A_1A_2A_3$ tel queles points A_1, A_2, A_3 appartiennent respectivementaux droites D_1, D_2, D_3.

Exercice 55. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle équilatéralABC. Soit M un point de l'arc d'extrémités B et C necontenant pas A. Montrer qu'on a $AM = BM + CM$.

Exercice 56. Soit ABC un triangle, construire à la règle et aucompas un carré dont un sommet appartient au côté AB,un sommet au côté AC et deux sommets adjacentsappartiennent au côté BC.

Exercice 57. Soit $A_1A_2A_3$ un triangle et P_0 un point duplan. On définit $A_s = A_{s-3}$ pour $s \geq 4$. Onconstruit une suite $P_1, P_2, P_3, \dots$ de sorte queP_k soit l'image de P_{k-1} par la rotation decentre A_{k+1} et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Montrer quesi $P_{2007} = P_0$, alors le triangle $A_1A_2A_3$ estéquilatéral.

Exercice 58. Étant donnés trois cercles deux à deux disjoints,tracer les trois points d'intersection des tangentesextérieures communes à chaque paire de cercles. Montrerque ces trois points sont alignés.

Exercice 59 (*OIM 1978*). Soit ABC un triangle isocèle en A et Γ soncercle circonscrit. On note γ le cercle tangent aux droitesAB et AC et tangent à Γ intérieurement. On note P, Q, R les points de contact de γ avec AB, AC, Γrespectivement. Enfin, ω est le centre de γ, J est lemilieu de $[PQ]$ et K le milieu de $[BC]$.

Justifier l'égalité $\frac{AK}{AR} = \frac{AJ}{A\omega}$. Endéduire que J est le centre du cercle inscrit à ABC.

Exercice 60 (*L'angle au centre*). Soient quatre points A, B, M et N sur un cercle Γ de centre O. Prouver la célèbre égalité $(MA, MB) = (OA, OB)/2 = (NA, NB)$.

Exercice 61 (*Théorème de Miquel*). Soit ABC un triangle et P, Q, R trois points situéssur les côtés BC, CA, AB respectivement. Alors lescercles circonscrits aux triangles ARQ, BPR, CQPpassent par un point commun.

Exercice 62 (*Ptolémée*). Soit $ABCD$ un quadrilatère. Prouver l'inégalité suivante :

$$AC.BD \leq AB.CD + BC.DA,$$

avec égalité si et seulement siles points A, B, C, D sont cocycliques dans cet ordre (cequi signifie que les droites (AC) et (BD) se coupent àl'intérieur du cercle).

Exercice 63 (*Puissance d'un point par rapport à un cercle*). Soient un cercle Γ et un point P. Soit D une droite passantpar P et coupant le cercle en A et B (éventuellementconfondus). Montrer que le produit $PA \cdot PB$ ne dépend que de Pet de Γ, pas de la droite D. On l'appelle *puissance du point* P par rapport au cercle Γ.

Exercice 64 (*Axe radical de deux cercles*). Soit deux cercles Γ_1, Γ_2 de centres respectifs O_1, O_2. Montrer que l'ensemble des points Ptels que les puissances de P par rapport aux cercles Γ_1 et Γ_2 soient égales est une droite perpendiculaire á (O_1O_2). On l'appelle *axe radical* des cercles Γ_1 et Γ_2.

Exercice 65. Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles se coupant auxpoints A et B. Soit Δ une tangente communeà Γ_1 et Γ_2, C et D les points de contactsde Δ avec Γ_1 et Γ_2. Soit P l'intersectiondes droites (AB) et (CD), montrer qu'on a $PC = PD$.

Exercice 66 (*Point radical de trois cercles*). Soit Γ_1, Γ_1, Γ_3 trois cercles. Montrer que leurs troisaxes radicaux Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont soitconfondus, soit concourants, soit parallèles.

Exercice 67. Soit A et B les intersections de deux cerclesΓ_1 et Γ_2. Soit CD une corde de Γ_1 et Eet F les secondes intersections respectives des droites CAet BD avec Γ_2. Montrer que les droites (CD) et(EF) sont parallèles.

Exercice 68 (*Droite de Simson*). Soit Γ un cercle et A, B, C trois points de Γ. Soit P un point du plan, P_A, P_B, P_C ses projections sur les droites $(BC), (CA), (AB)$. Montrer que les points P_A, P_B, P_C sont alignés si etseulement si P appartient à Γ.

Exercice 69. Soit l une droite passant par l'orthocentre dutriangle ABC. Montrer que les symétriques de l parrapport aux côtés du triangle passent par un même point,montrer que ce point appartient au cercle circonscrità ABC.

Exercice 70 (*OIM 1995*). Soit A, B, C, D quatre points distincts placés dans cetordre sur une droite. Les cercles de diamètres $[AC]$ et $[BD]$se coupent en X et Y. La droite (XY) coupe (BC) en$Z$. Soit P un point distinct de Z sur la droite (XY).La droite (CP) coupe le cercle de diamètre AC en Cet M, et la droite (BP) coupe le cercle dediamètre BD en B et N. Prouver que les droites(AM), (DN), (XY) sont concourantes.

Exercice 71 (*Triangle orthique*). Soit H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issuesrespectivement des sommets A, B, C d'un triangleacutangle (dont tous les angles sont aigus), soit Hl'orthocentre de ce triangle. Montrer que

(i) les triangles AH_BH_C, H_ABH_C, H_AH_BC sontdirectement semblables entre eux et indirectementsemblables au triangle ABC,

(ii) les hauteurs du triangle ABC sont les bissectricesintérieures du triangle $H_AH_BH_C$, appelé *triangle orthique*,

(iii) les symétriques de H par rapport aux troiscôtés du triangle ABC appartiennent au cercle circonscrità ABC.

Exercice 72 (*Le grand Triangle, le cercle et la droite d'Euler*). Dans un triangle ABC, on note A', B', C' les milieux respectifs des côtés BC, CA, AB, H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issuesde A, B, C.

(i) Montrer que les médianes $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourrantes en un point G, qui divise chaque médianeen deux segments dont le rapport des longueurs vaut 2.

(ii) Montrer que les médiatrices de chaque côté du triangle sont concourantes en un point O, centre du cercle circonscrit à ABC.

(iii) Montrer que les hauteurs $(AH_A), (BH_B), (CH_C)$ sont concourantes en un point H, qu'on appelle *orthocentre*du triangle ABC.

(iv) Soit P_A, P_B, P_C les milieux respectifs de HA, HB, HC. Montrer que les neuf points A', B', C', H_A, H_B, H_C, P_A,P_B, P_C appartiennent à un même cercle appelé *cercle d'Euler*,de centre Ω, milieu du segment $[OH]$, et derayon $R/2$.

Exercice 73 (*Propriétés des bissectices*). Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle Γ decentre O. Soit I le centre du cercle inscrit, I_A laseconde intersection de la bissectrice intérieure issue de Aavec Γ. Montrer que

(i) les droites (I_AO) et (BC) sontperpendiculaires,

(ii) le cercle de centre I_A passant par B et C passeégalement par le point I.

Exercice 74. Soit ABC un triangle acutangle, soient L et N lesintersections de la bissectrice interne de l'angle Aavec (BC) et avec le cercle ciconscrit à ABC. Soient K et$M$ les projections de L sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$.Montrer que l'aire du quadrilatère $AKNM$ est égale à celledu triangle ABC.

Exercice 75. Montrer que les symétriques de chaque sommet d'untriangle par rapport au côté opposé sont alignés si etseulement si la distance de l'orthocentre au centre du cerclecirconscrit est égale à son diamètre.

Exercice 76. Soit ABC un triangle, soit $A'B'C'$ un triangledirectement semblable à ABC de telle sorte que Aappartienne au côté $B'C'$, B au côté $C'A'$ et C aucôté $A'B'$. Soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, H son orthocentre et H' celui de $A'B'C'$. Montrerqu'on a $OH = OH'$.

Arithmétique

Exercice 77 (*USAMO, 1992*). On note a_n le nombre qui s'écrit en base 10 avec 2^n chiffres«9», pour $n \geqslant 0$. Soit $b_n = a_0 a_1 \cdots a_n$ le produit despremiers a_k. Quelle est la somme des chiffres de b_n ?

Exercice 78 (*Canada, 1970*). Trouver tous les entiers dont l'écriture décimale commence par 6,qui sont divisibles par 25 si on leur enlève le premier chiffre.Montrer qu'il n'existe pas d'entier divisible par 35 si on lui enlèveson premier chiffre.

Exercice 79. Calculer la décomposition en facteurs premiers de 99. En déduireun critère de divisibilité par 11. Calculer la décomposition enfacteurs premiers de 1001. En déduire un critère de divisibilitépar 7, 11 ou 13 : par exemple 12142 est divisible par 13.

Exercice 80 (*Canada, 1983*). Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe une infinitéd'entiers n tels que p divise $2^n - n$.

Exercice 81 (*Engel*). Montrer que dans la suite $a_n = \sqrt{24n+1}$ figurent tous lesnombres premiers sauf 2 et 3.

Exercice 82 (*Engel*). Montrer que si $2 + 2\sqrt{28n^2+1}$ est un entier, c'est même uncarré parfait.

Exercice 83 (*Théorème de Wilson*). Montrer que si p est un nombre premier, p divise $(p-1)!+1$. Montrerque si n n'est pas un nombre premier, n ne divise pas $(n-1)!+1$. Calculer le reste de la division de $(n-1)!$ par n.

Exercice 84 (*Canada, 1985*). Montrer que $n!$ est divisible par 2^{n-1} si et seulement n estune puissance de 2.

Exercice 85 (*Engel*). Montrer que l'équation $x^3 + 3 = 4y(y+1)$ n'a pas de solutions entières.

Exercice 86 (*Canada, 1981*). Montrer qu'il n'existe pas de réel x tel que

$$\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \lfloor 4x\rfloor + \lfloor 8x\rfloor + \lfloor 16x\rfloor + \lfloor 32x\rfloor = 12345.$$

Exercice 87 (*Canada, 1996*). Soient $r_1,\dots,r_m$ des rationnels positifs tels que $r_1+\cdots+r_m = 1$. On pose $f(n) = n - \sum\lfloor r_i n\rfloor$. Quelles sontles valeurs minimales et maximales prises par $f(n)$?

Exercice 88. Montrer que si deux entiers peuvent s'écrire sous la forme $a^2 - 7b^2$ (avec a et b deux entiers), leur produit peut encores'écrire sous cette forme.

Exercice 89 (*Canada, 1994*). Montrer que pour tout $n > 0$, $(\sqrt{2}-1)^n$ est de la forme $\sqrt{k} - \sqrt{k-1}$.

Exercice 90. Calculer le PGCD de $a^p - 1$ et $a^q - 1$, où a, p, q sontdes entiers.

Exercice 91 (*Canada, 1993*). Montrer qu'un nombre x est rationnel si et seulement si on peut trouverdes entiers a, b et c distincts tels que $x+a$, $x+b$, $x+c$ sonten progression géométrique.

Exercice 92 (*Canada, 1988*). On considère un ensemble de r entiers naturels $S = \{a_1,\dots,a_r\}$. Si A est une partie non-vide de S, on note p_A le produitde ses éléments, et $m(S)$ la moyenne arithmétique des p_A pour toutesles parties A non-vides de S.

On suppose que $m(S) = 13$ et $m(S\cup\{a_{r+1}\}) = 49$. Calculera_{r+1} ainsi que la valeur des éléments de S.

Exercice 93 (*d'après Roumanie, 2000*). Soit a un entier impair, donné par son écriture en base 2. Trouversimplement, à partir de cette écriture, le plus petit entier n telque $a^n - 1$ soit divisible par 2^{2007}.

Exercice 94 (*Pologne, 2000*). On considère une suite (p_n) de nombres premiers, telle quep_{n+1} soit le plus grand diviseur premier de $p_n + p_{n-1} + 2008$. Montrer que cette suite est bornée.

Exercice 95 (*Roumanie, 2000*). Soient n et k des entiers positifs non nuls fixés. Montrer qu'onpeut trouver des entiers $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > a_5 > k$ tels que

$$n = \pm\binom{a_1}{3} \pm \binom{a_2}{3} \pm \binom{a_3}{3} \pm \binom{a_4}{3} \pm \binom{a_5}{3}.$$

Exercice 96. On veut calculer la suite de Fibonacci modulo 139.

- Vérifier que 12 est solution de l'équation $y^2 = 5$ modulo 139.
- En déduire que les solutions de $x^2 - x - 1 = 0$ modulo 139sont 64 et 76.
- Trouver un entier b tel que $12b = 1$ modulo 139.
- En déduire que si $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, $F_n \equiv b(76^n - 64^n)$ modulo 139.

Exercice 97. Trouver tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que :

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 = y^2$$

Exercice 98. Soient a, b, m, n des entiers naturels vérifiant $a > 1$ et a et b premiers entre eux. Prouver que si $a^m + b^m$ divise $a^n + b^n$, alors m divise n.

Exercice 99. Trouver tous les entiers a, b, c vérifiant $1 < a < b < c$ tels que $(a-1)(b-1)(c-1)$ divise $abc-1$.

Exercice 100. Prouver qu'il existe une infinité d'ensembles de 2007 entiers positifs consécutifs tous divisibles par des nombres de la forme a^{2007} (a entier strictement supérieur à 1).

Exercice 101. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels a tels que $n^4 + a$ ne soit premier pour aucune valeur de n.

1.2 Les solutions

Stratégie de base (groupe A)

Solution de l'exercice 1. L'application qui a un ensemble de trois éléments $\{a, b, c\}$ associe l'ensemble $\{64-a, 64-b, 64-c\}$ est bien définie, bijective, et envoie un ensemble dont la somme des éléments est inférieure à 95 sur un ensemble dont la somme des éléments est supérieure à 95. Cela conclut.

Solution de l'exercice 2. Comme n vaut au moins 5, on peut trouver un triplet de points A, B et C tous de la même couleur. Supposons-le choisi de façon à ce que le triangle ABC soit de périmètre minimal. Montrons que ABC convient. On raisonne par l'absurde. Si ABC ne convient pas, chacun de ses trois côtés contient un point de couleur différente. Les trois points ainsi obtenus forment un triangle monochromatique de périmètre strictement inférieur à celui de ABC, ce qui est la contradiction attendue.

Solution de l'exercice 3. Soient A et B deux points de P à distance maximale. Le polygone P est entiérement contenu dans la bande bordée des deux perpendiculaires à AB passant par A et B respectivement. Soit R le plus petit rectangle s'appuyantsur ces deux droites et contenant P. Les deux côtés de R parallèles àAB contiennent chacun des points C et D de P. Le polygone P étant convexe, il contient entièrement le quadrilatère $ACBD$. Ce dernier est donc d'aire auplus 1, ce qui montre que R est d'aire au plus 2.

Solution de l'exercice 4. Tout nombre entier est le produit d'une puissance de 2 par un nombre impair. Par le principe des tiroirs, on peut trouver deux des 51 nombres choisis qui ont le même facteur impair. L'un est donc multiple de l'autre. On peut aussi démontrer le résultat par récurrence.

Solution de l'exercice 5. On va montrer que le résultat est toujours vrai si l'on remplace 25 par un entier impair n quelconque (supérieur ou égal à 3, pour que le problème ait un sens). On raisonne par récurrence sur n.

Si n est égal à 3, appelons A, B et C les trois personnes. Le triangle ABC n'est pas isocèle. Supposons que AB soit le plus court côté du triangle ABC. Alors A tire sur B et B tire sur A, donc personne ne tire sur C.

Supposons le résultat vrai pour n personnes, et donnons-nous $n+2$ personnes. Soient A et B deux d'entre elles telles que la distance entre eux soit minimale. A tire sur B, et B tire sur A. Si personne ne tire sur A ni sur B, l'hypothèse de récurrence montre que l'une des n personnes restantes s'échappe. Supposons donc que l'ne de ces n personnes tire sur A ou sur B, qui est donc atteint deux fois. Puisqu'il y a $n+2$ tirs et $n+2$ personnes en tout, quelqu'un doit rester sain et sauf.

Solution de l'exercice 6. On suppose que chaque grand-père a au plus 13 petits-enfants. Soit A un des grands-pères. Ses petits enfants forment un ensemble S à $s \leqslant 13$ éléments. Soit x l'un d'entre eux. Il y a au moins sept enfants dans la cour qui ne sont pas des petits-enfants de A. Si y est l'un d'entre eux, l'hypothèse de l'énoncé implique que x et y ont un grand-père commun, que l'on appelle B. C'est le second grand-père de x, qui est donc grand-père de tous les enfants qui ne sont pas dans S. Soit

t le nombre de petits-enfants de B. Soit C le deuxième grand-père de y, et soit u le nombre de ses petits-enfants. Notons t' et u' les nombres respectifs de petits-enfants de B et de C qui sont dans S. Comme u' est non nul, le raisonnement précédent montre que l'on a $t = t' + 20 - s$ et $u = u' + 20 - s$. On a enfin $t' + u' = s$, d'où $s + t + u = 40$, ce qui implique que l'un des entiers s, t et u vaut au moins 14, et conclut.

Solution de l'exercice 7. Soit X l'ensemble des triplets (E_1, E_2, S), où E_1 et E_2 sont deux examinateurs différents ayant le même avis sur le stagiaire S. On va estimer le cardinal de X de deux manières différentes.

Tout d'abord, un couple d'examinateurs étant fixé, on peut trouver au plus k stagiaires le complétant en un triplet élément de X. On a donc $|X| \leqslant k\,b(b-1)$. D'autre part, un stagiaire S étant donné, soit x le nombre d'examinateurs ayant un avis favorable sur S. Le nombre de couples d'examinateurs fournissant avec S un triplet élément de X est $x(x-1)+(b-x)(b-x-1)$. Un argument de convexité montre que cette expression est minimale pour $x = \frac{b+1}{2}$ (car b est impair), auquel cas elle vaut $\frac{(b-1)^2}{2}$. Le cardinal de X est donc supérieur ou égal à $a\frac{(b-1)^2}{2}$. Mettant ensemble les deux inégalités, on conclut.

Solution de l'exercice 8. Soit E un ensemble de 10 entiers naturels à deux chiffres. Il y a $2^{10} - 1 = 1023$ sous-ensembles non vides de E. Pour un tel sous-ensemble,la somme S de ses éléments vérifie $10 \leqslant S \leqslant 90 + 91 + \ldots + 99$,c.à.d. $10 \leqslant S \leqslant 945$.

Il n'y a donc qu'au plus 936 sommes possibles. Le principe des tiroirsassure qu'il existe alors deux sous-ensembles distincts, disons A et B,qui correspondent à la même somme. En éliminant lesséléments communs à A et B, on obtient bien deuxsous-ensembles disjoints dont la somme de tous les éléments sontégales.

Solution de l'exercice 9. Oui.On se donne un repère orthonormé du plan. On considère alors lafamille $\mathscr{F}$ de toutes les droites horizontales Δ_nd'équations de la forme $y = n$, où n décrit $\mathbb{Z}$. Puis, ontrace tous les cercles tangents à deux droites $\Delta_n$consécutives. Il est alors facile de vérifier que chaque point duplan appartient à exactement deux de ces cercles.Pour obtenir la conclusion désirée, il suffit alors d'effectuercette construction pour les 994 familles $\mathscr{F}_1, \ldots, \mathscr{F}_{994}$ deux à deux disjointes où, pour tout i, la famille $\mathscr{F}_i$ est formée des droites d'équations de la forme $y = n + \frac{i}{994}$ lorsque n décrit $\mathbb{Z}$.

Solution de l'exercice 10. On note $M_1, \ldots, M_k$ les points donnés et, pour tout i, ondésigne par n_i le nombre attribué à M_i. On note $S = \sum_{i=1}^{k} n_i$.Soit m_1 le nombre de droites passant par M_1 et au moins un autredes points. Puisque les points ne sont pas tous alignés, on a $m_1 \geqslant 2$. De plus, chacun des autres points appartient à une et une seule deces droites.Soit Δ l'une de ces droites. On sait que $\sum_{M_i \in \Delta} n_i = 0$ donc, en sommant toutes les égalitéssimilaires obtenues pour les autres droites, on en déduit que $S + (m_1 - 1)n_1 = 0$.Supposons que $n_1 \neq 0$. Quitte à changer tous les nombres en leursopposés, on peut supposer que $n_1 > 0$.L'égalité précédente assure alors que $S < 0$.Mais, un raisonnement analogue permet d'affirmer que, pour tout i, lesnombres S et n_i sont de signes contraires. En particulier, $n_i > 0$pour tout i, et donc $S > 0$. Contradiction.Ainsi, $n_1 = 0$.On prouve de même que $n_i = 0$ pour tout i.

Solution de l'exercice 11. *a)* On commence par construire, par récurrence, un groupe de $n+1$personnes qui se connaissent deux à deux : il est clair que l'on peuttrouver deux personnes qui se connaissent. Supposons que pour $p \in \{2, \ldots, n\}$ fixé, on ait réussi à trouver un groupe de $p$personnes qui se connaîssent deux à deux. En complétant cegroupe par $n-p$ personnes quelconques, on forme un groupe de n personnesdont on sait qu'il en existe une $(n+1)^{ième}$ qui les connaîttoutes. En ajoutant cette personne à notre groupe de p personnes, onforme ainsi un groupe de $p+1$ personnes qui se connaîssent deux àdeux.

On considère donc un groupe G de $n+1$ personnes qui se connaissentdeux à deux. Puisque $k = 2n+1$, il reste donc n personnes qui formentun groupe G' disjoint du précédent. Pour ce groupe G',

on sait qu'il existe une personne appartenantnécessairement à G qui en connaît tous les membres. Cettepersonne connaît alors tout le monde.
b) On divise les personnes en $n+1$ paires disjointes, et on suppose que chaque personne connaît toutes les autres sauf celle qui est dans la même paire qu'elle. Ainsi, personne ne connaît tout le monde.Soit G un groupe de n personnes de cette assemblée. Puisqu'il y a $n+1$ paires, c'est donc qu'il existe une paire, disons $\{A, B\}$, dont aucundes deux membres n'est dans G. Par suite, A connaît tous les membresde G, et les conditions de l'énoncé sont satisfaites.

Solution de l'exercice 12. *a)* Puisque f est surjective, il existe un entier $a > 0$ tel que $f(a) = 1$. Soit $b > a$ tel que $f(b)$ soit minimal. Puisque f est injective, on a $f(b) > 1$. On pose $b = a+d$, et donc $d \in \mathbb{N}^*$. Par suite, $a+2d > a+d$, et la minimalité de b assure que $f(a+2d) > f(b)$. Ainsi, $f(a) < f(a+d) < f(a+2d)$, ce qui conclut.
b) La réponse est non.Plus généralement, on va prouver qu'il existe une permutation f de $\mathbb{N}^*$ qui n'est croissante sur aucune progression arithmétique(non-constante) de longueur 4.On divise $\mathbb{N}^*$ en intervalles deux à deux disjoints $I_k = [a_k, a_{k+1}[$, où $a_k = \frac{3^{k-1}+1}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Notons que la suite (a_k) vérifie la relation derécurrence $a_{k+1} = a_k + 3^{k-1}$.On définit maintenant la fonction f sur $\mathbb{N}^*$ par $f(a_k + i) = a_{k+1} - i - 1$ pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \{0, 1, \dots, a_{k+1} - a_k - 1\}$.Il est facile de vérifier que, pour tout k, on a $f(I_k) = I_k$ etque f est strictement décroissante sur I_k. Ainsi, f est unepermutation de $\mathbb{N}^*$.

Par l'absurde : supposons qu'il existe $a, d \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(a) < f(a+d) < f(a+2d) < f(a+3d)$.Puisque f est strictement décroissante sur I_k, cela entraine que $a, a+d, a+2d, a+3d$ sont dans des I_k deux à deux distincts. Il existedonc des entiers p, q, r tels que $p < q < r$ et $a \in I_p, a+d \in I_q, a+2d \in I_r$.De plus, on a $d < a+d < a_{q+1}$ d'où $d < \frac{3^q-1}{2}$, ce qui assureque $2d < 3^q$ et donc que $2d < 3^{r-1}$.Mais $a+d \in I_q$, donc $a+d < a_{q+1} \leqslant a_r$ et ainsi $a_r \leqslant a+2d < a+3d < a_r + 3^{r-1} \leqslant a_{r+1}$.On en déduit que $a+3d \in I_r$, ce qui contredit que $a+2d$ et $a+3d$soient dans des I_k distincts. D'où la conclusion.

Solution de l'exercice 13. Non, c'est impossible.

Les trois piles initiales contiennent chacune un nombre impair de jetonsdonc la première opération consiste forcément à réunirdeux piles en une seule.

- ☞ Si on réunit les piles de 51 et de 49 jetons, on obtient deuxpiles de respectivement 100 et 5 jetons. Ces deux nombres sont desmultiples de 5, et il est facile de vérifier par récurrence quetoutes les configurations accessibles à partir de là ne serontconstituées que de piles qui contenant chacune un nombre de jetonsmultiple de 5.
- ☞ Si on réunit les piles de 51 et de 5 jetons, on a la mêmeconclusion mais pour des multiples de 7.
- ☞ Si on réunit les piles de 49 et de 5 jetons, on a la mêmeconclusion mais pour des multiples de 3.

Ainsi, dans tous les cas, on n'obtiendra jamais une pile ne contenant qu'unseul jeton, et encore moins uniquement des piles de un jeton.

Solution de l'exercice 14. Considérons deux lignes adjacentes, disons L et L'.

On note r (resp. v) le nombre de segments rouges (resp. verts) quirelient une case de L à une case de L'. Il y a alors $n-r$jetons rouges de L adjacents à des jetons verts de L', $n-v$jetons verts de L adjacents à des jetons rouges de L'. Parsuite, le nombre de jetons rouges de L est $n = (n-v)+r$, ce qui conduità $r = v$.

Cela signifie qu'entre deux lignes adjacentes quelconques, le nombre desegments rouges est égal au nombre de segments verts. On en déduitque le nombre total de segments rouges verticaux est égal au nombretotal de segments verts verticaux.

La même démarche permet de prouver que le nombre total de segmentsrouges horizontaux est égal au nombre total de segments vertshorizontaux. La conclusion en découle immédiatement.

Solution de l'exercice 15. La pièce a été visitée 99 fois.

Plus généralement, on considère un palais de $n \times n$pièces, chacune d'entre elles ayant été visitée exactement $p \geqslant 1$ fois, sauf celle située au coin nord-ouest qui a étévisitée exactement deux fois et celle située au coin sud-est qui aété visitée exactement x fois. On va prouver que si n estimpair alors $x = p-1$, et que si n est pair alors $x = 2p-1$.

On commence par colorier chaque pièce alternativement en blanc ou ennoir, comme un échiquier, de sorte que les deux pièces situéesaux coins nord-ouest et sud-est soient noires. Notons que lorsqu'on sedéplace dans le palais, on passe toujours d'une pièce blanche àune pièce noire et réciproquement.

☞ Si n est impair :
En tout, il y a $\frac{n^2+1}{2}$ pièces noires et $\frac{n^2-1}{2}$pièces blanches. Puisque chaque pièce blanche a étévisitée exactement p fois et que la personne est à chaque foissortie d'une pièce blanche pour entrer dans une pièce noire, lenombre total de passages d'une pièce blanche à une pièce noireréalisés pendant la promenade est $p\frac{n^2-1}{2}$.
Mais, si on élimine la première entrée dans la pièce du coinnord-ouest (on vient de dehors), cela correspond au nombre total de visitesde pièces noires au cours de la promenade. La pièce du coinnord-ouest n'a alors été visitée qu'une seule fois. Ce nombre devisites est donc égal à $1+x+p(\frac{n^2+1}{2}-2)$.
Il vient $1+x+p(\frac{n^2+1}{2}-2) = p\frac{n^2-1}{2}$, soit donc $x = p-1$.

☞ Si n est pair :
Le raisonnement est le même mais avec $\frac{n^2}{2}$ piècesnoires et $\frac{n^2}{2}$ pièces blanches. On arrive cette fois à $1+x+p(\frac{n^2}{2}-2) = p\frac{n^2}{2}$, soit donc $x = 2p-1$.

Solution de l'exercice 16. Par l'absurde : supposons qu'un tel placement existe.

Soit 2^n la plus petite somme d'une ligne du tableau. Alors $2^n \geqslant 1+2+\ldots+k$, c.à.d.

$$2^{n+1} \geqslant k(k+1) > 1 \tag{III.1}$$

D'autre part, puisque les autres sommes de lignes sont des puissances de 2au moins aussi grandes, 2^n divise chacune de ces sommes. En sommant surles lignes, on en déduit que 2^n divise la somme de tous les nombresinscrits, à savoir $1+2+\ldots+k^2 = \frac{k^2(k^2+1)}{2}$.

Or, si k est impair, on a $k^2+1 = 2 \mod [4]$ d'où $\frac{k^2(k^2+1)}{2}$ est impair, et ne peut donc être divisible par 2^n. Donc k est pair et 2^n divise $\frac{k^2}{2}$, ce quiconduit à $2^{n+1} \leqslant k^2$, en contradiction avec l'inégalité(III.1).

Solution de l'exercice 17. Pour tout $i \in \{1,\ldots,k-1\}$, on note $\mathscr{P}_i$ l'ensemble desnombres premiers congrus à i modulo k. Puisqu'il y a uneinfinité de nombres premiers et qu'au plus un est divisible par k, leprincipe des tiroirs assure que l'un de ces ensembles, disons $\mathscr{P}_r$, est infini. Soit $(x_j)_{j\geqslant 0}$ la suite des éléments de $\mathscr{P}_r$ rangés dans l'ordre croissant. Pour tout entier $j \geqslant 1$, on a $x_j = x_0 \mod [k]$ donc le nombre $a_j = \frac{x_j - x_0}{k}$ est un entier strictement positif. La stricte croissance de la suite $(a_j)_{j>1}$ découle de celle de $(x_j)_{j\geqslant 1}$.

On pose alors $p = x_0$. Comme, pour tout $n \geqslant 1$, on a $p + ka_n = x_n$,cela conclut.

Solution de l'exercice 18. Puisque $a_1 = 3$ et $a_n > a_{n-1}^2$ pour tout entier $n \geqslant 1$, unerécurrence évidente conduit à $a_n > 2^{2^{n-1}}$ pour tout $n \geqslant 1$.

Une autre récurrence immédiate permet d'affirmer que $2^n > n+3$pour tout $n \geqslant 3$. Combinant ces deux inégalités, on en déduitque, pour tout $n \geqslant 3$, on a $a_n^2 > 2^{2^n} > 2^{n+3}$, et donc $\frac{1}{4}a_n^2 > 2^{n+1}$. (1)

On prouve maintenant par récurrence que $b_n < \frac{1}{2}a_n$ pourtout $n \geqslant 3$:

☞ On a $a_3 = 147$ et $b_3 = 72 < \frac{1}{2}a_3$.

☞ Soit $n \geqslant 3$ un entier fixé pour lequel on suppose que $b_n < \frac{1}{2}a_n$. Alors
$b_{n+1} = b_n^2 + 2^{n+1}$
$\quad < \frac{1}{4}a_n^2 + 2^{n+1}$ d'après l'hypothèse derécurrence

$< \frac{1}{2}a_n^2$ d'après (1)
$< \frac{1}{2}a_n^2 + \frac{3}{2}$
$= \frac{1}{2}a_{n+1}$, ce qui prouve l'inégalitédésirée au rang $n+1$.

Il en découle évidemment que $b_{2003} < a_{2003}$.

Solution de l'exercice 19. Supposons que chaque matin, deux personnes quelconques qui vivent dans un même appartement se serrent la main. On va prouver que le total nombre depoignées de mains est strictement décroissant :

Soit S le nombre de poignées de mains d'un jour donné. Supposonsque $n \geqslant 15$ personnes habitent ce jour-là dans un mêmeappartement surpeuplé et s'en vont chacun dans un nouvel appartement.Ces appartements sont deux à deux distincts, et y vivent déjàrespectivement $a_1, \dots, a_n$ personnes. Le nombre de poignées demains le jour suivant est donc $S' = S - \frac{n(n-1)}{2} + (a_1 + \dots + a_n)$.

Or, en tout, il y a 119 personnes donc $a_1 + \dots + a_n \leqslant 119 - n \leqslant 104$.

Ainsi $S' \leqslant S - \frac{15\times 14}{2} + 104 < S$, comme annoncé.

La suite des nombres de poignées de mains est donc une suite strictementdécroissante d'entiers positifs ou nuls. Elle doit alors être finie.Or, le seul test d'arrêt est qu'il n'y ait plus d'appartement surpeuplé, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 20. Pour toute équipe X (d'un tournoi des n nations quelconque), on noteres-pectivement $v(X)$ et $d(X)$ le nombre de victoires et de défaites de X.

Clairement, pour toute équipe X, on a $v(X) + d(X) = n - 1$.

De plus, puisqu'il n'y a pas de match nul, on a : $\sum_X v(X) = \sum_X d(X) = \frac{n(n-1)}{2}$.

a) Pour le tournoi des 6 nations : Non, c'est impossible.Par l'absurde : Supposons qu'un tel tournoi existe.Si $v(A) = 5$, c'est donc qu'elle a battu toutes les autres équipes, dont B et C. Or, de $d(B) = d(C) = 4$, il s'ensuit que c'est leur seuledéfaite. Pourtant, lors de leur rencontre l'une des deux a bien battul'autre. Contradiction.

Pour le tournoi des 5 nations : Oui, un tel tournoi existe. Par exemple :A gagne contre B, C, D ; B gagne contre C, D, E ; C gagne contre D, E ; D gagne contre E ; E gagne contre A.

b) Supposons que n soit un entier ayant la propriété demandée,et on se donne un tournoi des n nations adéquat, que l'on appelleratournoi *équilibré*.Si l'équipe A gagne le tournoi des n nations avec $v(A) = d(A)$, on adonc $n = 2v(A) + 1$, ce qui prouve que n doit être impair.

Réciproquement, si $n = 2k + 1$ est impair : La façon la plus facile de représenter un tournoi équilibré revient à raisonner comme suit.Identifions les équipes $A_1, \dots, A_n$ avec les sommets d'un n-gonerégulier convexe inscrit dans un cercle Γ. Puisque n estimpair, pour tout i, le diamètre de Γ passant par $A_i$sépare les autres sommets en deux groupes de k équipes. Onconsidère alors le tournoi dans lequel A_i gagne contre toutes leséquipes à sa gauche et perd contre contre toutes celles à sadroite (selon le sens direct).

c) Supposons que n soit un entier ayant la propriété demandéeet donnons-nous un tournoi des n nations adéquat.Supposons de plus que A ait gagné ce tournoi et que B soit secondeavec $d(B) > v(B)$. Alors $v(B) < \frac{n-1}{2}$, et comme le classement se fait sur le nombre de victoires, c'est donc que pour toutes les autreséquipes que A, on a $v(X) \leqslant v(B) < \frac{n-1}{2}$, ce qui assure que $v(X) < d(X)$. S'agissant d'entiers, on a donc $v(X) \leqslant d(X) - 1$. Mais alors :

$$\sum_X d(X) = \sum_X v(X) = v(A) + \sum_{X \neq A} v(X) \leqslant v(A) - (n-1) + \sum_{X \neq A} d(X)$$

d'où $d(A) \leqslant v(A) - (n-1) = -d(A)$.Puisque $d(A) \geqslant 0$, c'est donc que $d(A) = 0$. Cela signifie que A aréalisé le grand chelem. Mais alors, si on « élimine » A, ilreste un tournoi à $n-1$ équipes, que gagne B avec $d'(X) = d(X) - 1$ et $v'(X) = v(X)$ pour toutes les équipes de cetournoi, et en particulier $d'(B) \geqslant v'(B)$. Leraisonnement ci-dessus conduit alors facilement à $d'(B) = v'(B)$, c.à.d. que le sous-tournoi est équilibréet, dans ces conditions, la question 2) nous permet d'affirmer que $n-1$ estimpair, c.à.d. que n est pair.

Réciproquement, si n est pair, on peut construire un tournoiadéquat en commençant par construire un tournoi équilibréavec $n-1$ équipes. Puis à ajouter une équipe qui gagne tous sesmatchs. Finalement, les entiers cherchés sont les entiers pairs.

d) Tout entier $n \geqslant 3$ convient. Il suffit de considérer le tournoi dont les équipes sont $A_1, \ldots, A_n$ et pour lequel l'équipe A_i a battu l'équipe A_j si et seulement si $i > j$. Dans ce cas, on a bien évidemment $v(A_i) = i-1$, et le classement est fait sur l'ensemble des équipes sans avoir à regarder les points.

e) On commence par remarquer que si n est tel qu'il existe un tournoi des n nations pour lequel il est possible de faire le classement des trois premiers sans avoir à regarder les points sans qu'il y ait eu de grand chelem, alors $n+1$ l'est aussi puisqu'il suffit d'ajouter au tournoi précédent une équipe qui perde tous ses matchs pour construire un tournoi adéquat des $n+1$ nations.

On va maintenant prouver que $n = 7$ n'a pas cette propriété. Parl'absurde : Supposons qu'il existe un tel tournoi des 7 nations, dont leséquipes sont A,B,C,D,E,F et G classées dans cet ordre à l'issue du tournoi. Ainsi $v(A) > v(B) > v(C) > v(D) \geqslant v(E) \geqslant v(F) \geqslant v(G)$. Puisqu'il n'y a pas eu de grand chelem, on a donc $v(A) \leqslant 5$.D'où $v(B) \leqslant 4, v(C) \leqslant 3$ et $v(D), v(E), v(F), v(G) \leqslant 2$. Par suite $21 = \frac{7\times 6}{2} = \sum_X v(X) \leqslant 5+4+3+2+2+2+2 = 20$. Contradiction.

Il reste à prouver que $n = 8$ convient. Pour cela, il suffit deconsidérer le tournoi suivant : A gagne contre B,C,D,E,F,G ; B gagne contre C,D,E,F,G ; C gagne contre D,E,F,G ; D gagne contre E,F,H ; E gagne contre F,G,H ; F gagne contre G,H ; G gagne contre H,D ; H gagne contre A,B,C. Le minimum cherché est donc $n = 8$.

f) Pour k donné, on note $f(k)$ le minimum cherché, s'il existe.D'après d) et e), on a $f(0) = 3$ et $f(1) = 8$. La remarque initiale de la question e) reste valable.Supposons $k \geqslant 4$ et considérons un entier n (sous réserve d'existence) pour lequel il existe un tournoi adéquat. Sans perte de généralité, on peut supposer que les trois premiers sont A,B et C dans cet ordre. On a alors $d(A) \geqslant k, d(B) \geqslant k+1, d(C) \geqslant k+2$ et $d(X) \geqslant k+3$ pour chacune des $n-3$ autres équipes du tournoi. Par suite :

$$\frac{n(n-1)}{2} = \sum_X d(X) \geqslant k + (k+1) + (k+2) + (n-3)(k+3)$$

d'où l'on déduit que $n^2 - (2k+7)n + 12 \geqslant 0$, c.à.d. $n \geqslant \frac{2k+7+\sqrt{4k^2+28k+1}}{2}$. Or, pour $k \geqslant 4$, il vient $4k^2 + 28k+1 = (2k+5)^2 + 8k - 24 > (2k+5)^2$ et donc $n \geqslant \frac{2k+7+\sqrt{4k^2+28k+1}}{2} > 2k+6$. La minimalité de $f(k)$ conduit alors à $f(k) \geqslant 2k+7$ pour $k \geqslant 4$.

Réciproquement, on va construire un tournoi adéquat à $2k+7$équipes. On note $A, B, C, D, X_1, \ldots, X_{2k+3}$ les équipes, et on considère le tournoi pour lequel :

- ☞ Le sous-tournoi formé par $X_1, ..., X_{2k+3}$ est un sous-tournoiéquilibré (et donc elles ont chacune $k+1$ défaites entre elles),
- ☞ A a perdu contre $X_1, \ldots, X_k$ et gagné contre les autres X_i,
- ☞ B a perdu contre $X_{k+1}, \ldots, X_{2k}$ et gagné contre les autres X_i,
- ☞ C a perdu contre $X_{2k+1}, X_{2k+2}, X_{2k+3}, X_1, \ldots, X_{k-3}$ et gagné contre les autres X_i,
- ☞ D a perdu contre $X_{k-2}, \ldots, X_{2k-3}$ et gagné contre les autres X_i,

et, de plus A a battu B,C,D, B a battu C,D et C a battu D.Il est facile de vérifier qu'alors $d(A) = k$, $d(B) = k+1$, $d(C) = k+2$, $d(D) = d(X_i) = k+3$ pour $i = 1, \ldots, 2k-3$ et que $d(X_i) = k+4$ pour $i = 2k-2, \ldots, 2k+3$, ce qui montre que le tournoi est biendu type souhaité. Ainsi $f(k) = 2k+7$ pour $k \geqslant 4$.

Pour $k \in \{2,3\}$, la première partie du raisonnement ci-dessuss'applique mot à mot pour conduire à $f(k) \geqslant \frac{2k+7+\sqrt{4k^2+28k+1}}{2}$ et donc à $f(2) \geqslant 10$ et $f(3) \geqslant 12$. Réciproquement, on considère le tournoi des 10 nations suivant :

- ☞ Les équipes $X_1, \ldots, X_7$ forment un sous-tournoiéquilibré (ce qui leur donne déjà à chacune 3 défaites),
- ☞ A a perdu contre X_1 et X_2 et gagné contre les autres X_i,
- ☞ B a perdu contre X_3 et X_4 et gagné contre les autres X_i,

☞ C a perdu contre X_5 et X_6 et gagné contre les autres X_i

et, de plus A a battu B et C et B a battu C. Ainsi, on a $d(A) = 2$, $d(B) = 3$, $d(C) = 4$ et $d(X_i) \geqslant 5$ pour tout i.Par conséquent, on a $f(2) \leqslant 10$ et donc $f(2) = 10$.

On considère maintenant le tournoi des 12 nations suivant :

☞ Les équipes $X_1, \dots, X_9$ forment un sous-tournoiéquilibré (ce qui leur donne déjà à chacune 4 défaites),

☞ A a perdu contre X_1,X_2 et X_3 et gagné contre les autres X_i,

☞ B a perdu contre X_4,X_5 et X_6 et gagné contre les autres X_i,

☞ C a perdu contre X_7,X_8 et X_9 et gagné contre les autres X_i,

et, de plus A a battu B et C et B a battu C.Ainsi, on a $d(A) = 3$, $d(B) = 4$, $d(C) = 5$ et $d(X_i) = 6$ pour tout i.Par conséquent, on a $f(3) \leqslant 12$ et donc $f(3) = 12$.

Finalement, on a $f(0) = 3$, $f(k) = 2k + 6$ pour $k = 1, 2, 3$ et $f(k) = 2k + 7$ pour $k \geqslant 4$.

Solution de l'exercice 21. On vérifie facilement que la quantité $f(a, b, c) = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$ est invariante par lesopérations autorisées.Or $f(1, 21, 42) = 316$ et $f(5, 13, 40) = 224$, d'où l'impossibilité.

Remarque : cet invariant ne sort pas de nulle part et peut se trouver encherchant une quantité symétrique en a, b, c qui, pour a et $b$fixés, a pour racines c et $2a + 2b - c$. On regarde du côté desexpressions du second degré, et celle que l'on cherche doit être dela forme $c^2 - (2a + 2b)c + r$, où r est indépendant de c. Ondétermine ensuite r en utilisant la symétrie par rapport auxvariables.

Stratégie de base (groupe B)

Solution de l'exercice 22. *a)* D'après le principe des tiroirs, il y a au moins deux entiers qui se termient par les mêmes deux derniers chiffres. Leur différence est alors un multiple de 100.
b) Considérons les tiroirs étiquetés de la façon suivante :

$$(000), (001, 999), (002, 998), (003, 997), \dots, (498, 502), (499, 501), (500)$$

et plaçons les 502 entiers dans ces tiroirs en fonction de leurstrois derniers chiffres. Comme il n'y a que 501 tiroirs, au moinsl'un des tiroirs contient deux entiers. Si c'est le tiroir (000) ou(500), de même que dans la question *a)*, on conclut que la différence des deux entiers est multiple de 1000. S'il s'agit d'unautre tiroir, on doit distinguer deux cas : soit les entiers se terminent par les trois mêmes chiffres et alors leur différence est multiple de 1000, soit ils se terminent chacun par un des nombres étiquettant le tiroir et c'est alors leur somme qui est multiple de 1000.
c) Pour tout $i \leqslant n$, notons $S_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. On a l'alternative suivante :

☞ soit il existe des indices $i < j$ tels que $S_i \equiv S_j \pmod{n}$, et alors la différence $S_j - S_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j$ est multiple de n

☞ soit les S_i atteignent tous les restes modulo n, et en particulier 0 est atteint ce qui donne une somme multiple de n.

Solution de l'exercice 23. Notons n le nombre de personne de l'ensemble. Le nombre de connaissance de chaque personne est compris entre 0 et $n - 1$. Il y a donc n possibilités. Comme il y a également n personnes, si la conclusion de l'énoncé n'est pas valide, c'est que chacune des n possibilités apparaît effectivement. En particulier, il y a une personne qui connaît tout le monde et une autre qui ne connaît personne, mais ceci est manifestement impossible puisque ces deux personnes doivent,oui ou non, se connaître.

Solution de l'exercice 24. Soit (x_0, y_0) un point sur lequel la fonction f atteint son minimum, disons m. (Il existe bien puisque f est supposée à valeurs dans $\mathbb{N}$.) L'équation fonctionnelle implique alors immédiatement que $f(x_0-1, y_0) = f(x_0, y_0+1) = f(x_0+1, y_0) = f(x_0, y_0-1) = m$. En effet, puisque m est le minimum, ils sont tous plus grands ou égaux à m et si l'un d'eux était strictement plus grand, un autre devrait être strictement plus petit pour satisfaire l'égalité.En propageant le raisonnement, on obtient bien la constance de f.

Solution de l'exercice 25. Nous allons montrer par récurrence que $a_n = n$ pour tout n. Pour l'initialisation, on applique la condition de l'énoncé avec $n = 1$ quidonne $a_1^3 = a_1^2$ et donc bien $a_1 = 1$ puisque a_1 est strictement positif donc en particulier non nul.

Supposons maintenant que $a_i = i$ pour tout $i < n$ et montrons que$a_n = n$. On a par hypothèse :

$$(1+2+\cdots+n-1+a_n)^2 = 1^3+2^3+\cdots+(n-1)^3+a_n^3$$

ce qui après simplification donne l'équation $a_n^2 = a_n + n(n-1)$. Cette dernière se factorise sous la forme $(a_n - n)(a_n + n - 1) = 0$ et a donc pour unique solution positive $a_n = n$, comme voulu.

Solution de l'exercice 26. Pour que l'hypothèse de l'énoncé soit vérifiée avec $k = 1$, on doitnécessairement avoir $a_1 = 1$ et pour qu'elle soit vérifiée avec$k = 3$, on doit avoir $a_2 = 2$ ou 3. On a donc bien$a_n \leqslant n^2$ pour $n = 1$ et $n = 2$.

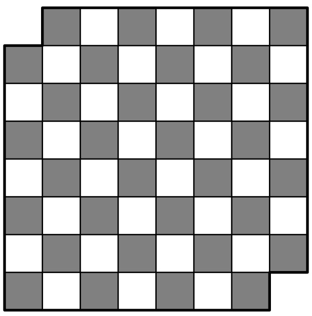
Supposons maintenant par l'absurde qu'il existe un rang $n > 2$ tel que$a_n > n^2$. L'hypothèse de l'énoncé assure que les entiers comprisentre 1 et n^2 s'obtiennent comme l'un des nombres $a_1, \ldots, a_{n-1}$ ou comme une somme de deux des nombres précédents. Or, on peutformer exactement $\frac{n(n-1)}{2}$ additions différentes (en ne tenantpas compte de l'ordre) avec les nombres précédents, ce qui assure quel'on obtiendra au maximum $\frac{n(n-1)}{2}$ résultats différents.Ainsi, doit-on avoir :

$$n-1+\frac{n(n-1)}{2} \geqslant n^2$$

ce qui constitue une contradiction.

Solution de l'exercice 27. On remarque que chaque déchirure augmente le nombre de morceaux de 3. Comme il y a un seul morceau au début, le nombre de morceaux est toujours de la forme $3k+1$. Comme 2006 n'est pas un multiple de 3, 2007 n'est pas de cette forme, et il est donc impossible qu'il resteà un moment 2007 petits bouts de papier.

Solution de l'exercice 28. Sur le coloriage suivant :



chaque domino recouvre une case noire et une case blanche. La pavageest donc impossible puisqu'il y a 32 cases noires et seulement 30cases blanches.

Solution de l'exercice 29. Nous allons montrer que le pavage est possible si, et seulement si$x$ et y sont tous les deux multiples de n. Le sens réciproque est évident. Pour le sens direct, on considère le coloriage du damier en n couleurs $c_1, \ldots, c_n$ obtenu en continuant le motifsuivant :

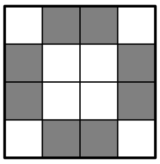
$$\begin{array}{cccccc} c_1 & c_2 & c_3 & \cdots & c_{n-1} & c_n \\ c_2 & c_3 & c_4 & \cdots & c_n & c_1 \\ c_3 & c_4 & c_5 & \cdots & c_1 & c_2 \\ & \vdots & & & \vdots & \end{array}$$

Alors une brique, quelle que soit la façon dont elle est placée, recouvre exactement une case de chaque couleur. Pour conclure, ilsuffit de prouver que si x ou y n'est pas un multiple de n, alors une couleur apparaît plus de fois qu'une autre.

Si x est le nombre de lignes et si $x \geqslant n$, on peut retirer pour faire le décompte les n premières lignes puisque sur ces lignes chaque couleur apparaît autant de fois (en l'occurrence y fois chacune). Enréitérant au besoin l'opération, on peut supposer que $x < n$. Par ailleurs comme x n'est pas multiple de n par hypothèse, on a $x > 0$. En appliquant le même raisonnement sur les colonnes, on peut également supposer $0 < y < n$. Dans ces conditions, la couleur c_y apparaît une et une seule fois sur chaque ligne, contrairement à la couleur c_{y+1} qui n'apparaît pas sur la première ligne et bel et bien une et une seule fois sur les autres. Au final c_y apparaîtune fois de plus que c_{y+1}, et la conclusion s'ensuit.

Solution de l'exercice 30. Chaque opération retire du sac soit zéro, soit deux boules blanches. Ainsi la parité du nombre de boules blanches reste inchangée et comme il y en a 2007 au début, il y en restera toujours au moins une. Il enrésulte simultanément qu'il reste bel et bien une boule à la fin de lamanipulation et que celle-ci est blanche.

Solution de l'exercice 31. La réponse est non. En effet, l'astuce consiste à ne se concentrer que sur les cases grisées sur le schéma ci-dessous, et à remarquer que chaque opération change le signe d'un nombre pair de ces cases.



Ainsi le nombre de + écrits dans les cases grisées garde-t-il toujours la même parité. Dans la configuration initiale ce nombre vaut 5 et donc est impair, alors que dans la configuration que l'on veut atteindre il doit valoir 6 et donc être pair.

Solution de l'exercice 32. À chaque étape, un et un seul des quatre sommets du carré « central » de taille 4×4 augmente d'une unité. Ainsi, après 2003étapes, les quatre sommets de ce carré auront augmenté globalement de2003 unités, et donc leur somme vaudra 2007 comme voulu.

Solution de l'exercice 33. Un tel coloriage existe. Pour le construire, une possibilité consiste à énumérer tous les couples d'entiers naturels (q, r) en une suite (q_k, r_k) et à construire le coloriage par récurrence. Au commencement, aucun entier n'est colorié et à chaque étape on colorie au plus deux entiers de telle façon qu'à chaque pas de la récurrence seulement unnombre fini d'entiers est colorié.Précisément, à la k-ième étape de la récurrence, on considère deux entiers qui apparaissent dans la suite $q_k n + r_n$ et on colorie unde ces entiers en rouge et l'autre en bleu. S'il reste à la fin del'opération des entiers non encore coloriés, on les colorie comme onle souhaite, par exemple tous en rouge.

Alors, aucune des suite $q_k n + r_n$ n'est monochrome puisque l'ona explicitement mis un entier de chaque couleur dans cette suite àla k-ième étape. Par ailleurs comme tous les couples (q, r) ont été énumérées, toutes les suites arithmétiques apparaissent parmi lessuites précédentes. Ainsi le coloriage remplit bien les conditionsdemandées.

Solution de l'exercice 34. Oui. Fixons O un point quelconque du plan, puis colorions le point M du plan en bleu (resp. en rouge) si la distance OM est rationnelle (resp. irrationnelle). Si maintenant M parcourt un segment $[AB]$ nonréduit à un point, la distance OM varie dans un intervalle non trivial et donc passe au moins une fois par un nombre rationnel et un autre fois par un nombre irrationnel.

Solution de l'exercice 35. Considérons un repère orthonormé orienté de telle façon que les centresdes cases de l'échiquier aient pour coordonnées (i,j) avec $1 \leqslant i,j \leqslant 8$. Soit (x,y) les coordonnées du centre de la case choisie. Laquestion de l'énoncé revient à montrer que la double somme :

$$S = \sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} (-1)^{i+j} \left[(x-i)^2 + (y-j)^2 \right]$$

s'annule. Or, on a :

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{8} (-1)^{i+j} (x-i)^2 + \sum_{i=1}^{8} (-1)^{i+j} (y-j)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{8} (-1)^i (x-i)^2 \sum_{j=1}^{8} (-1)^j + \sum_{i=1}^{8} (-1)^i \sum_{j=1}^{8} (-1)^j (y-j)^2 \end{aligned}$$

et il est clair sur cette dernière écriture que S s'annule puisque$\sum_{i=1}^{8} (-1)^i = \sum_{j=1}^{8} (-1)^j = 0$.

Solution de l'exercice 36. *a)* Tous les entiers $k \geqslant 3$ conviennent. Nous le montrons parrécurrence. Pour $k=3$, il suffit de choisir p, q et r des nombres premiers distincts et de considérer l'ensemble $\{pq, qr, pr\}$.Passons et l'hérédité et supposons donné un ensemble $\{a_1, \dots, a_k\}$ qui satisfait la condition de l'énoncé. Soient $p_1, \dots, p_k$des nombres premiers deux à deux distincts qui ne sont facteurs d'aucun des a_i. (Ils existent manifestement puisque l'ensemble des nombres premiersest infini.) Posons $b_i = a_i p_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$ et $b_{k+1} = p_1 p_2 \cdots p_k$. J'affirme que l'ensemble $B = \{b_1, \dots, b_{k+1}\}$de cardinal $k+1$ satisfait encore à la condition de l'énoncé. En effet,si b_i et b_j sont deux nombres de cet ensemble, on a l'alternativesuivantes : soit les indices i et j sont inférieurs ou égaux à $k$et alors $\text{PGCD}(b_i, b_j) = \text{PGCD}(a_i, a_j) > 1$ par hypothèse de récurrence, soit $j = k$ et alors $\text{PGCD}(b_i, b_k) = p_i > 1$. De même,si b_i, b_j et b_ℓ sont trois éléments de B, alors soit lestrois indices i, j et ℓ sont inférieurs ou égaux à k, etalors $\text{PGCD}(b_i, b_j, b_\ell) = \text{PGCD}(a_i, a_j, a_\ell) = 1$, soiton a par exemple $\ell = k$ et alors $\text{PGCD}(b_i, b_j, b_k) = \text{PGCD}(p_i, b_j) = 1$.
b) Non. Pour le prouver on raisonne par l'absurde en supposant que l'ensemble $\{a_1, a_2, \dots\}$ convient. Alors pour tout $i \geqslant 2$, il existe un nombre premier p_i divisant à la fois a_1 et a_i. Les p_i sont donc tous parmi les diviseurs premiers de a_1, ainsi ils ne prennent qu'un nombre fini de valeurs. Par le principe des tiroirs, il existe deux indices i et j (différents) tels que $p_i = p_j = p$. Mais alors p divise à la fois a_1, a_i et a_j, ce qui prouve que ces trois nombres ne sont pas premiers entre eux. C'est une contradiction.

Solution de l'exercice 37. On procède par récurrence sur n. Lorsqu'il n'y a qu'une droite, c'estévident puisqu'il suffit de colorier un demi-plan en bleu et l'autreen rouge. Supposons maintenant qu'il y ait $n+1$ droites. Isolons les$n$ premières droites et considérons un coloriage convenable pour celles-ci. À partir de cela, on obtient un coloriage convenable pour les$n+1$ droites en inversant toutes les couleurs dans un des deux demi-plans délimité par la dernière droite.

Solution de l'exercice 38. On raisonne par récurrence. Lorsque $n = 2$, le sous-ensemble doit êtrede cardinal 4 et donc nécessairement égal à $\{1,2,3,4\}$. Ainsi on abien une solution puisque par exemple $1+2=3$.

Supposons à présent que l'on retienne $n+3$ entiers parmi $\{1, \dots, 2n+2\}$. Si parmi ces entiers retenus, il y en a déjà $n+2$ plus petits ou égaux à $2n$, l'hypothèse de récurrence permet de conclure directement. Sinon, c'est que l'on a retenu $2n+1$ et $2n+2$, et qu'ilreste exactement $n+1$ entiers choisis entre 1 et $2n$. D'après leprincipe des tiroirs, les deux entiers d'un des ensembles $\{1,2n\}$, $\{2,2n-1\}, \dots, \{n, n+1\}$

ont été choisi. La somme de cesdeux entiers fait alors $2n+1$ et on a bien trouvé une solution àl'équation.

<u>*Solution de l'exercice 39.*</u> Montrons dans un premier temps que tout entier $n \geqslant 5$ est académique.Pour cela, nous cherchons la partie $\mathscr{P}$ sous la forme particulière $\mathscr{P} = \{1, a, b\}$ avec $1 < a < b \leqslant n$. Le produitdes éléments de $\mathscr{P}$ est évidemment ab, alors que la somme deséléments de $\mathscr{S}$ vaut $\frac{n(n+1)}{2} - a - b - 1$. Ainsi, onest ramené à résoudre l'équation :

$$ab + a + b + 1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

qui se factorise sous la forme $(a+1)(b+1) = \frac{n(n+1)}{2}$. Si n est pair, il suffit de choisir $a = \frac{n}{2} - 1$ et $b = n$. Si, au contraire, n est impair, on prend $a = \frac{n-1}{2}$ et $b = n-1$.Dans les deux cas, on vérifie que l'inégalité $1 < a < b \leqslant n$ est bien satisfaite puisque $n \geqslant 5$.

Il reste à traiter les cas $n = 2, 3, 4$. Il est passablement clair que2 n'est pas académique. Par contre, 3 l'est puisque l'on peut choisir$\mathscr{S} = \{1, 2\}$ et $\mathscr{P} = \{3\}$. Finalement, en testant toutes les possibilités, on obtient que 4 n'est pas non plus académique.

<u>*Solution de l'exercice 40.*</u> Appelons A l'un des six points. Il part de A cinq segments coloriés.D'après le principe des tiroirs, au moins trois d'entre eux ont la mêmecouleur, disons rouge. Notons B, C et D les extrémités de cessegments. De deux choses l'une : soit les trois segments $[BC]$, $[CD]$et $[BD]$ sont rouges et alors le triangle BCD est monochromatique(rouge), soit l'un des segments précédents disons $[BC]$ est bleu etalors c'est le triangle ABC qui est monochromatique (bleu).

<u>*Solution de l'exercice 41.*</u> On colorie en rouge tous les segments qui sont les plus petits côtés d'un triangle et en bleu les autres. D'après l'exercice précédent, il y a dans cette coloration un triangle monochromatique. Le plus petit côtéde ce triangle étant bleu, tout le triangle est bleu. Le plus grand côté de ce triangle maintenant est donc à la fois un plus grand côté de triangle et un plus petit côté de triangle (puisqu'il est colorié en bleu).

<u>*Solution de l'exercice 42.*</u> On considère la seconde précédente le premier instant où un jeton retourne à sa place d'origine. Appelons J ce jeton. À cette seconde, nous affirmons qu'aucun jeton n'est dans sa position initiale. En effet,déjà, J ne peut être dans sa position initiale puisqu'il va y revenirau coup suivant. Les autres jetons, quant à eux, ne sont pas encore revenus à leur position initiale mais ont nécessairement été déplacéspuisque J a parcouru toutes les cases de l'échiquier, et donc chacunedes positions initiales.

<u>*Solution de l'exercice 43.*</u> On raisonne par l'absurde en supposant que n'importe quelle sphère de rayon 1 contient au plus n points marqués. On considère un point quelconque parmi les $mn+1$ marqués et appelons-le A_1. Par notre hypothèse absurde, la sphère de centre A_1 et de rayon 1 ne contient pas plus de n points. À l'extérieur de cette sphère, il reste donc aumoins $(m-1)n+1$ points. Parmi ceux-là, on en choisit un que l'on appelle A_2 et on recommence le même raisonnement : la sphère de centre A_2 et de rayon 1 contient au plus n points, ce qui entraîne qu'à l'extérieurs des sphères de centre A_1 et A_2, ilreste au moins $(m-2)n+1$ points.

Ainsi de suite, on construit une suite de points marqués $A_1, \ldots, A_m, A_{m+1}$ en s'arrangeant pour que chaque A_i soit à l'extérieur des sphères de centre A_j et de rayon 1 pour $j < i$. Autrement dit, tous les A_i sont deux à deux à distance au moins 1, ce qui contredit l'hypothèse de l'énoncé et résout par là-même l'exercice.

<u>*Solution de l'exercice 44.*</u> Soit k le nombre d'échanges maximum qu'une mathématicien a eu avec les mathématiciens d'un même pays. Appelons Xavier cette personne, France le pays d'origine de Xavier, Japon le pays avec lequel Xavier a eu k échange et Vietnam le troisième pays. Xavier a donc eu des échanges avec k mathématiciens japonais et au moins $n+1-k$ échanges avec des mathématiciens

vietnamiens. On a bien entendu $k \leqslant n$ et donc $n+1-k \geqslant 1$, et également $k \geqslant 1$. Isolons un mathématicienjaponais qui a eu un échange avec Xavier et appelons-le Shin. Supposons par l'absurde que Shin n'ait eu aucun échange avec $n+1-k$ mathématiciens vietnamiens parmi ceux avec lesquels Xavier a discuté. Comme Shin a eu en tout au moins $n+1$ échanges, c'est qu'il a parléavec au moins $k+1$ mathématiciens français. Ce qui contredit la maximalité de k. Ainsi Shin et Xavier ont eu un échange avec unmathématicien vietnamien commun, et cette remarque permet de former letriangle demandé par l'énoncé.

Solution de l'exercice 45. Un seul des triangles du pavage est acutangle. En effet, la remarquefondamentale consiste à dire que les triangles acutangles sereconnaissent comme ceux qui possèdent comme point intérieur le centrede leur cercle circonscrit. Ici, tous les triangles du pavage ont mêmecercle circonscrit, à savoir le cercle cirsoncrit au polygone régulier.Il est alors évident que le centre de ce cercle commun est dans l'intérieur d'un unique triangle. (Il se pourrait *a priori* que le centre soit situé sur un côté qui serait commun à deux triangles, mais en réalité cela ne peut se produire puisque les côtés du trianglesont les diagonales du polygone régulier, et celles-ci ne passent paspar le centre du cercle puisque le polygone a un nombre impair de côtés.)

Solution de l'exercice 46. *a)* La somme des deux entiers écrits sur une carte est toujoursimpaire, puisque pour l'obtenir on additionne deux entiers consécutifs.Ainsi, lorsque l'on somme tous les entiers écrits sur 21 cartes, onobtient encore un nombre impair. Cela ne peut donc pas être 2004.
b) L'idée de base est analogue sauf qu'il faut à présent regardermodulo 4. Remarquons tout d'abord que le nombre 1 apparaît nécessairement sur la même carte que 2. Mais alors, 3 apparaît forcément avec 4 et ainsi de suite. Ainsi une carte comporte lesnombres $2n$ et $2n-1$ pour un certain entier n. Leur somme $4n-1$est congrue à -1 modulo 4. Il s'ensuit que la somme que devraitobtenir Alice est congrue à -21 modulo 4, ce qui n'est pas le casde 2005.
c) Si Bob ne s'était pas trombé, la somme des cartes ramasséespar Alice et Bob serait égale à $2003+1396=3399$. Or à eux deux,ils ont ramassé 41 cartes et donc doivent obtenir une somme supérieureà :

$$(1+2)+(3+4)+\cdots+(79+80)+(81+82)=3403$$

ce qui constitue une contradiction.

Solution de l'exercice 47. Considérons un polygone régulier à 12 côtés inscrit dans le cercle. Ses sommets se répartissent entre quatre triplets, chacun d'eux formantles sommets d'un triangle équilatéral. Ainsi, d'après l'hypothèse de l'énoncé, exactement 8 des 12 sommets du polygone sont jaunes. Parailleurs, on peut également répartir les 12 sommets en trois quadruplets qui sont les sommets de carrés. D'après le principe des tiroirs, au moins un de ces quadruplets regroupe trois points jaunes, ce qui résout la question.

Solution de l'exercice 48. Nous allons montrer par récurrence que le résultat est vrai pour unnombre n impair de personnes. Pour $n=1$ c'est évident puisquepersonne ne tire. Supposons maintenant que l'on ait $n+2$ personnes,pour n un entier impair. Les deux qui sont les plus proches disons Alice et Bob se tirent dessus mutuellement, tandis que les n personnes restantes tirent soit sur Alice, soit sur Bob, soit sur la personne surlaquelle elles auraient tiré si Alice et Bob ne participaient au jeu.Ainsi, toute personne restant sèche si Alice et Bob ne jouent pas n'estpas non plus mouillée lorsque Alice et Bob participent. À ce stade,l'hypothèse de récurrence termine l'exercice.

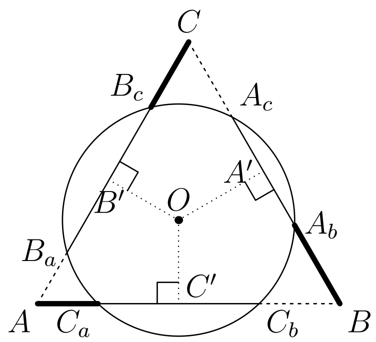
Solution de l'exercice 49. On attribue au point de coordonnée (x,y) le poids 2^{-x-y}. On remarque alors qu'une opération ne modifie la somme des poids despoints occupés par un jeton. Au début, celui-ci vaut $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=2$. Par contre dans une configuration où les trois points $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$ sont libérés, le poids est strictement majorépar :

$$-2+\sum_{x,y\geqslant 0} 2^{-x-y} = -2+\sum_{x\geqslant 0} 2^{-x} \sum_{y\geqslant 0} 2^{-y} = -2+2\times 2 = 2$$

ce qui démontre l'impossibilité.

Géométrie

<u>*Solution de l'exercice 50*</u> *(un généreux contributeur).* Sur la figure suivante, la différence entre les deux distances est aussila différence $(AB' + BC' + CA') - (CB' + BA' + AC')$ où on note A',B', C' les projetés du centre du cercle. Notons $O_1 = O$, O_2, etO_3, les sommets du triangle équilatéral de même centre Ω queABC. Grâce aux rotations d'un tiers de tour autour de Ω, on voitque si H_1, H_2 et H_3 sont les projetés des O_i sur $[AB]$, ladifférence recherchée est $(AH_1 + AH_2 + AH_3) - (BH_1 + BH_2 + BH_3)$.Maintenant, si I est le milieu de $[AB]$, on a en fait $AH_1 + AH_2 + AH_3 = BH_1 + BH_2 + BH_3 = 3AI$.



<u>*Solution de l'exercice 51.*</u> L'aire de ABC est égale à celle de $OA'B'$, et ainsi de suite pour lestrois autres triangles analogues.<u>*Solution de l'exercice 52.*</u> Montrons que LMN et OAC sont semblables. Le triangle OAC estisocèle avec pour angles à la base $\pi - \beta$. D'autre part, l'arc$\widehat{MN}$ vaut $\widehat{AN} + \widehat{MC} - \widehat{AC} = \gamma + \alpha - (\pi - 2\beta) = \beta$, d'où $\widehat{NKM} = \widehat{MLN} = 2\beta$.

La similitude qui envoie BMN sur BCA envoie donc L sur O, et Lest sur l'isogonale de BO, qui est la hauteur issue de B.

<u>*Solution de l'exercice 53.*</u> Soit $\vec{u}$ le vecteur porté par D, delongueur a (et de sens arbitraire). Soit Γ' l'imagede Γ par la translation de vecteur $\vec{u}$. Onappelle A et B les intersections de Γ et Γ'. Ladroite Δ parallèle à D passant par A répond àl'énoncé. En effet la translation de vecteur $-\vec{u}$envoie le point A sur un point C qui, par constructionde A, appartient à Γ et est tel que $AC = a$.

<u>*Solution de l'exercice 54.*</u> Fixons un point A_1 de D_1. Notons r larotation de centre A_1 et d'angle $+\frac{\pi}{3}$. Pourque $A_1A_2A_3$ soit un triangle équilatéral direct ilsuffit que $A_3 = r(A_2)$. Or on veut que les pointsA_2 et A_3 appartiennent respectivement à D_2 etD_3, donc A_3 doit appartenir à l'intersection desdroites $r(D_2)$ et D_3. Ces droites se coupent en ununique point, on a donc A_3 et on trouve A_2 enappliquant à A_3 la rotation $-r$.

<u>*Solution de l'exercice 55.*</u> L'idée est de reporter les longueurs BM et CM sur la droite (AM). La rotation de centre B et d'angle 60° envoie le point M sur un point M' de la droite (AM), situé entre A et M. Le triangle BMM' est équilatéral, donc on a $BM = MM'$. Or la même rotation envoie C en A, donc on a aussi $CM = M'A$. Or on a $MM' + M'A = AM$, d'où $AM = BM + CM$.

<u>*Solution de l'exercice 56.*</u> On construit d'abord un carré $BCDE$ extérieurementau côté $[BC]$ du triangle. Soient D' et E' les intersectionsde (AD) et (AE) avec le côté $[BC]$. Soit h l'homothétiede centre A envoyant D en D', elle envoie demême E en E'. Soit $B'C'D'E'$ l'image de $BCDE$ par$h$. Par construction il s'agit d'un carré. Or les points A, B, B' sont alignés, tout comme les points A, C, C', donc lecarré $B'C'D'E$ est le carré voulu.

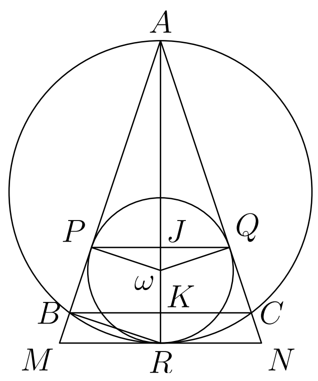
Solution de l'exercice 57. La composée de deux rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$est une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$, donc la composéede 3 rotations d'angle $\frac{2\pi}{3}$ est la composéed'une rotation d'angle $\frac{4\pi}{3}$ et d'une rotationd'angle $\frac{2\pi}{3}$, donc c'est une translation. Enparticulier la composée des trois rotations successivesdécrites autour des points A_0, A_1, A_2 est unetranslation. Soit $\vec{u}$ le vectaur de cette translation, ona alors $\vec{u} = \overrightarrow{P_0P_3} = \overrightarrow{P_3P_6} = \ldots = \overrightarrow{P_{2004}P_{2007}}$. Donc si $P_0 = P_{2007}$, alors$\vec{u}$ est le vecteur nul, et donc l'image de tout point duplan après les trois premières rotations est ce même point. Enparticulier pour A_0, après la première rotation il estenvoyé en A_0, après la seconde il est envoyé en uncertain point B, et après la troisième rotation il retourneen A_0. Comme on a $\widehat{A_0A_1B} = \widehat{BA_2A_0} = \frac{2\pi}{3}$ et $A_0A_1 = A_1B, BA_2 = A_2A_0$, alors les quatrepoints A_0, A_1, B, A_2 forment un losange dont l'angle enA_1 et A_2 vaut $\frac{2\pi}{3}$, donc l'angle enA_0 vaut $\frac{\pi}{3}$, et le triangle $A_0A_1A_2$est équilatéral.

Solution de l'exercice 58. Appelons par exemple Γ_1, Γ_2 et Γ_3 les trois cercles que l'on a à considérer et r_1, r_2 et r_3 leur rayonrespectif. On va supposer en outre que ces trois rayons sont deux àdeux distincts afin que les tangentes dont on doit prendre l'intersection aient bien un point commun.

Appelons maintenant A_{12} le point d'intersection des tangentes extérieures à Γ_1 et Γ_2. Et définissions de même A_{23} et A_{31}. On a vu, dans l'exercice 4, que A_{12} était le centrede l'unique homothétie de rapport $\frac{r_2}{r_1}$ qui transformaitΓ_1 en Γ_2. Appelons h_{12} cette homothétie et définissons de façon analogue h_{23} et h_{31}.

Ce que l'on a dit précédemment prouve directement que $h_{23} \circ h_{12} = h_{31}^{-1}$. Il s'agit donc en fait de prouver un fait trèsgénéral : la composée des homothéties de centre A et B qui est encore une homothétie a son centre sur la droite (AB). Mais pourcela, on regarde l'image d'un point M de la droite (AB) ; il est envoyée par la composée sur un point M' appartenant encore à (AB). Ainsi la droite (AB) reste globalement invariante parl'homothétie composée ; cela prouve que le centre de cette homothétie est bien situé sur cette droite.

Solution de l'exercice 59.



On remarque d'abord qu'il y a beaucoup d'angles droits sur la figure. Il y a les angles $\widehat{AP\omega}$, $\widehat{AQ\omega}$, $\widehat{PJA}$ et $\widehat{BKA}$. Mais il y a aussi l'angle $\widehat{RBA}$, le triangle RBA étant inscrit dans un demi-cercle. On utilisealors deux fois le théorème de Thalès qui fournit les égalités :

$$\frac{AP}{AB} = \frac{A\omega}{AR} = \frac{AJ}{AK}.$$

On en déduit directement l'égalité de l'énoncé.

Pour la seconde question, on introduit l'homothétie h de centre A qui envoie K sur R. On note M et N les images respectives de B et de C par h. La droite (MN) est parallèle à (BC) et donc perpendiculaire à (AR). Ainsi le cercle γ est le cercle inscrit du triangle AMN. Par h^{-1} ce cercle se transforme en un cercle de centre J étant donné l'égalité des rapports démontrée précédemment, qui est évidemment le cercle inscrit du triangle ABC.

Solution de l'exercice 60. Montrons la première égalité, la seconde s'en déduit en échangeant les rôles de M et N. Soit M' le point diamétralement opposé à M sur le cercle Γ. Le triangle MAM' est rectangle en A et O est le milieu de son hypothénuse. On en déduit l'égalité $(MA, MM') = (OA, OM')/2$.Du triangle MBM' on déduit l'égalité $(MB, MM') = (OB, OM')/2$.La somme des deux donne $(MA, MB) = (OA, OB)/2$ comme voulu.

Solution de l'exercice 61. Soit T l'intersection des cercles circonscrits auxtriangles ARQ et BPR. Par colinéarité des points on a

$$\widehat{TQA} = \pi - \widehat{CQT}, \quad \widehat{TRB} = \pi - \widehat{ART}, \quad \widehat{TPC} = \pi - \widehat{BPT}.$$

Parcocyclicité on a

$$\widehat{TQA} = \pi - \widehat{ART}, \quad \widehat{TRB} = \pi - \widehat{BPT}.$$

On déduit $\widehat{TPC} = \pi - \widehat{CGT}$, par conséquent lesquatre points C, P, T, Q sont cocycliques, donc$T$ appartient au cercle circonscrit au triangle CQP.

Solution de l'exercice 62. Soit E l'unique point du plan tel que les triangles ABEet ADC soient directement semblables (c'est-à-dire qu'ilexiste une similitude directe envoyant ABE sur ADC).On a $EB/CD = AB/AD$, d'où $BE = AB.CD/AD$. D'autrepart on a $\widehat{EAC} = \widehat{BAD}$ et $AE/AB = AC/AD$,donc les triangles ACE et ADB sont semblables, d'où $CE = AC.BD/AD$. D'après l'inégalité triangulaire dans letriangle BCE on a $CE \le CB + BE$ avec égalité si etseulement si les points C, B, E sont alignés dans cet ordre.En remplaçant BE et CE par les valeurs obtenues, ontrouve l'inégalité de l'énoncé. L'égalité a lieu si et seulementsi on a $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{ABE} = \pi - \widehat{ADC}$,donc si et seulement si les points A, B, C, D sontcocycliques dans cet ordre.

Solution de l'exercice 63. Soit une autre droite passant par P et coupant lecercle en C et D. On a

$$\widehat{PAC} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = -\widehat{PDB}.$$

Les triangles PAC et PDB sont donc semblables (etd'orientations opposées), d'où $PA/PD = PC/PB$, soit $PA \cdot PB = PC \cdot PD$.

Solution de l'exercice 64. Soient R_1, R_2 les rayons respectifs des cercles Γ_1, Γ_2. Soit P un point du plan quelconque et Δ_1 une tangenteà Γ_1 passant par P et soit T son point de contact avec Γ_1. D'après le théorème de Pythagore, la puissance de P par rapport à Γ_1 vaut$PT^2 = PO_1^2 - R_1^2$.

On en déduit que l'ensemble des points P du plan ayant même puissance par rapport aux cercles Γ_1, Γ_2 est l'ensemble des points vérifiant $PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$, soit $PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2$. Par le théorème de Pythagore, l'ensemble des tels points P est une droiteperpendiculaire à l'axe (O_1O_2) appelé *axeradical* des deux cercles Γ_1 et Γ_2.

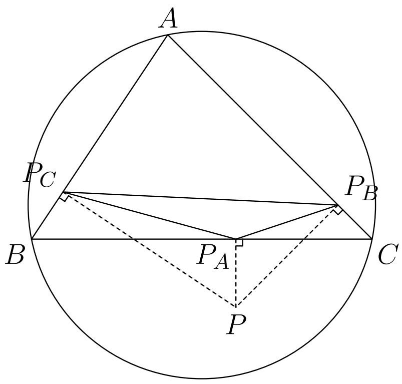
Remarquons que si les deux cercles se coupent en deux points A et B, alorsleur axe radical est la droite (AB). Si les deux cercles sonttangents en un point A, alors leur axe radical est latangente commune qui les sépare.

Solution de l'exercice 65. Le point P est situé sur l'axe radical des deux cercles, donc il a même puissance par rapport aux deux cercles. Or sa puissance par rapport au premier cercle vaut PC^2, et par rapport au second PD^2, d'où $PC = PD$.

Solution de l'exercice 66. Un point appartenant à deux axes radicaux au moins amême puissance par rapport aux trois cercles, donc ilappartient au troisième axe. Donc soit Δ_1 et $\Delta_2$sont confondus et le sont donc avec Δ_3, soit ils ont unseul point d'intersection et ils coupent donc Δ_3 en cetunique point, soit ils sont parallèles et Δ_3 leur est doncparallèle.

Solution de l'exercice 67. Chassons les angles. Par cocyclicité, on a $\widehat{AEF} = \pi - \widehat{ABF} = \widehat{ABD} = \pi - \widehat{ACD}$, donc les droites (CD) et (EF) sontparallèles.

Solution de l'exercice 68. On traitera le cas où les points sont dans laconfiguration de la figure, les autres se traitent de façonsimilaire.



Les points P, P_A, B, P_C d'une part, P, A, P_B, P_C d'autre part sont cocycliques, d'où $\widehat{PP_CP_A} = \widehat{PBP_A} = \widehat{PBC}$ et $\widehat{PP_CP_B} = \widehat{PAP_B} = \widehat{PAC}$. Or les points P, Q, R sont alignés si et seulement si $\widehat{P_AP_CP_B} = 0$, soit $\widehat{PP_CP_A} = \widehat{PP_CP_B}$, donc si et seulement si $\widehat{PBC} = \widehat{PAC}$, donc si et seulement si les points A, B, C, P sont cocycliques.

Solution de l'exercice 69. Soient P, Q, R les points d'intersection de la droite $l$avec les côtés AB, BC, CA du triangle et P', Q', R' lessymétriques de H et l_A, l_B, l_C les symétriques de ladroite l par rapport à ces mêmes côtés. Soit Ml'intersection des droites l_A et l_B. Letriangle $P'Q'R'$ est l'image du triangle orthique de ABCpar l'homothétie de centre H et de rapport 2. On adonc $\widehat{Q'P'R'} = \pi - 2\widehat{A}$. D'autre part on a

$$\widehat{Q'MR'} = 2\pi - \widehat{MQ'H} - \widehat{HR'M} - \widehat{Q'HR'},$$

l'angle $\widehat{Q'HR'}$ étant ici l'angle obtu, on aen considérant l'angle aigu

$$\widehat{Q'MR'} = \widehat{Q'HR'} - \widehat{MQ'H} - \widehat{HR'M} = \widehat{Q'HR'} - (\pi - \widehat{Q'HR'}).$$

Or par cocyclicité on a $\widehat{Q'HR'} = \pi - \widehat{A}$, d'où

$$\widehat{Q'MR'} = -\pi + 2(\pi - \widehat{A}) = \pi - 2\widehat{A} = \widehat{Q'P'R'}.$$

Par conséquent le point M appartient aucercle circonscrit à $P'Q'R'$, il s'agit donc de la secondeintersection de l_A avec ce cercle. On montre qu'il en estde même avec l'intersection des droites l_A et l_C, doncces trois droites sont concourantes. Or le cercle circonscrità $P'Q'R'$ est le cercle circonscrit à ABC, donc les troisdroites l_A, l_B, l_C se coupent sur le cercle circonscrità ABC.

Solution de l'exercice 70. En calculant la puissance de P parrapport aux deux cercles on a $PB \cdot PN = PX \cdot PY = PC \cdot PM$.Par conséquent le quadrilatère $MBCN$ est inscriptible,d'où $\widehat{MNB} = \widehat{MCB}$. Les triangles MAC etBND sont rectangles, on a donc $\widehat{MAC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{MCA} = \pi - \widehat{MND}$. Par conséquent lequadrilatère $AMND$ est inscriptible. Les droites $(XY), (AM), (DN)$ sont les axes radicaux des cercles dediamètres $[AC]$, $[BD]$, et du cercle circonscrit à $AMND$,donc elles sont concourantes.

Solution de l'exercice 71. (i)Montrons que le triangle H_AH_BC est indirectement semblable au triangle ABC, les autres résultats se montrent de la même manière.Les deux triangles partageant l'angle en C, il suffit de montrer $\widehat{ABC} = \widehat{H_AH_BC}$. Comme les angles $\widehat{AH_AB}$ et $\widehat{AH_BB}$ sont droits, les points A, B, H_A, H_B sont cocycliques.On a donc

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABH_A} = \pi - \widehat{AH_BH_A} = \widehat{H_AH_BC}.$$

(ii)D'après la question précédente, les angles $\widehat{CH_AH_B}$ et $\widehat{BH_AH_C}$ sont tous deux égaux à $\widehat{BAC}$, donc la droite (BC) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{H_BH_AH_C}$. Or la hauteur (AH_A) est perpendiculaire à (BC), donc (AH_A) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{H_BH_AH_C}$. On montre de la même manière les autres résultats.

(iii)Pour montrer que le symétrique de H par rapport à la droite (BC) est sur le cercle circonscrit à ABC, il suffit de montrer que l'angle $\widehat{BHC}$ est le supplémentaire de l'angle $\widehat{BAC}$. Or on a

$$\widehat{BHC} = \pi - \widehat{HBC} - \widehat{HCB} = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{BCA}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \widehat{CBA}\right) == \pi - \widehat{BAC}.$$

<u>*Solution de l'exercice 72.*</u> (Voir la figure 1, page 40.)(i)Soit G le point de coordonnées barycentriques $(A;1),(B;1),(C;1)$. Les coordonnées barycentriques de la droite (AG)sont alors $(A;a),(B;1),(C;1)$ pour a variant dans $\mathbb{R}$. Or le point A' a pour coordonnées $(A;0),(B;1),(C;1)$, donc il appartient à la droite (AG). De même on montre que B' appartient à (BG) et C' à (CG). Par conséquent les droites $(AA'),(BB')$ et (CC') sont concourantes.Comme le point G a pour coordonnées $(A;1),(B;1),(C;1)$, il a aussi pour coordonnées $(A;1),(A';2)$, donc le point G est au tiers de la médiane entre A' et A.

(ii) Soit O l'intersection des médiatrices des segment $[AB]$ et $[AC]$.On en déduit les égalités $OA = OB$ et $OA = OC$. Par conséquent on a $OA = OC$, donc le point O est sur la médiatrice du segment $[AC]$, et il est à égale distance des trois points A, B et C. Or le centre du cercle circonscrit est le seul point du plan à satisfaire cette propriété, donc O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

(iii) Soit h l'homothétie de centre G et de rapport -2. D'après (i), l'homothétie h envoie les points A', B' et C' sur A, B et C respectivement. Par conséquent la médiatrice du côté $[BC]$ passant par A' est envoyée par h sur une droite perpendiculaire à (BC) et passant par A, donc sur la hauteur (AH). De même, h envoie les médiatrices des segments $[AB]$ et $[AC]$ sur les hauteurs (CH) et (BH). En particulier, h envoie l'intersection O des médiatrices sur un point H, qui est donc intersection des hauteurs du triangle ABC. Notons alors la relation $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.

(iv) Soit h' l'homothétie de centre G et de rapport $-1/2$. Remarquons que h' est la réciproque de l'homothétie h introduite précédemment. Soit Γ le cercle circonscrit au triangle ABC.L'homothétie h' envoie le triangle ABC sur le triangle $A'B'C'$, donc le cercle Γ est envoyé sur un cercle Γ', circonscrit au triangle $A'B'C'$. Le point Ω vérifie alors $\overrightarrow{G\Omega} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GO}$. Comme on a $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$, on en déduit $\overrightarrow{G\Omega} = \frac{1}{4}\overrightarrow{GO}$, et comme le point G est au tiers du segment $[OH]$, on a $\overrightarrow{\Omega H} = -\overrightarrow{\Omega O}$. Par conséquent le point Ω est le milieu du segment $[OH]$.

Les droites $(A'O)$ et (AH) étant parallèles, le point Ω étant au milieu entre ces deux droites, et la droite (BC) étant perpendiculaire à celles-ci, les points d'intersection A' et H_A de (BC) avec $(A'O)$ et (AH) respectivement sont à égale distance du point Ω. Comme A' est sur le cercle Γ' de centre Ω, le point H_A est aussi sur Γ'. De même on montre que les points H_B et H_C appartiennent au cercle Γ'.

Soit h'' l'homothétie de centre H et de rapport 2. D'après la question (iii) de l'exercice précédent, h'' envoie les points H_A, H_B et H_C sur le cercle Γ circonscrit au triangle ABC. Par conséquent h'' envoie le cercle Γ', passant par H_A, H_B et H_C, sur le cercle Γ. Or les antécédents des points A, B et C par h'', c'est-à-dire les points envoyés sur A, B et C ar h'', sont les points P_A, P_B et P_C. Par conséquent, ces derniers appartiennent au cercle Γ'.

<u>*Solution de l'exercice 73.*</u> (i) Comme les angles $\widehat{BAI_A}$ et $\widehat{CAI_A}$ sont égaux, les arcs du cercle circonscrit compris entre B et I_A et entre C et I_A sont de même longueur. Par conséquent, les segment $[BI_A]$ et $[CI_A]$ sont aussi de même longueur, d'où l'égalité $BI_A = CI_A$. Par conséquent le point I_A appartient à la médiatrice du segment $[BC]$, et donc la droite I_AO est la médiatrice de $[BC]$.

(ii) Montrons que le triangle BII_A est isocèle en I_A. Cela suffit pour montrer l'égalité $BI_A = II_A$. Soit α l'angle égal à la moitié de l'angle $\widehat{BAC}$, soit β la moitié de $\widehat{CBA}$ et γ la moitié de $\widehat{ACB}$. On a donc les relations

$$\widehat{IBI_A} = \widehat{IBC} + \widehat{CBI_A} = \widehat{IBC} + \widehat{CAI_A} = \beta + \alpha$$

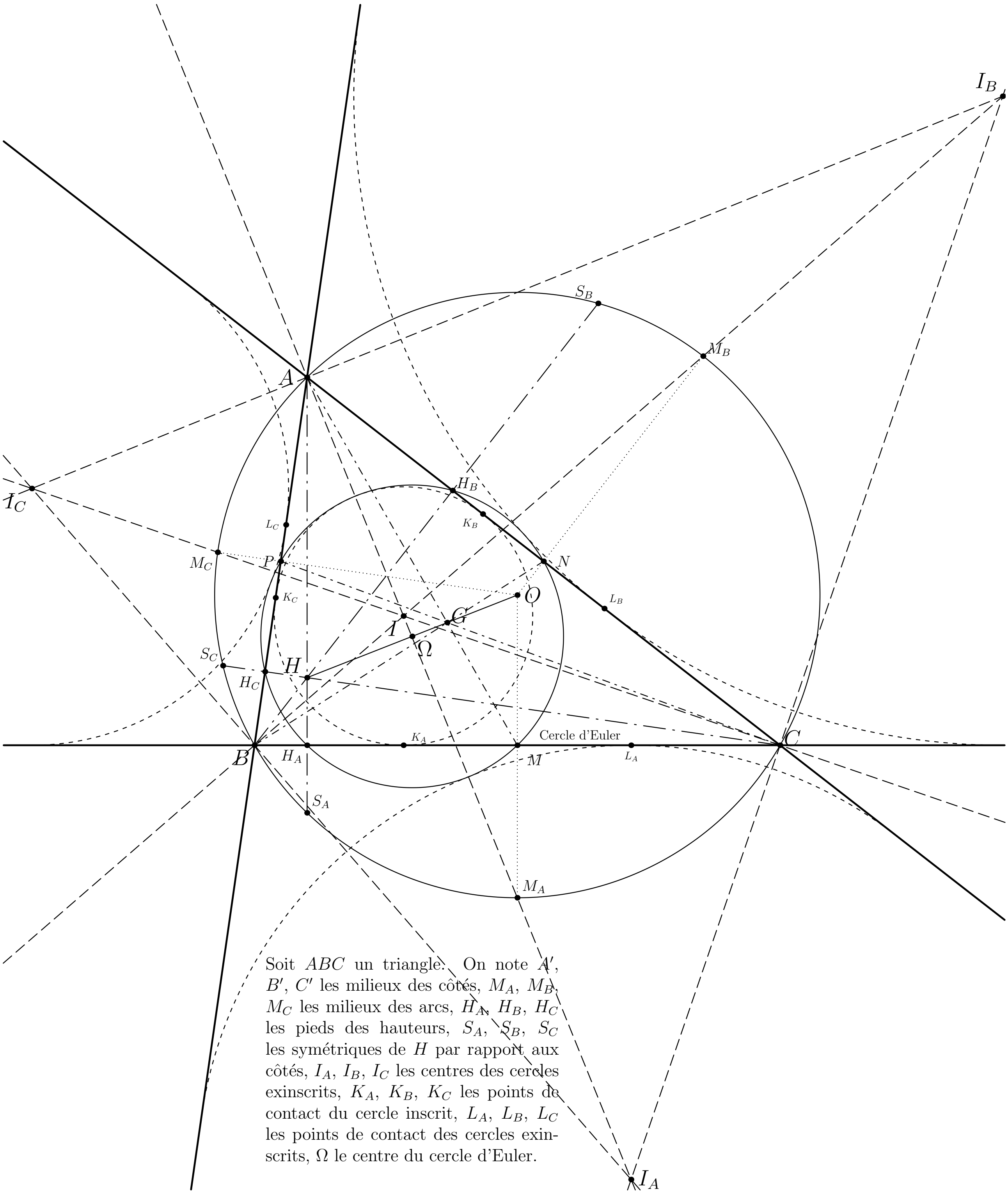
et

$$\widehat{BI_AI} = \widehat{BCA} = 2\gamma.$$

On en déduit

$$\widehat{BII_A} = \pi - \widehat{BI_AI} - \widehat{IBI_A} = \pi - \beta - \alpha - 2\gamma = \alpha + \beta = \widehat{IBI_A}.$$

FIG. 1 – Un triangle et tous ses points remarquables



Par conéquent le triangle BII_A est isocèle en I_A et on a bien $BI_A = II_A$.

<u>*Solution de l'exercice 74*</u>. Soient K' et M' les projections de N sur (AB) et(AC) respectivement. Comme L et N sont sur labissectrice de $\widehat{A}$, on a $KL = LM$ et $K'N = NM'$. Oron a $BN = CN$ et $\widehat{K'BN} = \widehat{M'CN}$, donc lestriangles BNK' et CNM' sont superposables, d'où $BK' = CM'$.

Soit α l'angle moitié de l'angle $\widehat{A}$, on a

$$[ABC] = AB\cdot KL\sin\alpha + AC\cdot LM\sin\alpha = (AB + AC)\cdot KL\sin\alpha.$$

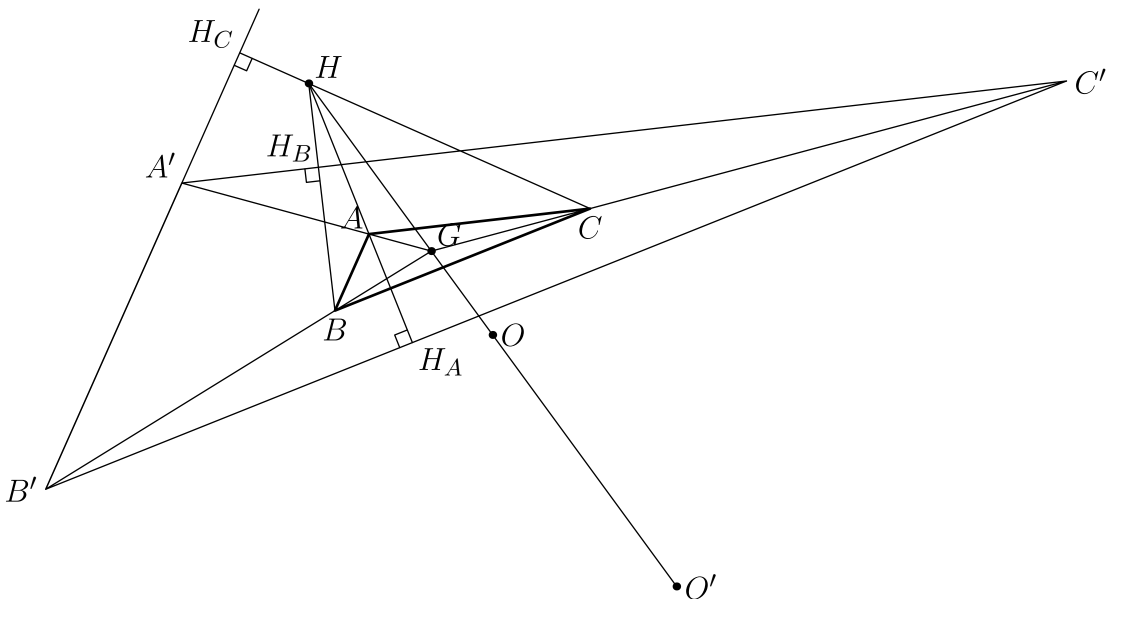
Or on a $AB + AC = AK' + AM'$ d'où

$$[ABC] = (AK' + AM')KL\sin\alpha = [AKLM] + [KLK'] + [LMM'],$$

d'où parparallélisme de (KL) et $(K'N)$ et de (LM) et (NM')

$$[ABC] = [AKLM] + [KLN] + [LMN] = [AKNM].$$

<u>*Solution de l'exercice 75*</u>.



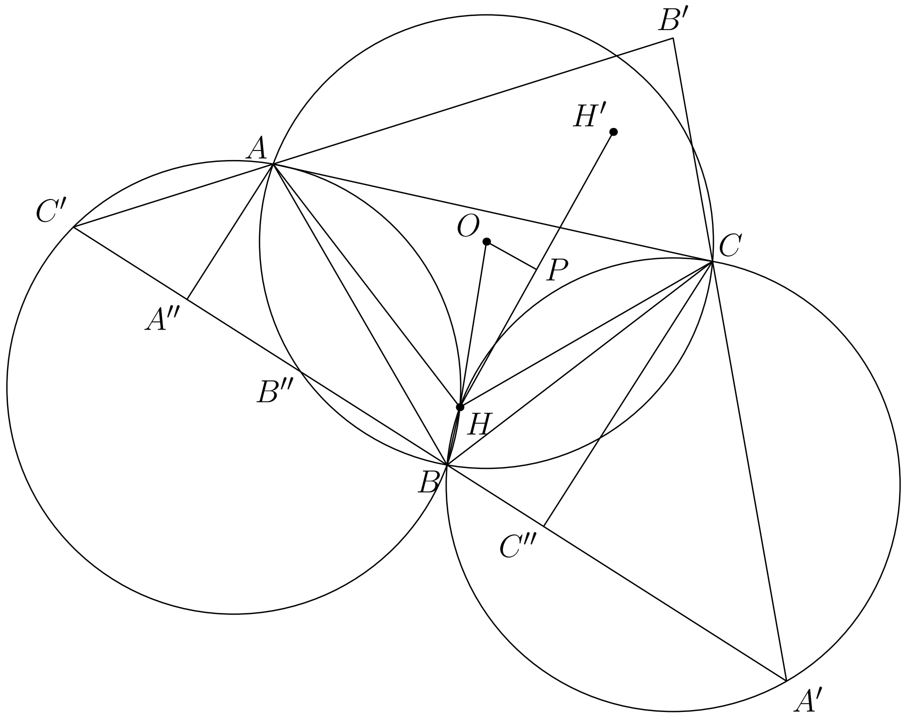
Soit H l'orthocentre du triangle ABC, G son centre de gravité et O le centre de son cercle circonscrit. Soit $A'B'C'$ l'image de ABC par l'homothétie h de centre G et de rapport 4, soient H' et O' les images de H et O par h. Soit H_A, H_B, H_C les projections de H sur les droites $(B'C')$, $(C'A')$, $(A'B')$.

La distance de G à la droite $(B'C')$ est 4 fois la distance de G à la droite (BC) et la distance de A à (BC) est 3 fois cette distance, par conséquent la distance entre A et (BC) est égale à la distance entre les droites (BC) et $(B'C')$, donc le point H_A est le symétrique du point A par rapport à BC. Il en est de même pour les points H_B et H_C. Par conséquent les points H_A, H_B et H_C sont alignés si et seulement si le point H appartient au cercle circonscrit au triangle $A'B'C'$, donc si et seulement si on a $HO' = R(A'B'C') = 4R(ABC)$ en notant $R(ABC)$ le rayon du cercle circonscrit à ABC.

L'image de la droite d'Euler par h est elle-même car G, centre de h, est dessus. On a donc $HO' = HG + GO' = HG + 4OG = 2OG + 4OG = 6OG = 2OH$. Par conséquent H est sur le cercle circonscrit à $A'B'C'$ si et seulement si on a $OH = 2R(ABC)$ et la preuve est finie.

<u>*Solution de l'exercice 76*</u>. Soit O' le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$. Une figure suggère de montrer que les points H et O' sont confondus (bien qu'on ne sache pas encore à quoi cela peut servir).

Comme on a $\widehat{BHC} = \pi - \widehat{BAC} = \pi - \widehat{BA'C}$, les points B, H, C, A' sont cocycliques. De plus le rayon du cercle circonscrit à ces points est égal à celui du cercle circonscrit à ABC puisqu'il s'agit du cercle symétrique par rapport à BC. De même les points A, H, B, C' sont cocycliques et le rayon du cercle passant par ces points est égal à celui du cercle passant par B, H, C, A'. D'après l'exercice 22, la corde $A'C'$ étant commune aux deux cercles, on a $HA' = HC'$, de même on montre $HA' = HB'$ et donc H est le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$, d'où $H = O'$.



Montrer $OH = OH'$ revient à montrer que le triangle HOH' est isocèle en O. Soit P la projection de O sur HH', cela revient encore à montrer que P est le milieu de HH'. Les triangles ABC et $A'B'C'$ étant semblables, il existe une similitude s envoyant ABC sur $A'B'C'$. Soit k le rapport de s et α son angle. On a $HP = HO\cos\alpha$ et $H'H = H'O' = kHO$. On cherche donc à montrer la relation $k = 2\cos\alpha$.

Pour montrer cette relation qui ne dépend que de la construction initiale des triangles, on va complètement oublier les points H, O et H' pour revenir aux seuls côtés des triangles. Soient A'' et C'' les projetés de A et C sur $A'C'$. L'angle entre les droites (AC) et $(A'C')$ valant α, on a $A''C'' = AC\cos\alpha$. Or on a $A'C' = kAC$, donc il suffit de montrer la relation $2A''C'' = A'C'$.

Soit B'' la seconde intersection du cercle circonscrit à ABC avec la droite $(A'C')$. Par cocyclicité des points A, B, C, B'' on a (voir sur la figure pour la position relative des points) la relation $\widehat{AB''C'} = \widehat{ACB} = \widehat{AC'B''}$, donc le triangle $AB''C'$ est isocèle en A. Par conséquent on a $A''C' = A''B''$ et on montre de même $C''A' = C''B''$. La relation recherchée s'obtient par somme de ces deux dernières égalités.

Arithmétique

Solution de l'exercice 77. On note S_n la somme des chiffres de b_n. On a $S_0 = 9$. On a$b_{n+1} = a_{n+1}b_n = 10^{2^{n+1}}b_n - b_n$. Sachant que $a_n$possède 2^n chiffres, b_n possède au plus $2^{n+1} - 1$chiffres (remarquer que le nombre de chiffres d'un produit est auplus la somme des nombres de chiffres des facteurs).

La décomposition

$$b_{n+1} = 10^{2^{n+1}}(b_n - 1) + (10^{2^{n+1}} - b_n)$$

permet de trouver les 2^{n+1} chiffres de la première moitié et dela seconde. On trouve ainsi $S_{n+1} = (S_n - 1) + (9 \times 2^{n+1} - S_n + 1) = 9 \times 2^{n+1}$.

Solution de l'exercice 78. Soit x l'entier recherché, et $n+1$ son nombre de chiffres. Alors$x = 25(x - 6 \times 10^n)$, soit $x = 10^n/4$. Les solssont les 625×10^k, c'est-à-dire les nombres qui s'écrivent$6250\cdots0$.

Si x est un nombre commençant par le chiffre a, on devrait dansle second cas avoir $x = 35(x - a \cdot 10^n)$, c'est-à-dire $a \cdot 10^n = 34x$, ce qui n'est pas possible car 17 ne divise ni$a$ ni 10.

Solution de l'exercice 79. Puisque $100 \equiv 1$ modulo 99, tout nombre est congru à la sommede ses groupes de 2 chiffres en partant de la droite modulo11. Puisque $7 \times 11 \times 13 = 1001$, tout nombre est congrumodulo 7, 11, 13 à la somme alternée de ses groupes de 3 chiffrespartant de la droite.

Solution de l'exercice 80. Si $p = 2$, tous les nombres pairs conviennent. Si $p > 2$, on a$2^{p-1} \equiv 1$ modulo p. On en déduit que pour $n = (kp-1)(p-1)$, où k est un entier positif quelconque, 2^n et $n$sont tous deux congrus à 1 modulo p.

Solution de l'exercice 81. Soit x un nombre impair non multiple de 3. Alors x^2 est congruà 1 modulo 3 et 8, donc modulo 24, et x est de la forme$\sqrt{24k+1}$.

Solution de l'exercice 82. Comme k est multiple de 4, il suffit de montrer que$l = \frac{1+\sqrt{28n^2+1}}{2}$ est lui-même un carré parfait.Or $l(l-1) = 7n^2$. Comme l et $(l-1)$ sont premiers entre eux, si$l$ n'est pas multiple de 7, c'est fini.

Supposons au contraire que l soit multiple de 7. Dans ce cas,c'est $(l-1)$ qui est un carré, donc l est la forme m^2+1 qui nepeut jamais être un multiple de 7.

Solution de l'exercice 83. Si n n'est pas un nombre premier, n divise $(n-1)!$, sauf si$n = 4$. En effet, on peut trouver deux diviseurs stricts d et e,dont le produit est n. Si $d \neq e$, c'est fini, sinon, $(n-1)!$est divisible par d et par $2d$.

Si au contraire p est premier, on associe à chaque entier entre1 et $p-1$ son inverse modulo p, c'est-à-dire un entier $a$entre 1 et $p-1$ tel que $ax \equiv 1$. Chaque entier a un inverseunique, qui est différent de lui-même sauf si et uniquement si $x^2 \equiv 1$, c'est-à-dire si x vaut 1 ou $p-1$. On groupe ainsiles facteurs de $(p-1)!$ en paires d'inverses dont le produit fait1, et il reste -1.

Solution de l'exercice 84. Par la formule de Legendre, l'exposant de 2 dans la décomposition enfacteurs premiers de $n!$ est la somme S_n des $\lfloor n/2^k \rfloor$ pour $k > 0$. Celle-ci est strictement inférieure à $n$puisque tous les termes ne sont pas entiers.

Soit $n = \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i}$ l'écriture en base 2 de n. Onvérifie facilement que $S_n = \sum S_{2^{\alpha_i}} = \sum 2^{\alpha_i} - 1 = n - r$. Donc $S_n = n-1$ si et seulement si $n$est une puissance de 2.

Solution de l'exercice 85. L'équation est équivalente à $x^3 + 4 = (2y+1)^2$, soit $x^3 = (2y+3)(2y-1)$. Donc x est impair. Si p est un diviseur premierde x, p divise soit $2y-1$, soit $2y+3$ mais pas les deux.Donc $2y-1$ et $2y+3$ sont des cubes, ce qui n'est pas possible, carla différence entre deux cubes vaut 0, 1, 2 ou au moins 6.

Solution de l'exercice 86. Remarquons que $12345 = 63 \times 196 - 3$. Soit $N = \lfloor 32x \rfloor$. Alors $12345 = \lfloor N \rfloor + \lfloor N/2 \rfloor + \lfloor N/4 \rfloor + \lfloor N/8 \rfloor + \lfloor N/16 \rfloor + \lfloor N/32 \rfloor$. Si $N' = N - 196$, on a donc $\lfloor N' \rfloor + \lfloor N'/2 \rfloor + \lfloor N'/4 \rfloor + \lfloor N'/8 \rfloor + \lfloor N'/16 \rfloor + \lfloor N'/32 \rfloor = -3$.C'est impossible : si $N' \geqslant 0$, le résultat est au moins zéro, etsi $N' < 0$, chaque terme vaut au plus -1.

Solution de l'exercice 87. Comme $\lfloor r_i n \rfloor > r_i n - 1$, on a $0 \leqslant f(n) < m$. Si Nest un multiple de tous les dénominateurs des r_i, les $r_i N$ sontentiers, donc $f(N) = 0$. On a alors $r_i(N-1) - \lfloor r_i(N-1) \rfloor = r_i(N-1) - (r_i N - 1)$ soit en sommant $f(N-1) = m-1$.

Solution de l'exercice 88. On a

$$(a^2 - 7b^2)(c^2 - 7d^2) = (ac + 7bd)^2 - 7(ad + bc)^2.$$

Solution de l'exercice 89. On pose

$$k=\left(\frac{(\sqrt{2}+1)^n+(\sqrt{2}-1)^n}{2}\right)^2$$

et

$$l=\left(\frac{(\sqrt{2}+1)^n-(\sqrt{2}-1)^n}{2}\right)^2.$$

On a alors $(\sqrt{2}-1)^n=\sqrt{k}-\sqrt{l}$, et$k-l=(\sqrt{2}+1)^n(\sqrt{2}-1)^n=1$. On vérifie par la formule dubinôme que k et l sont entiers.

Solution de l'exercice 90. On utilise l'algorithme d'Euclide pour trouver a^d-1 où d est lePGCD de p et q. On a en effet si $p=bq+r$

$$(a^p-1)=(a^q-1)(a^{q(b-1)+r}+a^{q(b-2)+r}+\cdots+a^r)+a^r-1.$$

Solution de l'exercice 91. Si $x+a$, $x+b$, $x+c$ sont en progression géométrique, c'est-à-dire$(x+b)^2=(x+a)(x+c)$, on a $2bx+b^2=(a+c)x+ac$, soit $x=\frac{b^2-ac}{a+c-2b}$ (il n'est pas possible que $a+c=2b$). Réciproquement, si x est rationnel, on cherche à écrire $x=\frac{b^2-ac}{a+c-2b}$. Posons $c=b+q$ et $a=b-p$, on cherchealors $x=\frac{pb-qb+pq}{q-p}=\frac{pq}{q-p}-b$. Si $x=f/g$, on pose donc $p=f$, $q=f+fg$, $b=f$: ceci signifieque x, $x+f$, et $x+2f+fg$ sont en progrssion arithmétique.

Solution de l'exercice 92. La somme des p_A pour toutes les parties de S, même la partie vide,est égale aux produit des $1+a_i$ (en posant $p_\varnothing=1$). Onpose donc

$$\pi(S):=(2^r-1)m(S)+1=(1+a_1)\cdots(1+a_r)$$

et on note $S'=S\cup\{a_{r+1}\}$.

On a ainsi $\pi(S)=2^r\times 13-12$ et $\pi(S')=2^r\times 98-48$. De plus, $\pi(S)(1+a_{r+1})=\pi(S')$. La formule

$$(2^r\times 98-48)+(2^r\times 6-48)=8\times(2^r\times 13-12)$$

montre que $\pi(S)$ doit diviser $2^r\times 6-48$. Si $r>3$, c'estimpossible, car on aurait $0<2^r\times 6-48<2^r\times 13-12$.

On calcule :

r	$2^r\times 13-12$	$2^r\times 6-48$
1	14	-36
2	40	-24
3	92	0

Donc r vaut 3, $\pi(S)=92$, $\pi(S')=736$ et $a_4=7$. Ensuite

$$\pi(S)=(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)=2^2\times 23$$

a pour diviseurs $1,2,4,23,46,92$, d'où les possibilités$S=\{0,1,45\}$ et $S=\{0,3,22\}$.

Solution de l'exercice 93. L'indicatrice d'Euler de 2^{2007} est 2^{2006}, donc n divise2^{2006} : c'est une puissance de 2. Posons $a=1+m\cdot 2^k$,où m est un entier impair. On a

$$a^n=1+n(m\cdot 2^k)+\frac{n(n-1)}{2}(m\cdot 2^k)^2+\cdots+\binom{n}{p}(m\cdot 2^k)^p+\cdots$$

Lorsque $n = 2^q$ est une puissance de 2, $\binom{n}{p}$ est au moinsdivisible par $2^{q-v_2(p)}$, et le p-ième terme du développementde a^n est divisible par $2^{q-v_2(p)+kp}$ qui est strictementsupérieur à 2^{q+k} si $p > 1$ (en supposant $k > 1$). La plusgrande puissance de 2 qui divise $a^n - 1$ est donc limitée par lesecond terme de a^n. C'est donc 2^{q+k}. Le nombre n recherchéest donc 2^{2007-k} où k est le nombre de chiffres suivantl'avant-dernier 1 dans l'écriture binaire. Par exemple, pour111000101, c'est deux.

Si $k = 1$, on a en fait $a = -1 + m \cdot 2^{k'}$ avec $k' > 1$. Ona alors un développement avec les mêmes termes au signe près, maisle même raisonnement s'applique, et $n = 2^{2007-k'}$, et k' estle nombre de 1 qui suivent le dernier zéro de l'écriture de a,par exemple pour 101011111, c'est cinq.

Solution de l'exercice 94. Soit m_n le plus grand nombre parmi $p_1, \ldots, p_n$. On veutmajorer m_{n+1} : c'est soit m_n, soit le plus grand diviseurpremier de $P = p_n + p_{n-1} + 2008$. Si P est pair, alorsm_{n+1} vaut au plus $P/2 \leqslant m_n + 1004$. Si P est impair,l'un des p_n, p_{n-1} est égal à 2, et $m_{n+1} \leqslant m_n + 2010$.

Ainsi, l'écart entre deux termes successifs de la suite (m_n) (quiest croissante) est majoré par 2010. Elle ne peut donc pasdépasser $2011! + 1$, car aucun des 2010 nombres suivants n'estpremier.

Solution de l'exercice 95. Il faut remarquer que la différence de valeurs successives d'unpolynôme de degré 3 comme $P(x) = \binom{x}{3} = x(x-1)(x-2)/6$ estun polynôme de degré 2. On a ainsi $P(x+1) - P(x) = x(x-1)/2$. Onpeut donc former $P(x+3) - P(x+2) - P(x+1) + P(x) = 2x + 1$.

Choisissons a_5 plus grand que k tel que $P(a_5)$ soit de paritédifférente de x. Posons $P(a_5) + x = 2m + 1$, on pose alors $a_1 = m + 3$, $a_2 = m + 2$, $a_3 = m + 1$, $a_4 = m$. Et alors

$$n = -\binom{a_1}{3} + \binom{a_2}{3} + \binom{a_3}{3} - \binom{a_4}{3} - \binom{a_5}{3}$$

Solution de l'exercice 96. Laissée au lecteur.

Solution de l'exercice 97. L'idée essentielle permettant d'aborder cet exercice, c'est de voir dans « les deux plus gros termes » du membre de gauchele début d'un carré : $x^4 + x^3$ est le début de $\left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 = x^4 + x^3 + \frac{x^2}{4}$, de sorte que, pour tout $x$et tout y entiers naturels, $y^2 = \left(x^2 + \frac{x}{2}\right)^2 + \frac{3x^2}{4} + x + 1$, donc en particulier $y > x^2 + \frac{x}{2}$. Si l'on prouveque $y < x^2 + \frac{x+1}{2}$, alors y ne pourra pas être entier car entre ces deux nombres $x^2 + \frac{x}{2}$ et $x^2 + \frac{x+1}{2}$, distants de $1/2$, dont l'un est entier, il n'y a pas d'entier.

Or
$$\left(x^2 + \frac{x+1}{2}\right)^2 = x^4 + x^3 + \frac{5}{4}x^2 + \frac{x}{2} + \frac{1}{4} = y^2 + \frac{x^2}{4} - \frac{x}{2} - \frac{3}{4} = y^2 + \frac{(x+1)(x-3)}{4}$$

car le trinôme du second degré se factorise élémentairement. Pour $x > 3$, on a bien $\frac{(x+1)(x-3)}{4} > 0$, donc $x^2 + \frac{x+1}{2} > y$, ce qui prouve qu'il n'existe pas d'entier y vérifiant l'équation. En revanche, si $x = 3$, letrinôme étant nul, $y = x^2 + \frac{x+1}{2} = 11$: nous avons là une solution entière de l'équation, $1+3+3^2+3^3+3^4 = 11^2$.Pour $x < 3$, notre méthode ne permet pas de conclure, et ces quelques cas restants doivent être étudiés à la main :

☞ $x = 2$, $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 31$ n'est pas le carré d'un entier,

☞ $x = 1$, $1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$ n'est pas non plus le carré d'un entier,

☞ $x = 0$, $1 + 0 + 0 + 0 + 0 = 1$ est le carré d'un entier, 1.

En définitive, nous avons deux couples solutions : $(0, 1)$ et $(3, 11)$.

Solution de l'exercice 98. Cet énoncé dans sa forme doit instantanément nous évoquer l'identité remarquable suivante : pour tout a et tout b (entiers ou réels,peu importe) et tout n entier supérieur à 2,

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

Écrivons la division euclidienne $n = mq + r$, $(r < m)$. Donc $a^n + b^n = a^r(a^{mq} + b^{mq}) - b^{mq}(a^r - b^r)$ et $a^n + b^n = a^r(a^{mq} - b^{mq}) + b^{mq}(a^r + b^r)$.

Or $a^m + b^m$ divise soit $a^{mq} - b^{mq}$, soit $a^{mq} + b^{mq}$ selon la parité de q. Il en résulte que $a^m + b^m$ doit diviser soit $b^{mq}(a^r - b^r)$, soit $b^{mq}(a^r - b^r)$. Comme a et b sont premiers entre eux, $a^m + b^m$ et b^{mq} ne peuvent pas avoir de diviseurs communs (un nombre premier divisant b^{mq} diviserait b, donc b^m, donc a^m donc a), d'où, en application du théorème de Gauss, $a^m + b^m$ doit diviser soit $a^r - b^r$, soit $a^r + b^r$. Or — propriété essentielle de la division euclidienne — $r < m$. Donc $0 < a^r + b^r < a^m + b^m$ et $a^r + b^r$ ne peut pas être un multiple de $a^m + b^m$ car le quotient serait strictement compris entre 0 et 1. De même, le quotient de $a^r - b^r$ par $a^m + b^m$ est strictement compris entre -1 et 1 : il ne peut être entier que s'il est nul, donc si $r = 0$. Ce qui signifie bien que $a^m + b^m$ ne peut diviser $a^n + b^n$ que si $r = 0$ (donc n multiple de m), et q impair. Cela démontre plus que ce qui était demandé, et nous avons vu que réciproquement, si n est un multiple impair de m, la divisibilité est bien vérifiée.

Solution de l'exercice 99. C'est un autre type d'exercice, où la remarque fondamentale est que si a, b, c sont « grands », alors $(a-1)(b-1)(c-1)$ est trop près de $abc - 1$ pour en être un diviseur.

Il est clair que $(a-1)(b-1)(c-1) < (a-1)bc = abc - bc < abc - 1$. Par contre, si $(a-1)(b-1)(c-1) \geqslant \frac{abc}{2}$, alors $\frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)} < 2$ ne peut pas être entier, car il n'existe pas d'entier strictement compris entre 1 et 2. Or la fonction $\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$ est croissante et tend vers 1 lorsque x croît vers l'infini. En particulier, puisque $1 < a < b < c$, ce qui entraîne $a \geqslant 2$, $b \geqslant a+1$, $c \geqslant b+1 \geqslant a+2$, $\frac{b-1}{b} \geqslant \frac{a}{a+1}$, $\frac{c-1}{c} \geqslant \frac{a+1}{a+2}$, de sorte que $\frac{(a-1)(b-1)(c-1)}{abc} \geqslant \frac{a-1}{a+2}$.

Le quotient $q = \frac{abc-1}{(a-1)(b-1)(c-1)}$ vérifie donc :

- ☞ si $a = 2$, $1 < q < \frac{a+2}{a-1} = 4$, donc $q = 2$ ou $q = 3$,
- ☞ si $a = 3$, $1 < q < \frac{a+2}{a-1} = 5/2$, donc $q = 2$,
- ☞ si $a \geqslant 4$, $1 < q < \frac{a+2}{a-1} \leqslant 2$ dans la mesure où la fonction $\frac{x+2}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1}$ est décroissante.

Les seules solutions envisageables sont donc pour $a = 2$ ou $a = 3$.

Pour $a = 2$, on est ramené à voir quand $\frac{2bc-1}{(b-1)(c-1)}$ vaut 2 ou 3. Le numérateur étant impair, le quotient q ne peut pas valoir 2, et l'équation $2bc - 1 = 3(b-1)(c-1)$ se développe en $bc - 3b - 3c + 4 = 0$, soit $(b-3)(c-3) = 5$. Comme $b < c$, les seules solutions sont $b = 4$ et $c = 8$. On vérifie bien que $3 \times 7 = 21$ divise $(2 \times 4 \times 8) - 1 = 63$.

Pour $a = 3$, on se ramène de même à $3bc - 1 = 4(b-1)(c-1)$, car $q = 2$ donc $q(a-1) = 4$, soit $bc - 4b - 4c + 5 = 0$, ou encore $(b-4)(c-4) = 11$, d'où $b = 5$ et $c = 15$, ce qui fournit une dernière solution $(3, 5, 15)$. De fait, $2 \times 4 \times 14 = 112$ divise $(3 \times 5 \times 15) - 1 = 224$.

Le problème admet donc deux solutions : $(2, 4, 8)$ et $(3, 5, 15)$.

Solution de l'exercice 100. Posons $k = 2007$, et appelons $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des puissances k-ièmes de nombres premiers distincts, donc deux à deux premières entre elles.

Le théorème chinois permet d'affirmer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que :

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{a_1} \\ n \equiv 2 \pmod{a_2} \\ \quad\vdots \\ n \equiv k \pmod{a_k} \end{cases}$$

ce qui signifie précisément que $n-1$ est divisible par a_1, $n-2$ par $a_2, \ldots$, $n-k$ par a_k ; $n-1, n-2, \ldots, n-k$ sont bien k entiers consécutifs vérifiant les conditions de l'énoncé, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 101. Cet exercice est une des multiples variantes de l'égalité de Sophie Germain :

$$n^4 + 4k^4 = (n^2 + 2k^2)^2 - (2kn)^2 = (n^2 - 2kn + 2k^2)(n^2 + 2kn + 2k^2),$$

qui permet de factoriser une telle sommelorsque $a = 4k^4$. Qui plus est, lorsque $k > 1$, $n^2 - 2kn + 2k^2 = (n-k)^2 + k^2 \geqslant k^2$ ne peut pas être égal à 1, quel que soit n, tout comme $n^2 + 2kn + 2k^2$. Pour $a = 4k^4$, quel que soit $k > 1$, il est possible, pour tout n, de décomposer $n^4 + a$ en deux facteurs strictement supérieurs à 1, donc $n^4 + a$ n'est premier pour aucune valeur de n.

2 En colle

2.1 Les énoncés

Stratégies de base

Exercice 1 (*donné à 12 élèves*[1]). On considère $2n+1$ nombres qui ont la propriété suivante : la somme de n quelconques d'entre eux est toujours strictement inférieure à la somme des $n+1$ autres. Montrer que tous les nombres sont strictement positifs.

Exercice 2 (*donné aux mêmes élèves*). On se donne sept entiers, deux à deux distincts, strictement positifs, dont la somme est 100. Montrer que l'on peut en trouver trois dont la somme vaut au moins cinquante.

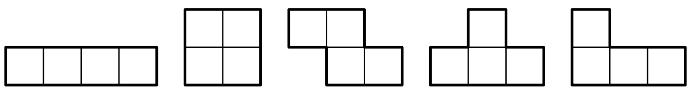
Exercice 3 (*donné aux mêmes élèves*). Soit $n > 2$.Considérons $2n$ entiers deux à deux distincts strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, inférieurs ou égaux à n^2. Montrer que trois des différences $a_i - a_j$ sont les mêmes.

Exercice 4 (*donné à Lucas Boczkowski*). Montrer que $(1+2+\cdots+n)^2 = 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3$.

Exercice 5 (*donné à Ambroise Marigot et Thomas Williams*). De la peinture blanche est jetée aléatoirement sur le sol d'une pièce de2m × 2m. Montrer qu'il existe deux points de mêmecouleur dont la distance est exactement 1m.

Exercice 6 (*donné à Vincent Langlet, Ambroise Marigot et Léonard Martelli*). Peut-on partitionner l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 33\}$ en onze sousensembles de trois éléments, tels que dans chacun des sous-ensembles,l'un des trois éléments soit la somme des deux autres ?

Exercice 7 (*donné à Léonard Martelli*). Peut-on paver un rectangle de dimensions 4×5 par les cinq pièces que voici ?



Exercice 8 (*donné à Anca Arnautu*). 51 points sont dans un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en trouver trois à l'intérieur d'un même cercle de rayon 1/7.

Exercice 9 (*donné à Lucas Boczkowski et Christopher Wells*). Soient $a_1, \ldots, a_{10}$ des entiers. Montrer qu'il existe des $\varepsilon_i \in \{0, 1, -1\}$ tels que 1001 divise $\varepsilon_1 a_1 + \cdots + \varepsilon_{10} a_{10}$.

Exercice 10 (*donné à Dmitry Ivanov*). Sur un quadrillage carré de côté n, on a colorié certaines cases en noir et les autres en blanc. Chaque case blanche est adjacente à une case noire, et l'on peut toujours passer d'une case noire à une autre en empruntant un chemin formé uniquement de cases noires (l'ensemble des cases noires est *connexe*). Montrer qu'il y a au moins $\frac{n^2-2}{3}$ cases noires.

[1] Martin Clochard, Noémie Combe, Camille Dessirier, Yrvann Emzivat, Alice Héliou, Anaïs Lecerf, Merlin Legrain, Maxime Martelli, Jean-François Martin, Jeanne Nguyen, Alexandre Nolin et Rémi Varloot

Exercice 11 (*donné à Marc Coiffier*). Sur un quadrillage carré de côté 1000, combien au maximum peut-on colorier de cases en noir de façon à ce que l'on ne puisse pas trouver trois cases noires dont deux sont dans la même ligne et deux dans la même colonne ?

Exercice 12 (*donné à Juliette Fournier*). Quel est le plus grand nombre de sous-suites de la forme $n, n+1, n+2$ qu'une suite de 2007 entiers naturels peut avoir ?Par exemple, la suite $1, 2, 2, 3, 3$ a 4 sous-suites de cette nature.

Exercice 13 (*donné à William Fujiwara*). On recouvre un échiquier avec 32 dominos. Montrer que le nombre de dominos horizontaux dont le carré blanc est à gauche est égal au nombre de dominos horizontaux dont le carré blanc est à droite.

Exercice 14 (*donné à Thomas Cruzel*). Un cube de côté 3 est divisé en 27 cubes unité. Ces petitscubes se voient assigner de manière aléatoire chacun un nombre entre1 et 27, chaque nombre n'étant attribué qu'une seule fois. Onjoue de la manière suivante : à chaque étape on peut échanger lecube numéroté 27 avec un de ses voisins. Est-il possible de jouerde façon à obtenir la position où le cube 27 est revenu à saplace et où, pour tout n entre 1 et 26, le cube n aéchangé sa place avec celle du cube $27-n$?

Exercice 15 (*donné à Jean-Alix David et Charlotte Le Mouel*). Douze maisons, bleues ou blanches, sont disposées en cercle. Dans cesdouze maisons habitent douze peintres. Durant chacun des douze mois del'année, un peintre différent sort et commence à repeindre lesmaisons dans le sens des aiguilles d'une montre, en commençant parla sienne. Il change la couleur de chaque maison qu'il rencontrejusqu'à avoir changé une maison blanche en bleue. Il s'arrête àce moment là. On suppose qu'une des maisons était bleue au départ.Montrer que lorsque l'année est finie, les maisons ont toutesretrouvé leur couleur initiale.

Exercice 16 (*donné à François Caddet et Philippe Cloarec*). On joue sur un échiquier de côté100. Un coup consiste à choisir un rectangle formé de cases del'échiquier et à en inverser les couleurs. Quel est le plus petitnombre de coups qui permette de rendre l'échiquier entièrement noir ?

Exercice 17 (*donné à Rémi Vergnaud*). Vingt enfants attendent leurs grands-pères dans la cour de lamaternelle. Deux enfants quelconques ont toujours un grand-père commun.Prouver qu'un des grands-pères a au moins 14 petits enfants dans cetteécole maternelle.

Exercice 18 (*donné à Marcus Hanzig et Jean-Denis Zafar*). Un graphe a n sommets et k arêtes. On suppose qu'il ne contientaucun triangle. Montrer que l'on peut en trouver un sommet P tel qu'ily ait au plus $k\left(1-4\frac{k}{n^2}\right)$ arêtes qui relient deux points quine sont tous les deux pas reliés à P.

Exercice 19 (*donné à Ambroise Marigot et Christopher Wells*). Des disques de diamètre strictement inférieur à $0,02$ sont disposésdans un carré de sorte que deux points intérieurs chacun à l'un de cesdisques ne soient jamais distants de $0,02$. Montrer que l'aire couvertepar la réunion de ces disques est strictement inférieure à $0,35$.

Exercice 20 (*donné à Amélie Héliou et Adrien Laroche*). Sur une île déserte vivent 34 caméléons. Au départ, 7 sont jaunes, 10sont rouges et 17 sont verts. Lorsque deux caméléons de couleursdifférentes se rencontrent, ils prennent tous deux la troisième couleur.Lorsque se rencontrent deux caméléons d'une même couleur, rien ne sepasse. Au bout d'un an, tous les caméléons sont devenus de la mêmecouleur. Laquelle ?

Exercice 21 (*donné à Amélie Héliou et Adrien Laroche*). Démontrer que parmi les stagiaires d'un stage Animath, il y en a aumoins deux qui connaissent exactement le même nombre de stagiaires (onsuppose que la relation « se connaître » est réciproque : si Aconnaît B, B connaît A).

Exercice 22 (*donné à Guillaume Baraston, Amélie Héliou et Ambroise Marigot*). On dispose d'une pile de 1001 jetons. On utilise la règle suivante : aupremier coup, on choisit un jeton, que l'on élimine du jeu, et on séparela pile en deux piles arbitraires. Puis à chaque coup, on choisit unjeton que l'on élimine, et on sépare une pile (pas forcément celle donton a extrait le jeton) en deux piles arbitraires. Peut-on sedébrouiller pour qu'à un moment donné, on n'ait que des piles de troisjetons ? (Attention : si une pile ne comporte qu'un jeton et qu'onretire ce jeton, on considère qu'on a désormais une pile de zéro jeton,et non que la pile a disparu).

Exercice 23 (*donné à Vincent Langlet et Adrien Laroche*). On considère une suite de mouvements du Rubik's Cube. Montrer que si l'on répète un nombre suffisant de fois cette même combinaison de mouvements, on finit par retomber sur la position initiale.

Exercice 24 (*donné à Mathieu Aria*). On colorie le plan en trois couleurs. Montrer qu'il existe deux pointsd'une même couleur à distance 1.

Exercice 25 (*donné à Louise Bertin*). Pour quelles valeurs de n peut-on découper un carré en n carrés ?

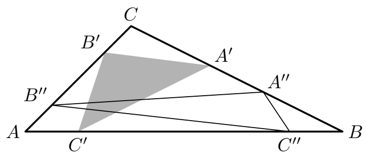
Exercice 26 (*donné à Thomas Williams*). Peut-on paver un carré de côté 2^n privé d'une case (quelconque) pardes pièces composées de trois carrés en forme de L ?

Exercice 27 (*donné à Thomas Williams*). La suite a_n vérifie : a_0 n'est pas un multiple de 5, eta_{n+1} est la somme de a_n et du dernier chiffre de a_n.Montrer que la suite contient une infinité de puissances de 2.

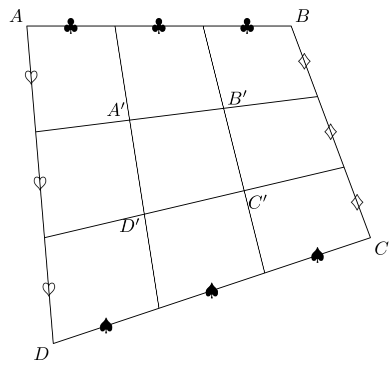
Exercice 28 (*donné à Vincent Langlet*). Existe-t-il un entier dont le cube exprimé en système décimal se terminepar 2007 fois le chiffre 1 ?

Géométrie

Exercice 29 (*donné à 4 élèves*[2]). Soit ABC un triangle et soient A' et A'', B' et B'', C' et C'' des points respectivement sur $[BC]$, $[AC]$, $[AB]$, de telle sorte que $\overrightarrow{C'A} = \overrightarrow{BC''}$, $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{CA''}$, $\overrightarrow{B'C} = \overrightarrow{AB''}$, comme sur la figure. Montrer que l'aire de $A'B'C'$ est égale à celle de $A''B''C''$.



Exercice 30 (*donné à 4 élèves*[3]). Soit $ABCD$ un quadrilatère. On partage chaque côté en trois parties égales, et on joint les points obtenus comme sur la figure suivante :



[2] Philippe Cloarec, Thomas Cruzel, Marcus Hanzig et Charlotte Le Mouel
[3] Philippe Cloarec, Juliette Fournier, Marcus Hanzig et Rémi Vergnaud

Montrer que l'aire de $A'B'C'D'$ est le neuvième de celle de $ABCD$.

Exercice 31 (*donné à Philippe Cloarec, Juliette Fournier et Marcus Hanzig*). Soit ABC un triangle. On note G son centre de gravité, I le centre de son cercle inscrit, et r le rayon. On note également $a = BC$ et $b = CA$. Montrer que l'aire du triangle CIG est égale à $\frac{|a-b|r}{6}$.

Exercice 32 (*donné à Philippe Cloarec, Juliette Fournier et Marcus Hanzig*). Montrer que dans un quadrilatère complet, les milieux des diagonales sont alignés.

Exercice 33 (*donné à Jean-François Martin*). Soient ABC un triangle rectangle en B et D un point de $[AC]$ tel que $CD = AB$. Montrer que dans le triangle ABD, la médiane issue de B, la bissectrice de l'angle $\hat{A}$ et la hauteur issue de D sont concourantes.

Exercice 34 (*donné à Jean-François Martin*). Soient un cercle Γ et deux points B et C fixes sur Γ. Un troisième point A se déplace sur le cercle. Quel est le lieu de l'orthocentre H de ABC lorsque A parcourt le cercle ?

Exercice 35 (*donné à Martin Clochard et Alice Hêliou*). On appelle H_A, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de A, B et C respectivement, H l'orthocentre de ABC, P l'orthocentre de AH_BH_C et Q l'orthocentre de CH_AH_B. Montrer que $PQ = H_CH_A$.

Exercice 36 (*donné à Merlin Legrain*). Soient ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Sur les côtés $[AC]$ et $[BC]$, on place D et E tels que $\widehat{ABD} = \widehat{DBC}$ et $BE = AB$. Montrer que (DE) est perpendiculaire à (BO).

Exercice 37 (*donné à Yrvann Emzivat*). Soit ABC un triangle. Un point M de $[BC]$ se projette en B' et C' respectivement sur (AC) et (AB). Pour quel point M la longueur $B'C'$ est-elle minimale ?

Exercice 38 (*donné à Anaïs Lecerf*). Soient $ABCD$ un quadrilatère, M le milieu de $[AD]$ et N le milieu de $[BC]$. On suppose que $MN = \frac{AB+CD}{2}$. Montrer que $ABCD$ est un trapèze.

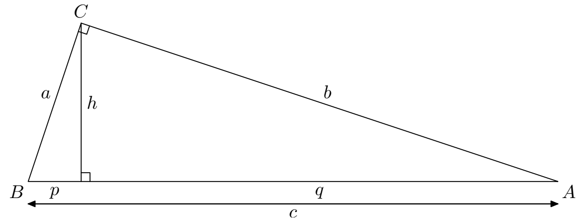
Exercice 39 (*donné à Alexandre Nolin*). Montrer que toute droite qui partage un triangle en deux polygones de même aire et de même périmètre passe par le centre du cercle circonscrit.

Exercice 40 (*donné à Yrvann Emzivat*). Soient A, B et C trois points non alignés. Montrer qu'il existe un unique point X du plan pour lequel :

$$XA^2 + XB^2 + AB^2 = XB^2 + XC^2 + BC^2 = XC^2 + XA^2 + CA^2.$$

Exercice 41 (*donné à Camille Dessirier et Maxime Martelli*). Dans un triangle, la hauteur, la médiane et la bissectrice relative au sommet A partagent l'angle $\widehat{BAC}$ en quatre angles de même mesure α. Déterminer les angles de la figure en fonction de α, et calculer α.

Exercice 42 (*donné à 5 élèves*[4]). Soit ABC un triangle rectangle en C. On note les différentes longueurs comme sur la figure ci-dessous.

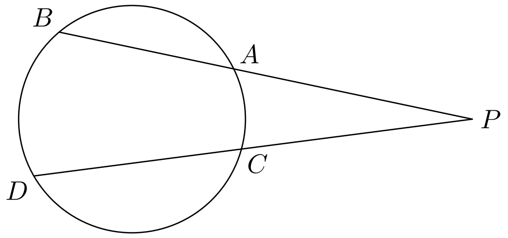


[4]Marc Coiffier, Jean-Alix David, Dmitry Ivanov, Florian Tep et Jean-Denis Zafar

Montrer les égalités suivantes :

$$a^2 = pc \quad ; \quad b^2 = qc \quad ; \quad h^2 = pq \quad ; \quad a^2 + b^2 = c^2.$$

Exercice 43 (*donné à 4 élèves*[5]). Considérons un cercle et un point P du plan. Deux droites passant par P coupent le cercle en A, B, C et D comme sur la figure ci-dessous :



Montrer l'égalité

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD.$$

Exercice 44 (*donné à 6 élèves*[6]). Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit. Soit M le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ et Γ' le cercle de centre M passant par A et B. La droite (CM) coupe Γ' en I et J.Montrer que I et J sont les centres du cercle inscrit et d'un cercle exinscrit de ABC.

Exercice 45 (*donné à Noémie Combe*). Soient A, B, C, D, E, F et G des points du plan tels que$AB = BC = CD = DE = EF = FG = GA$ et A, B, F, D d'une part et$A$, G, C, E d'autre part sont alignés. Calculer l'angle$\widehat{EAD}$.

Exercice 46 (*donné à Alice Héliou*). A, B, C, D sont quatre points cocycliques. (AB) et (CD) se coupenten E. Montrer que

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}.$$

Exercice 47 (*donné à Rémi Varloot*). Dans un triangle ABC, l'angle $\hat{A}$ est le double de l'angle $\hat{B}$, l'angle $\hat{C}$ est obtus et les longueurs des côtés sont desentiers. Quel est le plus petit périmètre possible de ce triangle ?

Exercice 48 (*donné à Jeanne Nguyen*). On considère trois cercles isométriques et deux à deux tangents,$\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, tous trois tangentsintérieurement à un cercle Γ. Soit M un point quelconque sur Γ. On trace une tangente issuede M à $\mathscr{C}_1$, une tangente issue de M à $\mathscr{C}_2$et une tangente issue de M à $\mathscr{C}_3$, et on appelle A, B, Cles trois points de contact. Montrer que l'une des longueursMA, MB, MC est somme des deux autres.

Exercice 49 (*donné à Lucas Boczkowski et Christopher Wells*). Sur un cercle, on place deux points A et C. Le point D est lemilieu de l'arc $\widehat{AC}$. Le point B est un point de l'arc$\widehat{DC}$ qui ne contient pas A. Montrer que la droite (BD)est la bissectrice extérieure du triangle ABC en B.Soit E le projeté orthogonal de D sur la droite AB. Montrer que$AE = BE + BC$.

Exercice 50 (*donné à Ambroise Marigot*). Soit ABC un triangle, et D, E, F des points sur les segments$[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement tels que les céviennescorreespondantes soient concourantes. Soient

[5] Marc Coiffier, Jean-Alix David, Dmitry Ivanov et Jean-Denis Zafar

[6] François Caddet, Pierre Camilleri, Marc Coiffier, Jean-Alix David, William Fujiwara et Quentin Soulet de Brugières

M, N, P des points surles segments $[AD]$, $[BE]$ et $[CF]$ respectivement. Montrer que lesdroites (AM), (BN) et (CP) sont concourantes si et seulement siles droites (DM), (EN) et (FP) le sont.

Exercice 51 (*donné à Louise Bertin et Amélie Héliou*). Soit ABC un triangle, et soient P, Q, R trois points du plan.Montrer que les perpendiculaires à (BC), (AC), (AB) passant par P, Q, R respectivement sont concourantes si et seulement si lesperpendiculaires à (QR), (PR), (PQ) passant par A, B, Crespectivement le sont.

Exercice 52 (*donné à Anca Arnautu et Lucas Boczkowski*). Étant donnés trois cercles deux à deux disjoints, montrer que lestrois points d'intersection des tangentes extérieures aux trois pairesde cercles sont alignés.

Exercice 53 (*donné à Anca Arnautu et Vincent Langlet*). Deux cercles se coupent en P et Q. Une droite passant par P coupeles cercles en A et A'. La droite parallèle passant par Q coupeles cercles en B et B'. Montrer que les périmètres des trianglesPAA' et QBB' sont égaux.

Exercice 54 (*donné à Adrien Laroche et Thomas Williams*). Les diagonales d'un quadrilatére convexe $ABCD$ se coupent à angledroit en un point X. Montrer que les quatre points obtenus commesymétriques de X par rapport aux quatre côtés du quadrilatèresont cocycliques.

Arithmétique

Exercice 55 (*donné à 11 élèves*[7]). Résoudre $x^2 + y^2 + z^2 = xyz - 1$ en nombres entiers.

Exercice 56 (*donné à 6 élèves*[8]). Résoudre $n_1^4 + n_2^4 + \cdots + n_{14}^4 = 1599$ en nombres entiersrelatifs.

Exercice 57 (*donné aux mêmes élèves*). Trouver tous les $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $19x^3 - 17y^3 = 50$.

Exercice 58 (*donné à 8 élèves*[9]). Est-ce que 20042005 est la somme de trois cubes ?

Exercice 59 (*donné à 5 élèves*[10]). Trouver tous les cubes qui sont la somme de trois carrés consécutifs.

Exercice 60 (*donné à Ambroise Marigot*). Résoudre $x^3 - 3y^3 - 9z^3 = 0$ en nombres entiers relatifs.

Exercice 61 (*donné à Ambroise Marigot*). Résoudre $5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0$ en nombres entiers relatifs.

Exercice 62 (*donné à Philippe Cloarec et Marcus Hanzig*). Prouver qu'il n'existe pas d'entiers strictement positifs k et $m$tels que $k! + 48 = 48(k+1)^m$.

Exercice 63 (*donné à Rémi Varloot*). Si k est un entier, on note $p(k)$ le nombre de ses diviseurs pairs,et $i(k)$ le nombre de ses diviseurs impairs. Montrer que pour toutentier n, la somme des $p(k)$, où k est inférieur à n,diffère d'au plus n de la somme des $i(k)$.

Exercice 64 (*donné à Jeanne Nguyen*). Trouver tous les entiers n dont le nombre de diviseurs est$\sqrt[3]{4n}$.

Exercice 65 (*donné à Camille Dessirier*). Résoudre en nombres entiers l'équation $y^3 = x^3+8x^2-6x+8$.

[7] Mathieu Aria, Anca Arnautu, Guillaume Baraston, Louise Bertin, Lucas Boczkowski, Vincent Langlet, Adrien Laroche, Ambroise Marigot, Léonard Martelli, Christopher Wells et Thomas Williams

[8] Lucas Boczkowski, Vincent Langlet, Adrien Laroche, Ambroise Marigot, Christopher Wells et Thomas Williams

[9] Mathieu Aria, Lucas Boczkowski, Amélie Héliou, Vincent Langlet, Adrien Laroche, Ambroise Marigot, Christopher Wells et Thomas Williams

[10] Lucas Boczkowski, Vincent Langlet, Adrien Laroche, Ambroise Marigot et Thomas Williams

Exercice 66 (*donné à Thomas Cruzel et Rémi Vergnaud*). Pour quelles valeurs de n, le nombre $P_n = 36^n + 24^n - 7^n - 5^n$ est-ildivisible par 899 ?

Exercice 67 (*donné à Charlotte Le Mouel*). Les entiers a et b sont premiers entre eux, avec $a > b$.Comparer les nombres :

$$m = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2a}{b} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(b-1)a}{b} \right\rfloor$$

et :

$$n = \left\lfloor \frac{b}{a} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2b}{a} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{(a-1)b}{a} \right\rfloor$$

où $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

Exercice 68 (*donné à Juliette Fournier*). Trouver tous les entiers strictement positifs a et b tels que $ab^2 + b + 7$ divise $a^2b + a + b$.

Exercice 69 (*donné à Jean-Alix David et William Fujiwara*). Trouver tous les entiers naturels x, y et z vérifiant $3^x + 4^y = 5^z$.

Exercice 70 (*donné à François Caddet et Dmitry Ivanov*). Soient trois entiers a, b, c tels que $a^2 + b^2 + c^2$ soitdivisible par 6 et $ab + bc + ca$ soit divisible par 3. Montrer que$a^3 + b^3 + c^3$ est divisible par 6.

Exercice 71 (*donné à Jean-Denis Zafar*). Soient m et n deux entiers premiers entre eux. Calculer le PGCDde $5^m + 7^m$ et $5^n + 7^n$.

Exercice 72 (*donné à Marc Coiffier*). Déterminer les entiers n tels que $n!$ soit divisible par $n + 2$?

Exercice 73 (*donné à Florian Tep*). Soient m et n strictement positifs tels que $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > 0$. Montrer que $\sqrt{7} - \frac{m}{n} > \frac{1}{mn}$.

Exercice 74 (*donné à Pierre Camilleri*). À un entier n on associe le produit de tous ses diviseurs, qu'onappelle $f(n)$. Si $f(a) = f(b)$, a-t-on obligatoirement $a = b$?

2.2 Les solutions

Stratégies de base

Solution de l'exercice 1 *(Lerne Ordnung, liebe sie, Ordnung spart Dir Zeit und Müh'.).* Soient $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \cdots \leqslant x_{2n+1}$ ces nombres numérotés dans l'ordre croissant. La condition de l'énoncé donne en particulier $x_1 + x_2 + \cdots + x_{n+1} > x_{n+2} + \cdots + x_{2n+1}$, puis

$$x_1 > (x_{n+2} + \cdots + x_{2n+1}) - (x_2 + \cdots + x_n) = (x_{n+2} - x_2) + \cdots + (x_{2n+1} - x_n) \geqslant 0$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2. On numérote ces entiers dans l'ordre croissant : $a_1 < a_2 < \cdots < a_7$.Séparons deux cas.

- ☞ Si $a_5 \geqslant 16$, alors $a_5 + a_6 + a_7 \geqslant 16 + 17 + 18 = 51$.
- ☞ Si $a_5 \leqslant 15$, alors $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leqslant 11 + 12 + 13 + 14 = 50$ et $a_5 + a_6 + a_7 = 100 - (a_1 + a_2 + a_3 + a_4) \geqslant 50$.

Solution de l'exercice 3. Sans perte de généralité, on peut supposer que $1 \leqslant a_1 < a_2 < \cdots < a_{2n} \leqslant n^2$. Supposons par l'absurde que trois différences $a_i - a_j$ quelconques ne sont jamais toutes les mêmes.En particulier,

$$\begin{aligned} a_{2n} - a_1 &= (a_{2n} - a_{2n-1}) + (a_{2n-1} - a_{2n-2}) + \cdots + (a_3 - a_2) + (a_2 - a_1) \\ &\geqslant 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + \cdots + (n-1) + (n-1) + n \\ &= 1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) \\ &= n^2. \end{aligned}$$

Or, $a_{2n} - a_1 \leqslant n^2 - 1$: on aboutit à une contradiction.

Solution de l'exercice 4. Par récurrence : la relation est vérifiée pour $n = 1$, etsi elle est vérifiée pour n, pour qu'elle soit vraie pour $n+1$ ilfaut et il suffit que :

$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= (1 + 2 + \cdots + (n+1))^2 - (1 + 2 + \cdots + n)^2 \\ &= (n+1)((1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 2 + \cdots + (n+1)). \end{aligned}$$

Or (résultat classique) : $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$, donc $1 + 2 + \cdots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$,leur somme vaut bien $(n+1)^2$, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 5. Considérons un triangle équilatéral de côté 1m. Parmi les troissommets, deux au moins sont de même couleur, et ils sont distants de1m.

Solution de l'exercice 6. Non, car si la somme de deux éléments a et b est égale au troisième$a + b$, la somme des trois éléments $2a + 2b$ est paire, et donc la sommedes éléments des onze sous-ensembles devrait être paire. Ce qui n'estpas le cas de la somme $1 + 2 + \cdots + 33 = \frac{33 \times 34}{2} = 561$.

Solution de l'exercice 7. Non : si l'on colorie les vingt cases du rectangle en noir et blanccomme sur un échiquier, chacune des pièces couvre deux cases blanches etdeux cases noires, hormis la seconde qui couvre une case d'une couleuret trois de l'autre. Donc les cinq pièces, quelle que soit leurdisposition, ne peuvent pas couvrir le même nombre de cases blanches quede cases noires.

Solution de l'exercice 8. Divisons notre carré en 25 cases carrées de côté $1/5$. Nécessairement l'une de ces cases contiendra trois des 51 points, d'aprèsle principe des tiroirs. Or le cercle circonscrit à ladite case a pour rayon $\frac{\sqrt{2}}{10}$, ce qui est inférieur à $1/7$. Donc lestrois points sont intérieurs au cercle de rayon $1/7$ et de centre le centre de la case carrée. On remarquera que ce cercle peutdéborder le carré initial : si l'on interdit aux cercles de déborder le carré initial, le résultat est faux, car il suffit deplacer tous les points sur les bords du carré, à distance suffisante des sommets, pour remarquer que chacun d'eux ne peut appartenirqu'à un seul cercle inclus dans le carré.

Solution de l'exercice 9. Considérons l'ensemble des combinaisons de la forme $\sum \eta_i a_i$pour $\eta_i \in \{0, 1\}$. Ceci fournit 1024 valeurs (deux choix pourchacun des η_i), dont au moins deux sont congrues modulo 1001d'après le principe des tiroirs. La différence de ces deux valeurs estun multiple de 1001 et s'écrit comme le demande l'énoncé.

Solution de l'exercice 10. Montrons que si k cases sont noircies sur un quadrillage et forment un ensemble connexe, alors au plus $3k + 2$ cases sont soit noires, soit blanches et adjacentes à une case noire. On raisonne par récurrence sur k. Si $k = 1$, c'est évident. Supposons le résultat vrai pour k cases noires, et donnons-en nous $k + 1$. On peut trouver une case noire telle que les k autres cases noircies forment un ensemble connexe. On le montrera plus bas. Cela étant acquis, la case noire à ajouter ayant nécessairement une frontière en commun avec une case déjà noire, elle n'ajoute qu'au plus trois cases dans l'ensemble des cases noires ou adjacentes à une case noire, ce qui conclut la récurrence. Cela montre que si k est le nombre de cases noires dans la situation qui nous occupe, on a $n^2 \leqslant 3k+2$, ce qui conclut.Pour montrer le résultat intermédiaire, il suffit de considérer deux cases noires à distance maximale (c'est-à-dire que le nombre de cases noires à traverser pour aller de l'une à l'autre est maximal). Le lecteur vérifiera qu'enlever une de ces deux cases laisse connexe l'ensemble des cases noires restantes.

Solution de l'exercice 11. On va montrer plus généralement que si l'on remplace le quadrillage de l'énoncé par un quadrillage $m \times n$, le nombre maximal de cases que l'on peut colorier en noir est m si $n = 1$, n si $m = 1$ et $m+n-2$ si m et n sont strictement supérieurs à 1. En particulier, on trouve 1998 dans la situation de l'énoncé.Le résultat est évident si m ou n est égal à 1. Si m et n sont tous les deux strictement supérieurs à 1, on peut colorier $m+n-2$ cases en coloriant toutes les cases d'une ligne et d'une colonne sauf celle où elles s'intersectent. On va montrer par récurrence sur m qu'il est impossible de faire mieux. On peut supposer $n \geqslant m$.On a déjà traité le cas $m = 1$. Si $m = 2$, si l'on colorie deux cases dans la même ligne, on ne peut plus rien colorier ensuite. Le maximum est donc atteint quand on colorie une colonne en entier, d'où le résultat. Supposons $m > 2$, et donnons-nous un coloriage du nombre maximum de cases. Puisque le maximum est au moins $m+n-2$, on dispose d'une ligne qui contient deux cases noires au moins. Il n'y a aucune autre case noire dans les deux colonnes qui contiennent ces deux cases. Considérons les $m-2$ colonnes restantes. Si $m > 3$, par hypothèse de récurrence, elles contiennent au plus $m+n-4$ cases noires, ce qui conclut. Si $m = 3$, la colonne restante ne peut pas être entièrement remplie, ce qui conclut de même.

Solution de l'exercice 12. La réponse est $(\frac{2007}{3})^3 = 669^3$, obtenue en prenant la suite formée de 669 fois le nombre 1, 669 fois le nombre 2 et 669 fois le nombre 3. On le montre par étape. Soit $x_1, \ldots, x_n$ une suite réalisant ce maximum.On peut tout d'abord supposer la suite croissante. En effet, échanger deux termes consécutifs qui sont dans l'ordre décroissant ne peut qu'augmenter le nombre des sous-suites que l'on désire. Ensuite, on peut supposer que deux termes consécutifs de la suite ne diffèrent que d'au plus 1. En effet, si $x_i = X_{i-1} + a$, avec $a \geqslant 2$, soustraire $a-1$ à tous les termes de la suite à partir de x_i ne peut qu'augmenter le nombres des sous-suites que l'on cherche.On peut donc supposer que la suite est constituée de a_1 fois le nombre 1, a_2 fois le nombre 2, etc., jusqu'à a_r fois le nombre r, la somme des a_i valant 2007. Le nombre des sous-suites cherchées est $a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + \ldots + a_{r-2}a_{r-1}a_r$. On voit immédiatement que l'on a $a_{r-2} \geqslant a_{r-1} \geqslant a_r$. Ainsi, si $r \geqslant 4$, remplacer tous les r par des $r-1$ augmente le nombre des sous-suites cherchées. On a donc $r = 3$. Appliquant l'inégalité arithmético-géométrique, on trouve qu'il faut que la suite comporte autant de 1 que de 2 et de 3. Cela conclut.

Solution de l'exercice 13. Soient b_i le nombre de dominos horizontaux dont le carré blanc està gauche et sur la colonne i, et n_i le nombre de ceux dont lecarré noir est à gauche et sur la colonne i. On a $b_1 = n_1$. Eneffet, la première colonne contient autant de cases blanches de decases noires, et un domino vertical recouvre autant de blanc que denoir. De même, l'examen de la colonne 2 montre que$b_1 + n_2 = n_1 + b_2$, d'où $b_2 = n_2$. Continuant, on trouve que l'on a$b_i = n_i$ pour tout i. La somme des b_i est donc égale à celledes n_i, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 14. Supposons que l'on a joué de façon à obtenir la configuration de l'énoncé. Puisque le cube numéroté 27 revient à sa place, on a joué un nombre pair de coups. Mais la permutation des cubes de 1 à 26 que l'on a obtenue est impaire, étant composée de 13 transpositions. Ce raisonnement montre qu'il est en fait impossible d'obtenir la configuration de l'énoncé.

Solution de l'exercice 15. Numérotons les maisons de 1 à 12 en respectant l'ordre desaiguilles d'une montre. À une coloration des maisons, associons lenombre binaire dont le k-ième chiffre est 1 si la maison est bleueet 0 si la maison est rouge. Un calcul immédiat montre que l'actiondu k-ième peintre est d'ajouter à ce nombre 2^{k-1} etd'éventuellement lui enlever $2^{12}-1$. Ainsi, une fois que tous lespeintres sont passés, ce nombre n'a pas changé modulo $2^{12}-1$.Mais les nombres que l'on peut obtenir sont tous compris entre 0 et$2^{12}-1$. Les nombres du début et de la fin sont donc égaux, àmoins peut-être que le premier soit $2^{12}-1$ et le dernier 0 (eneffet, le premier nombre est au moins égal à 1, puisque au moinsune maison est bleue). Ce cas est celui où toutes les maisons sontbleues au départ. Il est immédiat de vérifier pour lui lerésultat de l'exercice.

Solution de l'exercice 16. La réponse est 100. On peut ne faire que 100 coupsen transformant une ligne sur deux puis une colonne sur deux. On ne peutpas faire moins car inverser les couleurs d'un rectangle ne peut changerque d'au plus 4 le nombre de séparations entre cases blanches etnoires sur le bord de l'échiquier et que les rectangles contenant uncoin ne le change que d'au plus 2.

Solution de l'exercice 17. On suppose que chaque grand-père a au plus 13 petits-enfants. Soit$A$ un des grands-pères. Ses petits enfants forment un ensemble Sà $s \leqslant 13$ éléments. Soit x l'un d'entre eux. Il y a au moinssept enfants dans la cour qui ne sont pas des petits-enfants de A. Siy est l'un d'entre eux, l'hypothèse de l'énoncé implique que $x$et y ont un grand-père commun, que l'on appelle B. C'est le secondgrand-père de x, qui est donc grand-père de tous les enfants quine sont pas dans S. Soit t le nombre de petits-enfants de B. Soit$C$ le deuxième grand-père de y, et soit u le nombre de sespetits-enfants. Notons t' et u' les nombres respectifs depetits-enfants de B et de C qui sont dans S. Comme u' est nonnul, le raisonnement précédent montre que l'on a $t = t' + 20 - s$ et$u = u' + 20 - s$. On a enfin $t' + u' = s$, d'où $s + t + u = 40$, ce qui impliqueque l'un des entiers s, t et u vaut au moins 14, et conclut.

Solution de l'exercice 18. On se ramène à prouver qu'il existe un point P tel que la sommex_P des degrés des sommets reliés à P vaille au moins$\frac{4k^2}{n^2}$. Mais la somme des x_P est égale à la somme descarrés des degrés des sommets du graphe. Comme la somme des degrésvaut $2k$, on conclut par l'inégalité entre moyennes quadratique etarithmétique.

Solution de l'exercice 19. L'énoncé implique que si l'on translate l'ensemble de ces disques de$0,02$, le nouvel ensemble de disques est disjoint du premier. On peutnotamment translater cet ensemble de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et$\overrightarrow{AC}$ faisant un angle de $60°$: le premier ensemble dedisques sera disjoint du deuxième et du troisième. Mais le deuxième etle troisième seront eux aussi disjoints l'un de l'autre, car on peutpasser de l'un à l'autre par une troisième translation de $0,02$ devecteur $\overrightarrow{BC}$, ABC étant un triangle équilatéral. Les troisensembles de disques ainsi obtenus ne sont pas tous trois dans le carréinitial, mais dans un carré un peu plus grand, de côté $1,02$. Comme parailleurs ces ensembles sont deux à deux disjoints, la somme de leursaires (qui n'est autre que le triple de chacune des aires) estinférieure ou égale à l'aire du grand carré, soit $1,02^2 < 1,05$. Il enrésulte que l'aire de la réunion des disques initiaux est strictementinférieure à $\frac{1{,}05}{3} = 0,35$.

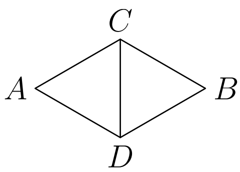
Solution de l'exercice 20. Vert. En effet, la différence du nombre de caméléons jaunes et du nombrede caméléons rouges est toujours multiple de 3 : si un caméléon jaunerencontre un vert, cette différence diminue de 3, car il y a un jaune demoins et deux rouges de plus ; si un rouge rencontre un vert, elleaugmente de 3. Par contre, si un jaune rencontre un rouge, la différencereste inchangée, car le nombre de jaunes et le nombre de rougesdiminuent chacun d'un. Et si deux caméléons de même couleur serencontrent, la différence reste également inchangée. Comme, au départ,la différence $7 - 10 = -3$ est un multiple de 3, elle sera toujours unmultiple de 3 : on ne peut pas en dire autant de la différence du nombrede verts et du nombre de rouges, car celle-ci, au départ, n'est pas unmultiple de 3 : $17 - 10 = 7$ est de la forme $3k+1$, donc elle resteratoujours de cette forme. Tout comme la différence du nombre de verts et dunombre de jaunes. S'il y avait 34 jaunes et 0rouge, la différence du nombre de jaunes et du nombre de rouges ne serait pas multiple de 3 ; de même s'il y avait 34 rouges et 0 jaune.Donc lacouleur de tous les caméléons après un an ne peut être que le vert. Pour prouver qu'il est possible que tous les caméléons deviennent verts,il faut trouver une suite de rencontres qui mène à cette situation : siles 7 jaunes rencontrent 7 des rouges, il restera 3 rouges et 31 verts.Un des verts rencontre un rouge, il restera 2 jaunes, 2 rouges et 30verts. Puis les deux rouges rencontrent les deux jaunes.

<u>*Solution de l'exercice 21.*</u> Soit n le nombre de stagiaires. Chaque stagiaire connaît entre 0 et$n-1$ autres stagiaires. Mais il n'est pas possible qu'un stagiaire Aconnaisse 0 stagiaire si un autre B connaît $n-1$ stagiaires, car Bconnaîtrait A ce qui impliquerait que A connaîtrait au moins unstagiaire, B. Le nombre de stagiaires connus varie donc soit de 1 à$n-1$, soit de 0 à $n-2$, il ne peut prendre que $n-1$ valeurs alorsqu'il y a n stagiaires : d'après le principe des tiroirs, pour au moinsdeux stagiaires il prend la même valeur.

<u>*Solution de l'exercice 22.*</u> À chaque coup, on ajoute une pile, et on supprime un jeton : la sommedu nombre de piles et du nombre de jetons est donc invariante, égale à1002. Or si l'on a n piles de 3 jetons, cela fait $3n$ jetons et l'invariant vaut $4n$, qui ne peut pas être égal à 1002,d'où l'impossibilité.

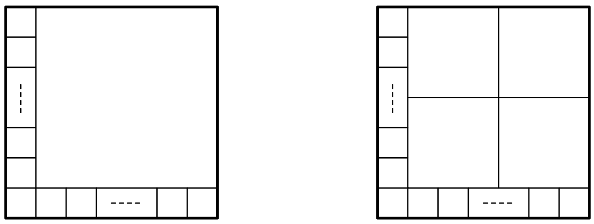
<u>*Solution de l'exercice 23.*</u> Le nombre de positions distinctes du Rubik's cube est fini. Donc si l'on répète un nombre suffisant de fois une même combinaison de mouvements, quelle qu'elle soit, une de ces positions se répétera (mais pas nécessairement la position initiale). Seulement les mouvements du Rubik's Cube peuvent se faire dans les deux sens : si, après n répétitions de la même combinaison de mouvements, on atteint la même position P qu'après m répétitions(en supposant $n > m$), après $n-1$ répétitions, on obtient également la même position qu'après $m-1$ répétitions, car il existe une seule position qui, par cette combinaison de mouvements, mène à la position P. Donc après $n-2$ répétitions, on a la même position qu'après $m-2$ répétitions, et plus généralement après $n-k$ répétitions, la même combinaison qu'après $m-k$ répétitions. En particulier, après $n-m$ répétitions, on atteindra la même positionqu'après $m-m=0$ répétitions, donc la position initiale.

<u>*Solution de l'exercice 24.*</u> On part de deux points A et B distants de $\sqrt{3}$ et on supposequ'ils ont des couleurs différentes. On construit les points C et Dde telle sorte que CDA et CDB soient équilatéraux de côté 1comme le montre la figure suivante :



Comme A et B sont de couleur différente, soit l'un desdeux a la couleur de C ou D, soit C et D ont la même couleur.Dans tous les cas on a trouvé deux points à distance 1 de mêmecouleur. On peut donc supposer que deux points quelconques distants de$\sqrt{3}$ ont la même couleur. Ainsi, si O est un point fixé duplan, le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$ est unicolore et ilest clair que l'on peut trouver deux points à distance 1 sur cecercle.

<u>*Solution de l'exercice 25.*</u> Tout d'abord, ce n'est pas possible pour $n=2$ ou 3. En effet, dans cecas, par le principe des tiroirs, un des carrés devrait contenir deuxcoins du grand carré et donc recouvrir à lui tout seul ce grandcarré, ne laissant plus de place à ses frères.Pour $n=1$, c'est bien entendu possible. Aussi, pour tout entier $k \geqslant 1$, les deux configurations suivantes montrent que c'est possible pourles entiers de la forme $n=2k+2$ et $n=2k+5$:



où il y a $k+1$ carrés sur la ligne du bas et également $k+1$ sur lacolonne de gauche.Il ne reste plus que $n=5$. Dans ce cas, on est contraint de mettre uncarré dans chaque coin, et on voit qu'il est impossible que la formerestante soit encore un carré. Le pavage est donc impossible dans cecas.

Solution de l'exercice 26. Oui, et cela se prouve par récurrence. Pour la valeur initiale $n = 1$,il est clair qu'un carré de deux cases privé d'une case quelle qu'ellesoit peut être précisément couvert par une pièce du type voulu (que nousappellerons désormais une pièce P). Supposons le résultat vrai pour$n$. Pour $n+1$, le carré de côté 2^{n+1} peut être divisé en quatrecarrés de côté 2^n. L'un d'eux contient la case exclue, et parhypothèse de récurrence, il peut, privé de ladite case, être pavé pardes pièces P. Pour les trois autres, on exclut la case d'angle quitouche le centre du grand carré. Privés de cette case, ils peuventégalement, d'après l'hypothèse de récurrence, être pavés par des pièces$P$. Et les trois cases centrales ainsi exclues peuvent elles aussi êtrecouvertes par une pièce P, ce qui achève la preuve par récurrence.

Solution de l'exercice 27. Par une étude exhaustive, on montre qu'à partir d'un certain rang, lesa_n se terminent périodiquement par $2, 4, 8, 6, \ldots$. Ainsi àpartir d'un certain rang, $a_{n+4} = a_n+2+4+8+6 = a_n+20$. Une suite extraite de a_n est donc arithmétique de raison20. Les puissances de 2 modulo 20 sont 2 puis cycliquement 4,8, 16 et 12. Mais par ce qui précède, les termes sontsuccessivement congrus modulo 20 soit à 2, 4, 8 et 16(premier cas), soit à 12, 14, 18 et 6 (second cas). Dans lepremier cas, il y a à partir d'un moment par exemple tous les entierscongrus à 4 modulo 20 et donc une infinité de puissances de 2.Dans le second cas, on remplace 4 par 12 dans l'argument.

Solution de l'exercice 28. Oui, par récurrence : $1^3 = 1$ se termine par une fois le chiffre 1.Montrons que s'il existe un entier a_n de n chiffres dont le cube setermine par n fois le chiffre 1, on peut en déduire un entier a_{n+1}de $n+1$ chiffres dont le cube se termine par $n+1$ fois le chiffre 1.Appelons b_n le $(n+1)$-ième chiffre à partir de la droite de a_n^3, tousles chiffres suivants étant des 1. Posons $a_{n+1} = a_n + c_n 10^n$,c_n étant en fait le premier chiffre de a_{n+1} :

$$a_{n+1}^3 = a_n^3 + 3a_n^2 c_n 10^n + 3a_n c_n^2 10^{2n} + c_n^3 10^{3n}.$$

Or le dernier chiffre de a_n est 1 (sinon son cube ne se terminerait pas par 1), le $(n+1)$-ièmechiffre de a_{n+1}^3 est le même que le dernier chiffre de $b_n + 3c_n$.Quel que soit b_n, il existe un c_n tel que $b_n + 3c_n$ se termine par 1 car $3c_n$ prend toutes les valeurs modulo 10. Il est ainsi possible, par récurrence, de construire un nombre a_n de n chiffres dont le cube setermine par n chiffres 1, pour tout n.

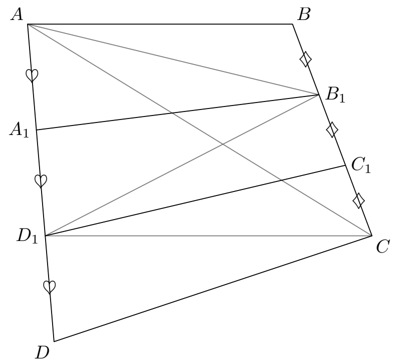
Géométrie

Solution de l'exercice 29. Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont des vecteurs de coordonnées respectives (x, y) et (z, t), on note $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$ leur déterminant, c'est-à-dire le nombre $xt - yz$. On utilise la propriété suivante : l'aire (orientée) du parallélogramme déterminé par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ est $[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]$.Soit O un point quelconque du plan.Notons $|A''B''C''|$ l'aire du triangle $A''B''C''$.On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
2|A''B''C''| &= [\overrightarrow{OA''}, \overrightarrow{OB''}] + [\overrightarrow{OB''}, \overrightarrow{OC''}] + [\overrightarrow{OC''}, \overrightarrow{OA''}] \\
&= [\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB'}] \\
&+ [\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC'}] \\
&+ [\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA'}] \\
&= [\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}] + [\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}] + [\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OA'}] \\
&+ \left([\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB}] + [\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}] + [\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA'}]\right) \\
&+ \left([\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC}] + [\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'}]\right) \\
&+ \left([\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OA}] + [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] + [\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC'}]\right) \\
&= [\overrightarrow{OA'}, \overrightarrow{OB'}] + [\overrightarrow{OB'}, \overrightarrow{OC'}] + [\overrightarrow{OC'}, \overrightarrow{OA'}] + 0 + 0 + 0 \\
&= 2|A'B'C'|
\end{aligned}$$

qui est bien ce que l'on voulait.

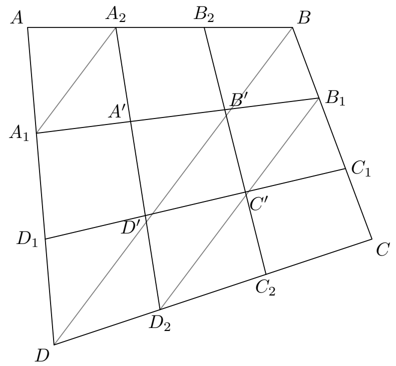
Solution de l'exercice 30. **Méthode 1.** On commence par traiter un problème plus simple. Étant donnée la figure suivante



on montre que l'aire de $A_1B_1C_1D_1$ est le tiers de celle de $ABCD$.Puisqueles triangles CC_1D_1 et $B_1C_1D_1$ ont une hauteur en commun et la basecorrespondante de même longueur, ils ont même aire. De même pour lestriangle $A_1B_1D_1$ et AA_1B_1. D'autre part le triangle DD_1C a pour aire le tiers de celle de ACD puisque ces triangles ont même hauteur et queles bases correspondantes sont dans un rapport $\frac{1}{3}$.De même l'aire de ABB_1 est le tiers de celle de ABC. Ainsi :

$$\begin{aligned}
|ABCD| &= |DD_1C| + |CC_1D_1| + |B_1C_1D_1| + |A_1B_1D_1| + |AA_1B_1| + |ABB_1| \\
&= \frac{1}{3}|ADC| + 2|B_1C_1D_1| + 2|A_1B_1D_1| + \frac{1}{3}|ABC| \\
&= \frac{1}{3}|ABCD| + 2|A_1B_1C_1D_1|
\end{aligned}$$

d'où la conclusion.Revenons à la situation d'origine, et nommons les points comme sur la figure ci-dessous.



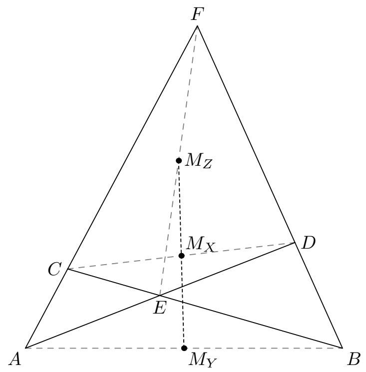
Pour conclure, en appliquant deux fois le résultat préliminaire, il suffitde montrer que A' est au tiers du segment $[A_2D_2]$, et d'autres résultats similaires qui s'obtiennent de la même manière. D'après le théorème de Thalès, les droites (A_1A_2), (BD) et (B_1D_2) sont parallèles, $A_1A_2 = \frac{1}{3}BD$, et $B_1D_2 = \frac{2}{3}BD$. Pour conclure, on applique une dernière fois le théorème de Thalès dans les triangles A_1A_2A' et B_1D_2A'.**Méthode 2.** Le deuxième méthode est plus calculatoire, et utilise les relations entre aires et déterminants (voir solution de l'exo 29).Soit O un point quelconque du plan. Des considérations barycentriques donnent $\overrightarrow{OA'} = \left(4\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OD}\right)/9$ et $\overrightarrow{OC'} = \left(4\overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OD}\right)/9$.De ces deux égalités, on déduit que $\overrightarrow{A'C'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. De même, $\overrightarrow{B'D'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.Or, l'aire de $ABCD$ est égale à $\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right]$ et celle de $A'B'C'D'$ à $\frac{1}{2}\left[\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{B'D'}\right]$. On en déduit le résultat annoncé.

<u>*Solution de l'exercice 31*</u>. On note $|GIC|$ l'aire du triangle GIC et $\left[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right]$ le déterminant de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (voir solution de l'exercice 29).On a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}
|GIC| &= \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{IG},\overrightarrow{IC}\right]\right| = \frac{1}{2}\left|\left[\frac{\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}}{3},\overrightarrow{IC}\right]\right| \\
&= \frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{IA},\overrightarrow{IC}\right]+\left[\overrightarrow{IB},\overrightarrow{IC}\right]\right| = \frac{1}{6}|ar-br| \\
&= \frac{|a-b|r}{6},
\end{aligned}$$

ce qui conclut.

<u>*Solution de l'exercice 32*</u>. On note $[\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}]$ le déterminant de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ (voir solution de l'exo 29).Fixons des notations comme sur la figure suivante, où M_X, M_Y et M_Z sont respectivement les milieux de $[CD]$, $[AB]$ et $[EF]$:

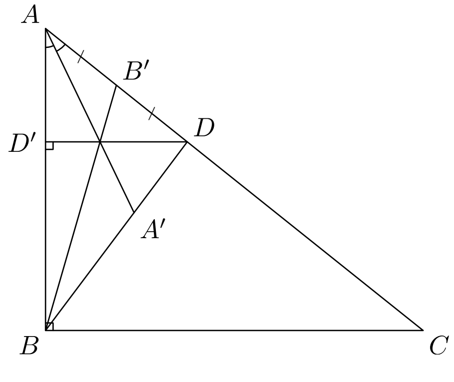


Soit O un point quelconque du plan. Remarquons que trois points R, S, T sont alignés si et seulement si $\left[\overrightarrow{OR},\overrightarrow{OS}\right]+\left[\overrightarrow{OS},\overrightarrow{OT}\right]+\left[\overrightarrow{OT},\overrightarrow{OR}\right]=0$. Calculons :

$$\begin{aligned}
&\left[\overrightarrow{OM_X},\overrightarrow{OM_Y}\right]+\left[\overrightarrow{OM_Y},\overrightarrow{OM_Z}\right]+\left[\overrightarrow{OM_Z},\overrightarrow{OM_X}\right] \\
= &\left[\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2},\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}\right]+\left[\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2},\frac{\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{2}\right]+\left[\frac{\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}}{2},\frac{\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}}{2}\right] \\
= &\frac{1}{4}\Big(\left(\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OE}\right]+\left[\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OD}\right]+\left[\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OA}\right]\right) \\
&\quad+\left(\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OE}\right]+\left[\overrightarrow{OE},\overrightarrow{OC}\right]+\left[\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OB}\right]\right) \\
&\quad+\left(\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OF}\right]+\left[\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OC}\right]+\left[\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\right]\right) \\
&\quad+\left(\left[\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OF}\right]+\left[\overrightarrow{OF},\overrightarrow{OD}\right]+\left[\overrightarrow{OD},\overrightarrow{OB}\right]\right)\Big)=0.
\end{aligned}$$

On en déduit que M_X, M_Y et M_Z sont alignés.

<u>*Solution de l'exercice 33*</u>. Utilisons le théorème de Céva : appelons B' le pied de la médiane issue de B, donc le milieu de $[AD]$, A' le pied de la bissectrice issue de A et D' le pied de la hauteur issue de D.

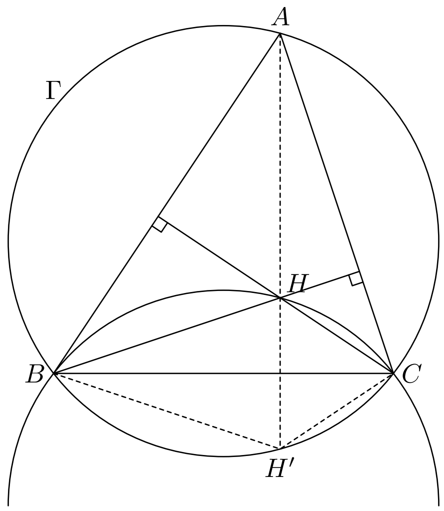


Par définition, $\frac{B'D}{B'A} = -1$. Une propriété classique de la bissectrice du triangle est que $\frac{A'B}{A'D} = \frac{AB}{AD}$. En effet $\frac{A'D}{AD} = \frac{\sin\widehat{A'AD}}{\sin\widehat{AA'D}} = \frac{\sin\widehat{AA'B}}{\sin\widehat{A'AB}} = \frac{A'B}{AB}$. Enfin, le théorème de Thalès donne $\frac{D'A}{D'B} = \frac{DA}{DC}$ vu que (DD') et (BC) sont parallèles, puisque tous deux perpendiculaires à (AB). Il en résulte :

$$\frac{B'D}{B'A}\cdot\frac{A'B}{A'D}\cdot\frac{D'A}{D'B} = -\frac{AB}{AD}\cdot\frac{DA}{DC} = -1$$

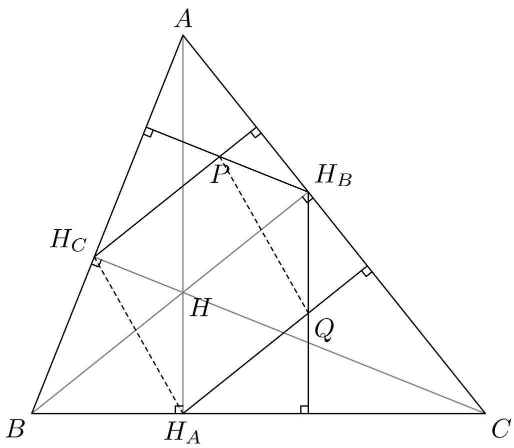
(puisque par hypothèse $DC = AB$), ce qui prouve bien que les trois droites sont concourantes.

Solution de l'exercice 34.



Comme (HB) est orthogonal à (AC) et (HC) à (AB), l'angle de droites (HB, HC) est le même que l'angle de droites (AC, AB). La symétrie par rapport à (BC) transforme H en H', et transforme l'angle (HB, HC) en $(H'B, H'C) = -(HB, HC) = (AB, AC)$, car l'angle dont il faut faire tourner (AB) pour atteindre (AC) est opposé à l'angle dont il faut faire tourner (AC) pour atteindre (AB), et toute symétrie axiale transforme un angle en l'angle opposé. La relation $(H'B, H'C) = (AB\,, AC)$ équivaut à la cocyclicitéde H', B, C et A, d'où il résulte que H décrit le symétrique Γ' du cercle Γ par rapport à (BC). Pour prouver que H décrit tout le cercle, on remarque que si H est l'orthocentre de ABC, A est l'orthocentre de HBC, donc à tout point H de Γ' on peut associer un point A de Γ, en l'occurrence l'orthocentre de HBC, tel que H soit l'orthocentre de ABC.

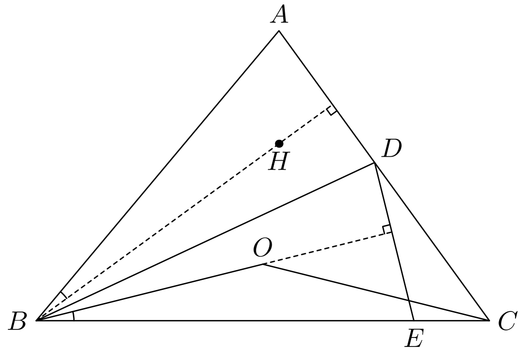
Solution de l'exercice 35. On commence par faire une figure :



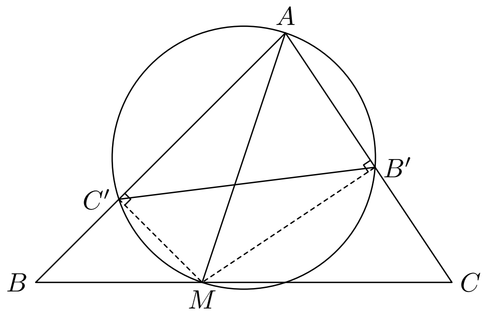
Les droites (HH_A) et (H_BQ) sont parallèles car toutes deux perpendiculaires à (BC), et de même (HH_B) et (H_AQ) sont parallèles : HH_AQH_B est donc un parallélogramme et les vecteurs $\overrightarrow{HH_B}$ et $\overrightarrow{H_AQ}$

sont égaux. De même, $\overrightarrow{HH_B} = \overrightarrow{H_C P}$. Il en résulte $\overrightarrow{H_C P} = \overrightarrow{H_A Q}$ et donc que$H_A Q P H_C$ est également un parallélogramme. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{H_C H_A}$ sont égaux, et *a fortiori* de même longueur.

Solution de l'exercice 36. Le triangle ABE étant isocèle, par hypothèse, et (BD) étant la bissectrice de l'angle en $\hat{B}$, donc l'axe de symétrie de ce triangle isocèle, la symétrie par rapport à (BD) transforme (DA) en (DE). Or, si l'on appelle H l'orthocentre de ABC, l'angle HBA vaut $\frac{\pi}{2} - \hat{A}$, tout comme l'angle $\widehat{OBC}$ car le triangle OBC est isocèle avec $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$. Donc la symétrie par rapport à la bissectrice (BD) transforme (BH) en (BO) : puisque (BH) est perpendiculaire à (DA), son symétrique (BO) est perpendiculaire à (DE), symétrique de (DA). Ceci achève la démonstration.

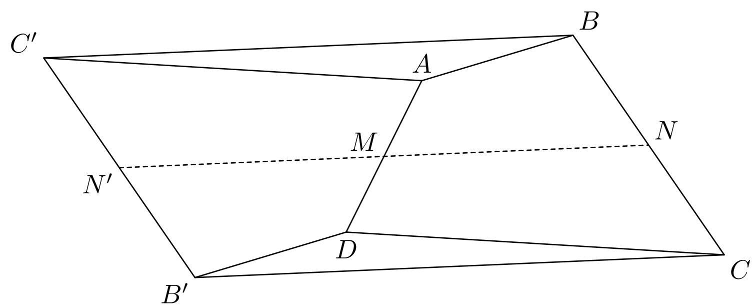


Solution de l'exercice 37. Etant donné les angles droits, le cercle de diamètre $[AM]$ passe par B' et C', et l'angle $\widehat{B'AC'}$ est constant, égal à $\widehat{BAC}$.



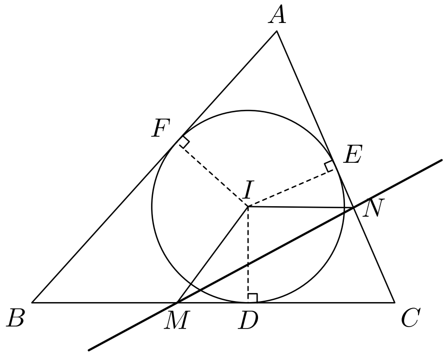
Ainsi $B'C' = AM \sin \widehat{BAC}$. Il en résulte que $B'C'$ est minimal lorsque AM est minimal, donc lorsque M est la projection H de A sur (BC) : pour toute autre position de M, l'hypoténuse AM de AMH est strictement plus longue que AH. Si H n'appartient pas au segment $[BC]$, le minimum est atteint en l'un des points B ou C, le plus proche de H : cela résulte du théorème de Pythagore.

Solution de l'exercice 38. Vectoriellement, on remarque que le vecteur $\overrightarrow{MN}$ est la demi-somme des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$. Il faut donc prouver que $\left\|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| + \left\|\overrightarrow{CD}\right\|$ seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, ce qui est évident en élevant au carré : $AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot CD \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = AB^2 + CD^2 + 2AB \cdot CD$ si et seulement si $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 1$.Mais on peut aussi voir cela géométriquement. La symétrie par rapport à M transforme A en D, B en un point B' et C en un point C' tel que $B'C'$ soit parallèle à BC, et de même longueur.



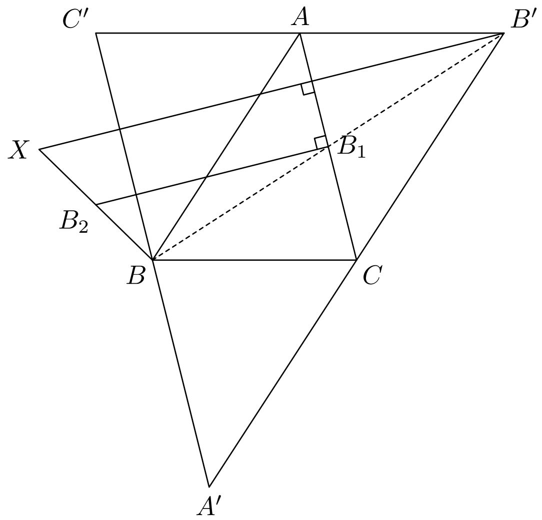
Elle transforme N en un point N', milieu de $[B'C']$. Donc $NN'C'B$ et $NN'B'C$ sont des parallélogrammes. Il en résulte que $2MN = NN' = C'B = B'C$. Par ailleurs, $[B'D]$ est symétrique de $[BA]$, donc de même longueur (toujours pour la seule raison que la symétrie par rapport à N est une isométrie), tout comme $[C'A]$ est de même longueur que $[CD]$. Or dans le triangle $B'DC$, $B'C \leqslant B'D + DC$ en vertu de l'inégalité triangulaire, ce qui entraîne $2.MN \leqslant AB + CD$. L'égalité n'a lieu que lorsque les trois points B', D, C sont alignés, donc lorsque (BA) et (CD) sont parallèles.

Solution de l'exercice 39. Une telle droite coupe deux des côtés, par exemple $[BC]$ et $[AC]$, en M et N respectivement.



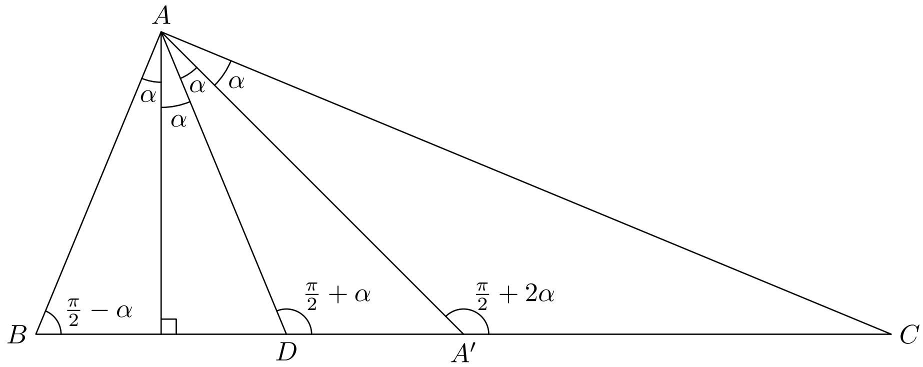
Si l'on pose $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $x = CM$, $y = CN$ et $z = MN$, le périmètre de CMN vaut $x+y+z$ et celui de $MNAB$ vaut $z+(b-y)+c+(a-x)$. Ces deux périmètres sont égaux si et seulement si $x+y = \frac{a+b+c}{2}$. Or si l'on appelle I le centre du cercle inscrit, r son rayon et S l'aire du triangle ABC, l'aire du triangle IMC, de hauteur $ID = r$ et de base $MC = x$, vaut $\frac{xr}{2}$. De même, l'aire du triangle INC vaut $\frac{yr}{2}$, donc l'aire du quadrilatère $MINC$ vaut $r\frac{x+y}{2}$. Les aires des triangles IBC, ICA, IAB valent respectivement $\frac{ar}{2}$, $\frac{br}{2}$ et $\frac{cr}{2}$, si bien que l'aire du triangle ABC vaut $\frac{r(a+b+c)}{2}$. Si $x+y = \frac{a+b+c}{2}$, c'est-à-dire si les polygones CMN et $MNAB$ ont même périmètre, l'aire du quadrilatère $MINC$ vaut $\frac{S}{2}$. Pour que le triangle CMN ait pour aire $\frac{S}{2}$, il faut que le triangle IMN ait une aire nulle, donc que I appartienne à $[MN]$.

Solution de l'exercice 40. Faisons une figure :



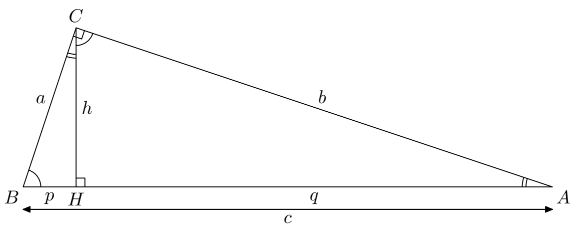
La première relation équivaut à $XA^2 - XC^2 = BC^2 - BA^2$. En utilisant les vecteurs, $XA^2 - XC^2$ est le produit scalaire $(\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC}) \cdot (\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XC})$. Or si l'on appelle B_1 le milieu de $[AC]$, $\overrightarrow{XA} + \overrightarrow{XC} = 2\overrightarrow{XB_1}$, et $\overrightarrow{XA} - \overrightarrow{XC} = \overrightarrow{CA}$. D'où $2\overrightarrow{XB_1} \cdot \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{BB_1}\overrightarrow{AC}$, et finalement $(\overrightarrow{XB_1} + \overrightarrow{BB_1}) \cdot \overrightarrow{CA} = 0$. Si B_2 est le milieu de $[XB]$, cette dernière relation équivaut à $\overrightarrow{B_2B_1} \cdot \overrightarrow{CA} = 0$, soit (B_2B_1) perpendiculaire à (CA).Or l'homothétie de centre B et de rapport 2 transforme B_2 en X et B_1 en un point B', symétrique de B par rapport au milieu de $[AC]$: (XB') doit donc être perpendiculaire à (AC). De la même manière, en définissant A' (resp. C') comme le symétrique de A par rapport au milieu de $[BC]$ (resp. $[AB]$), (XA') doit être perpendiculaire à (BC), et (XC') à (AB). Or ABC est le triangle des milieux de $A'B'C'$: (AB) est parallèle à $(A'B')$, (BC) à $(B'C')$ et (CA) à $(C'A')$, si bien que X doit être sur les trois hauteurs de $A'B'C'$. L'unique point vérifiant les deux égalités est l'orthocentre de $A'B'C'$.

<u>*Solution de l'exercice 41.*</u> Si l'on appelle D le pied de la bissectrice, A' le milieu de $[BC]$, il est facile de voir que $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} - \alpha$, $\widehat{ADC} = \frac{\pi}{2} + \alpha$ et $\widehat{AA'C} = \frac{\pi}{2} + 2\alpha$. Les autres angles s'en déduisent élémentairement.



Si l'on utilise le fait que A' est le milieu de $[BC]$, la loi des sinus dans le triangle $AA'C$ donne $\frac{A'C}{AC} = \frac{\sin\alpha}{\sin(\frac{\pi}{2}+2\alpha)}$, alors que dans le triangle ABC, la même loi des sinus donne $\frac{BC}{AC} = \frac{\sin(4\alpha)}{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)}$. Donc $\frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\cos(2\alpha)\sin(4\alpha)} = \frac{1}{2}$. Comme $\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$ et $\sin(4\alpha) = 2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)$, on trouve finalement $2\cos^2(2\alpha) = 1$ d'où $\alpha = \frac{\pi}{8}$. Le triangle ABC est donc rectangle en A.Une manière plus rapide d'atteindre ce résultat est de remarquer que dans tout triangle, si O est le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre, O et H sont isogonaux, ce qui signifie que les angles $\widehat{HAB}$ et $\widehat{CAO}$ sont égaux. Il résulte donc de la figure que O appartient à la médiane (AA'). Or O appartient aussi à la médiatrice de $[BC]$, qui ne coupe la médiane qu'au point A'. Donc le centre du cercle circonscrit est le milieu de $[BC]$, ce qui entraîne que le triangle est rectangle en A.

<u>*Solution de l'exercice 42.*</u> Notons les angles égaux sur la figure :



On remarque que les triangles ABC, CBH et ACH sont semblables. On en déduit les proportionnalités

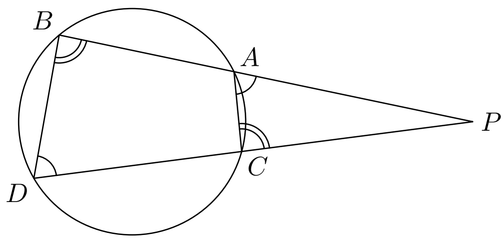
$$\frac{a}{p} = \frac{b}{h} = \frac{c}{a}, \quad \frac{a}{h} = \frac{b}{q} = \frac{c}{b}, \quad \frac{p}{h} = \frac{h}{q} = \frac{a}{b}$$

qui donnent directement les égalités $a^2 = pc$, $b^2 = qc$ et $h^2 = pq$. L'égalité $a^2 + b^2 = c^2$ s'obtient par somme des deux premières.

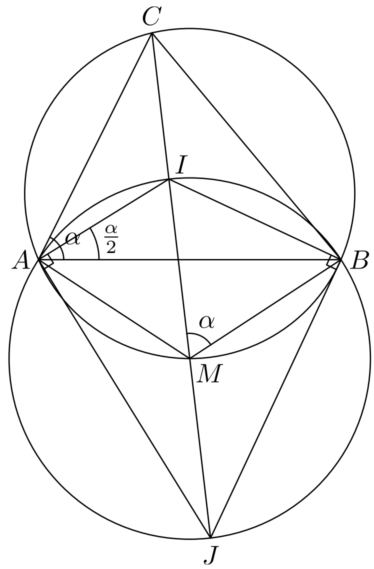
<u>*Solution de l'exercice 43.*</u> À l'aide du théorème de l'angle inscrit, on montre facilement que les triangles PBD et PCA sont semblables. Ceci nous donne

$$\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$$

c'est-à-dire $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. (Remarque : cette valeur commune, qui ne dépend que de P et du cercle, s'appelle la *puissance de P par rapport au cercle.*)

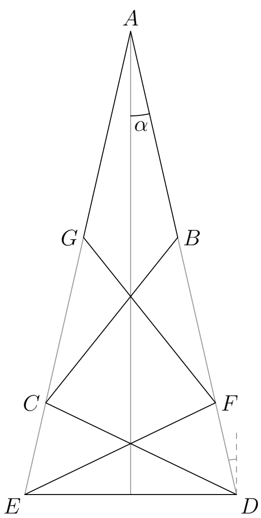


Solution de l'exercice 44. Faisons une figure.



Tout d'abord, M étant le milieu de l'arc $\widehat{AB}$, (CM) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$. Notons α l'angle $\widehat{BAC}$.D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{BMC} = \alpha$, puis $\widehat{BAI} = \frac{\alpha}{2}$. Donc (AI) est la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Ceci montre que I est le centre du cercle inscrit. Enfin, $[IJ]$ étant un diamètre du cercle Γ', les angles $\widehat{JAI}$ et $\widehat{IBJ}$ sont droits ; or, les bissectrices extérieures sont perpendiculaires aux bissectrices intérieures. On en déduit que J est le centre d'un cercle exinscrit.

Solution de l'exercice 45. La figure est entièrement déterminée par l'énoncéet en particulier, elle est symétrique par rapport à la médiatrice de$[DE]$. Notons 2α l'angle que l'on cherche. On a alors$\widehat{AED} = \widehat{ADE} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.

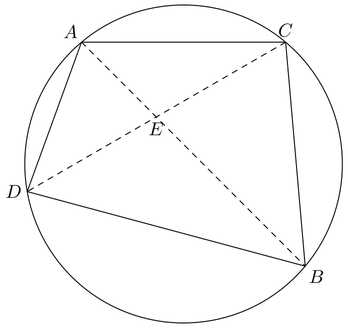


Les triangles DAE et CDE sont isocèles de sommets respectifs A et D.Comme ils ont en commun l'angle $\widehat{AED}$, ils sont semblables. Ilen résulte que $\widehat{CDE} = 2\alpha$.Par ailleurs AGF et BCD sont aussi des triangles isocèles de sommetsrespectifs G et C. Il en résulte $\widehat{ACB} = 2\alpha$ et :

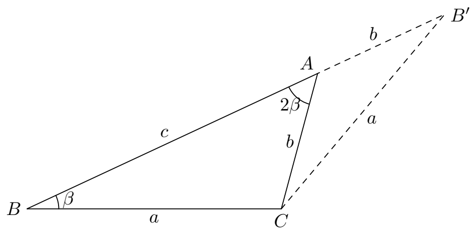
$$\widehat{BCD} = \pi - 2\widehat{ADC} = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - 2\alpha\right) = 6\alpha.$$

Comme les points A, C et E sont alignés, on a la relation$\widehat{ACB} + \widehat{BCD} + \widehat{DCE} = \pi$, c'est-à-direComme les points A, C et E sont alignés, on a la relation$\widehat{ACB} + \widehat{BCD} + \widehat{DCE} = \pi$, c'est-à-dire$2\alpha + 6\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi$, d'où $\alpha = \frac{\pi}{14}$ et l'angle cherché vaut $2\alpha = \frac{\pi}{7}$.

Solution de l'exercice 46. Les triangles AEC et DEB sont semblables, étant donné l'égalité desangles inscrits, donc : $\frac{AC}{BD} = \frac{AE}{ED}$. De même, lestriangles ADE et CBE sont semblables, et $\frac{AD}{BC} = \frac{DE}{BE}$. En multipliant ces deux égalités, on trouve la relationcherchée.

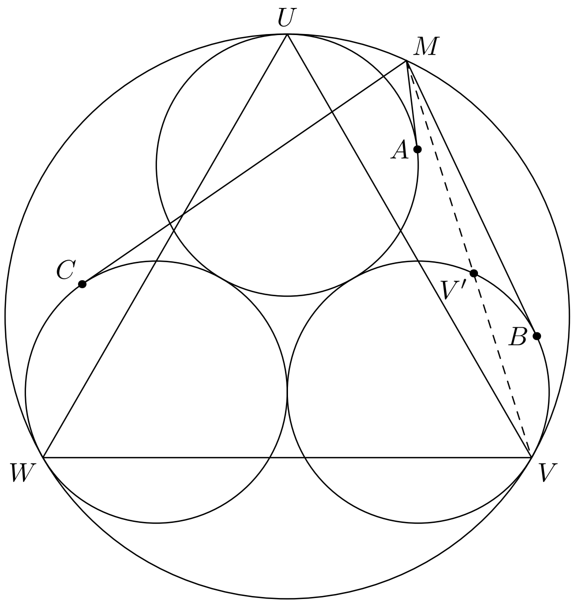


Solution de l'exercice 47. Appelons $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ les longueurs des côtés, etβ l'angle $\widehat{ABC}$ (donc 2β l'angle $\widehat{BAC}$).Soit B' le point de (AB) extérieur au segment $[AB]$ tel que $AB' = b$.



Le triangle $AB'C$ est isocèle, et comme l'angle $\widehat{BAC}$vaut 2β, $\widehat{AB'C} = \beta = \widehat{ABC}$. Il en résulteque le triangle $B'CB$ est lui aussi isocèle, et que les deux triangles$AB'C$ et $B'CB$ sont semblables, d'où $\frac{CB'}{AB'} = \frac{BB'}{CB}$, soit $\frac{a}{b} = \frac{b+c}{a}$, ou encore $a^2 = b(b+c)$. Si a, b, c sont entiers, on peut supposer b et c premiersentre eux, sans quoi leur diviseur commun d diviserait également a(d'après cette relation), et en divisant a, b, c par d, onaurait un triangle satisfaisant les mêmes hypothèses, de périmètre $d$fois plus petit. Or si b et c (donc également b et $b+c$) sontpremiers entre eux, et si le produit $b(b+c)$ est un carré parfait, $b$et $b+c$ sont tous deux est des carrés parfaits : $b = m^2$, $b+c = n^2$, donc $a = mn$, et $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$. Or d'après la loi dessinus, $\frac{a}{b} = \frac{\sin(2\beta)}{\sin(\beta)} = 2\cos(\beta)$. Etcomme l'angle $\widehat{ACB} = \pi - 3\beta$ est supposé obtus, $\beta < \frac{\pi}{6}$, d'où $\sqrt{3} < 2\cos(\beta) = \frac{a}{b} = \frac{m}{n} < 2$,$m$ et n doivent être le plus petit possibles pour que $a+b+c = mn+n^2$ soit minimum, ce qui donne $n = 4$ (car l'intervalle $]\sqrt{3}, 2[$ ne contient pas de demi-entier ni de tiers d'entier), $m = 7$ (car$\sqrt{3} < \frac{7}{4} < 2$), donc $a+b+c = 28+49 = 77$.

Solution de l'exercice 48. Si l'on appelle U, V, W les points de contact de $\mathscr{C}_1$,$\mathscr{C}_2$ et $\mathscr{C}_3$ avec Γ, U, V, W sont les sommetsd'un triangle équilatéral.

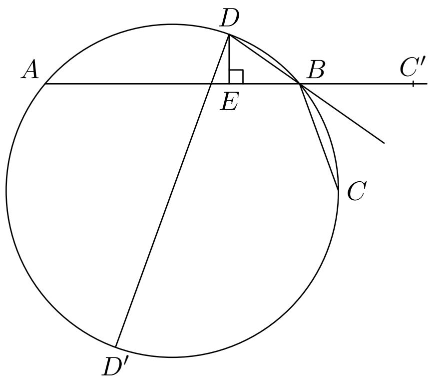


Une propriété classique du triangle équilatéral est que pour tout point$M$ du plan, $MU + MV \geqslant MW$, avec égalité si et seulement si$M$ est sur l'arc $\widehat{UV}$ de Γ ne contenant pas W.Donc, pour tout point M, l'une des distances MU, MV, MW est sommedes deux autres. Seulement, il s'agit de MA et non de MU, MB et non MV, MC etnon MW. Appelons r le rayon commun de $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$, et R le rayon de Γ. La droite MVrecoupe $\mathscr{C}_2$ en V'. L'homothétie de centre V et de rapport$\frac{r}{R}$ transforme le grand cercle Γ en $\mathscr{C}_2$,donc M en V', si bien que : $VV' = \frac{r}{R} \cdot VM$. Donc $V'M = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot VM$. La puissance du point M par rapport à$\mathscr{C}_2$ vaut donc :

$$MV \cdot MV' = \left(1 - \frac{r}{R}\right) \cdot MV^2.$$

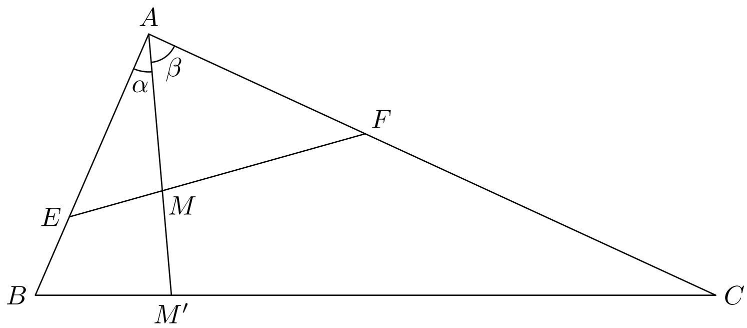
Mais cette même puissance de M par rapport à $\mathscr{C}_2$ vautégalement MB^2. Il en résulte que, si l'on pose$\lambda = \sqrt{1 - \frac{r}{R}}$, $MB = \lambda \cdot MV$. Par unraisonnement analogue, on prouverait que $MC = \lambda \cdot MW$, $MA = \lambda \cdot MU$, de sorte quel'une des longueurs MA, MB, MC est somme des deux autres, puisquel'une des longueurs MU, MV et MW est somme des deux autres.

Solution de l'exercice 49. Introduisons le point D' diamétralement opposé à D sur lecercle.



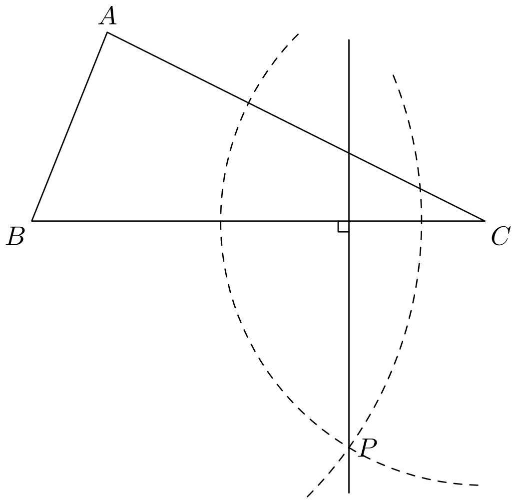
Le triangle BDD' est rectangle en B. On veut donc prouverque (BD') est la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. Parcocyclicité, les angles $\widehat{D'BC}$ et $\widehat{D'BA}$ sontrespectivement égaux à $\widehat{ADD'}$ et $\widehat{D'DC}$, quisont égaux entre eux car D est le milieu de l'arc $\widehat{AC}$.Cela conclut la première partie de l'exercice.Soit C' le symétrique de C par rapport à la droite (BD). D'après ce qui précède, il est situé sur la droite (AB). Ilsuffit donc pour conclure de montrer que le triangle ADC' estisocèle. Or on a $\widehat{DC'A} = \widehat{BCD} = \widehat{BAD}$, d'oùle résultat.

Solution de l'exercice 50. On veut utiliser le théorème de Céva. Soient M', N' et P'les points d'intersection des droites $(AM),(BN)$ et (CP).



Calculons le rapport $\frac{M'B}{M'C}$.Ce rapport est égal au rapport de l'aire des triangles ABM' etACM'. Il est donc égal au rapport$\frac{AB\sin\alpha}{AC\sin\beta}$. De même, on a$\frac{MF}{ME}=\frac{AF\sin\alpha}{AE\sin\beta}$. On a donc$\frac{M'B}{M'C}=\frac{MF}{ME}\frac{AF}{AE}\frac{AB}{AC}$. Lethéorème de Céva permet de conclure.

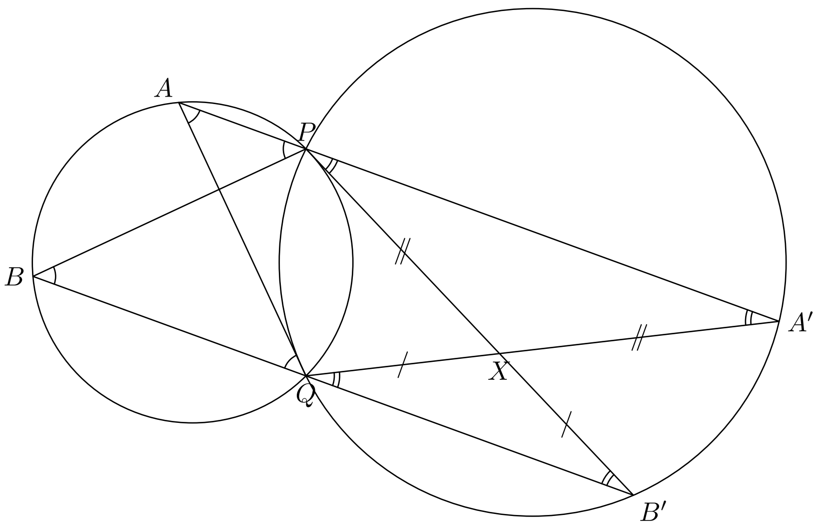
Solution de l'exercice 51. Commençons par faire une figure :



Supposons les perpendiculaires à $(BC),(AC),(AB)$ passant par P,Q,Rsont concourantes, et soit M leur point d'intersection. Soient C_1et C_2 deux cercles de centre B et C passant par P. Le point Mest sur leur axe radical. Par conséquent, il vérifie$MB^2-BP^2=MC^2-CP^2$. Ajoutons à cette égalité les deux autresobtenues en permutant les points. On obtient$BP^2+CQ^2+AR^2=BR^2+CR^2+AQ^2$. Réciproquement, comme dans ladémonstration du théorème de Céva, on prouve que si cetteégalité est satisfaite, les trois droites envisagées sontconcourantes. Comme cette égalité demeure inchangée par échangedes points P,Q,R et A,B,C, l'exercice est résolu.

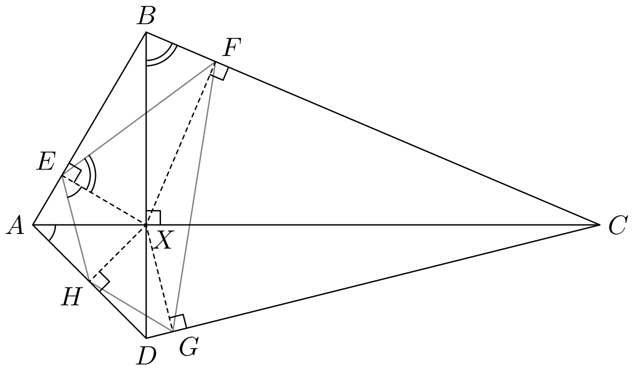
Solution de l'exercice 52. Ces trois points sont les centres des homothéties de rapport positifenvoyant un cercle sur un autre. Mais la composée de celle qui envoiele premier cercle sur le deuxième et de celle qui envoie le deuxièmesur le troisième est celle qui envoie le premier sur le troisième.Il suffit de se souvenir que la composée de deux homothéties derapport non inverses l'un de l'autre est une homothétie dont le centreest aligné avec les deux premiers centres pour conclure.

Solution de l'exercice 53. Soit X l'intersection de (AQ) et (BP).



Par cocyclicité et parallélisme, les quatre angles $\widehat{QAP}$, $\widehat{APB}$, $\widehat{AQB}$ et $\widehat{PBQ}$ sont égaux. On endéduit $AQ = BP$. De même, $A'Q = B'P$. Les triangles PAA' et QBB'étant en outre semblables, ils sont isométriques, d'où lerésultat.

Solution de l'exercice 54. Faisons une figure :



Quitte à faire ensuite une homothétie de centre X et de rapport2, il suffit de montrer que les projetés de X sur les quatrecôtés du quadrilatère sont cocycliques. Cela se vérifieimmédiatement à l'aide de l'énoncé et en remarquant lacocyclicité des points X, E, B, F et de leurs semblables.

Arithmétique

Solution de l'exercice 55. Intéressons-nous à la parité des nombres x, y et z. Il estimpossible qu'ils soient tous les trois impairs, car sinon le membrede gauche de l'égalité serait impair tandis que le membre de droiteserait pair. Ainsi l'un des nombres — et l'on peut supposer sans pertede généralité que c'est x — est pair. Il s'ensuit que $xyz-1$ estimpair, et donc qu'il doit en être de même de $x^2+y^2+z^2$ et doncde y^2+z^2 puisque x^2 est pair. On en déduit que y et z sontde parité différente : par exemple y est pair et z est impair.On regarde maintenant modulo 4. Avec ce qui précède, on a $x^2 \equiv y^2 \equiv 0 \pmod 4$ et $z^2 \equiv 1 \pmod 4$, d'où on déduit $x^2+y^2+z^2 \equiv 1 \pmod 4$. Mais par ailleurs, le produit xy estmultiple de 4, d'où il reste $xyz-1 \equiv 3 \pmod 4$. Ceci conduitune contradiction qui prouve que l'équation n'a pas de solution.

Solution de l'exercice 56. Si n est pair, alors $n^4 \equiv 0 \pmod{16}$. Sinon, $n^4 \equiv 1 \pmod{16}$ car $(4k \pm 1)^4 \equiv 1 \pmod{16}$. Par conséquent, $n_1^4 + n_2^4 + \cdots + n_{14}^4 \equiv -1 \pmod{16}$ n'est pas possible. L'équation n'a pas de solution.

Solution de l'exercice 57. Considérons l'équation de l'énoncé modulo 9. Elle s'écrit alors$x^3 + y^3 \equiv 5 \pmod 9$. Or un cube modulo 9 ne peut valoir que0, 1 ou -1 et on constate que manifestement 5 ne peut s'écriremodulo 9 comme somme de trois de ces nombres. En conclusion,l'équation n'a pas de solution.

Solution de l'exercice 58. On cherche à savoir si l'équation $x^3 + y^3 + z^3 = 20042005$ admet dessolutions en nombres entiers. Nous allons montrer que ce n'est pas lecas en réduisant modulo 9. On vérifie qu'un cube modulo 9 ne peutêtre congru qu'à 0, 1 ou -1. Ainsi la somme de trois cubes ne peut-prendre que les restes 0, 1, 2, 3, -1, -2 ou -3 modulo9. Or $20042005 \equiv 4 \pmod 9$, ce qui démontre l'impossibilité desatisfaire notre équation.

Solution de l'exercice 59. On cherche à résoudre l'équation $x^3 = (y-1)^2 + y^2 + (y+1)^2 = 3y^2 + 2$ en nombres entiers relatifs. On va prouver qu'elle n'a pas desolution en regardant modulo 9. Modulo 3 un carré ne prend que lesvaleurs 0 et 1, ainsi modulo 9 le terme $3y^2$ est congru soità 0, soit à 3. Il s'ensuit que le membre de droite $3y^2 + 2$ nepeut être congru qu'à 2 ou 5. Or un cube modulo 9 n'est jamaiscongru ni à 2, ni à 5 comme on le vérifie directement. Il s'ensuitque l'équation n'a pas de solution et donc qu'aucun cube n'est la sommede trois carrés consécutifs.

Solution de l'exercice 60. On raisonne par descente infinie. L'équation de départ implique quex^3 est multiple de 3, et donc qu'il en est de même pour x. Onécrit $x = 3x'$ et l'équation devient $9x'^3 - y^3 - 3z^3 = 0$.En refaisant le même raisonnement, on montre que y est multiple de 3puis en écrivant $y = 3y'$, l'équation se transforme à nouveau pourdonner $3x'^3 - 9y'^3 - z^3 = 0$. Encore une fois, il s'ensuit que$z = 3z'$ pour un entier z' et le triplet (x', y', z') est alors ànouveau solution de l'équation de départ.Par le principe de descente infinie, il suit que l'unique solution est$(0, 0, 0)$.

Solution de l'exercice 61. On considère cette équation modulo 13. Une étude exhaustive montrequ'une cube modulo 13 ne peut prendre que les valeurs suivantes :0, 1, 5, 8 et 12. Ainsi la quantité $5x^3$ ne peutvaloir[11] que 0, 1, 5, 8 et 12alors que $11y^3$ ne peut valoir que 0, 2, 3, 10 et 11. Leterme $13z^2$, quant à lui, s'annule évidemment modulo 13 quelleque soit la valeur de z. De ce qui précède, on déduit que la seulesolution pour avoir une somme nulle est $5x^3 \equiv 11y^3 \pmod 1$3.Il en découle, puisque 13 est premier, que x et y sont tous lesdeux multiples de 13. En écrivant $x = 13x'$ et $y = 13y'$ et enremplaçant dans l'équation de départ, on se rend compte que z estlui aussi nécessairement multiple de 13, *i.e.* s'écrit $z = 13z'$.Mais alors, le triplet (x', y', z') est à nouveau solution de la mêmeéquation, et une application du principe de descente infinie assureque l'unique solution est le triplet $(0, 0, 0)$.

Solution de l'exercice 62. Remarquons tout d'abord que $k!$ doit être divisible par 48, ce quin'est vérifié qu'à partir de $k = 6$.Supposons d'abord $k+1$ non premier. On peut écrire $k+1 = pq$, avec $p \leqslant k$ et $q \leqslant k$. Si p et q sont distincts, ilsapparaissent tous deux comme facteurs de $k!$, donc $k+1 | k!$. Si $p = q > 2$, alors q et $2q$ sont deux des facteurs de $k!$, donc $k!$ estdivisible par q^2. Hormis lorsque $k = 3$ (déjà exclu), si $k+1$ n'estpas premier, $k+1$ divise $k!$. Dès lors, dans ce cas, $k+1$ doit aussidiviser 48. Mais, d'après la remarque préliminaire, $k+1 \geqslant 7$,ce qui offre comme seules possibilités pour $k+1$: $8, 12, 16, 24$ ou48. Toutes ces valeurs sont paires, de sorte que $48(k+1)^m$ estdivisible par 32. Si $k \geqslant 8$, $k!$ est divisible par $8! = 32 \times 1260$, donc lui aussi par 32. Alors que 48 n'est pasdivisible par 32 : contradiction. Et dans le cas restant $k = 7$, $7! + 48 = 48 \times 158$, or 158 n'est pas une puissance de 8.Donc $k+1$ doit être un nombre premier. Mais, d'après le théorème deWilson, modulo ce nombre premier $p = k+1$, $k! = (p-1)!$ est congru à-1. Donc le premier membre de notre équation est congru à 47 modulo$k+1$. Et pour que ce premier membre soit, conformément à l'hypothèse,divisible par $k+1$, la seule valeur possible est $k+1 = 47$. On doitdonc avoir $\frac{46!}{48} = 47^m - 1$. Or $47^m = (1+46)^m$, et $47^m - (1+46m)$ est divisible par 46^2. $\frac{46!}{48}$ est lui aussidivisible par 46^2, puisque 46! contient les facteurs $3, 32, 23$ et46. Il en résulte que $46m$ doit également être divisible 46^2, doncque m doit être divisible par 46. Mais on ne peut pas avoir

[11] Il est normal que l'on retrouve les mêmes valeurspuisque 5 est un cube modulo 13.

$m \geqslant k$, car $2 \times 3 \times \cdots \times k \leqslant (k+1)^{k-1}$ et $48 < k!$, si bien que le membre de gauche eststrictement inférieur à $2(k-1)(k+1)^{k-1}$, donc a fortiori à$48(k+1)^m$ pour $m \geqslant k$. Dès lors, $k = 46$ et m divisiblepar 46 est lui aussi exclu, il ne reste donc plus de solutionpossible.

Solution de l'exercice 63. Une interversion de sommes permet de montrer que la différence desdeux sommes est égale à la somme des $(-1)^d E(n/d)$, où E est lapartie entière. Cette somme est faite de termes décroissantes dontles signes alternent. Elle est donc comprise entre son premier et sondeuxième terme, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 64. Les seules solutions sont $2^5 5^3$, 2 et 2^7. Pour prouver cela,on étudie la décomposition de n en facteurs premiers. Une étudede la congruence modulo 3 des valuations p-adiques montre que 3 nedivise pas n. Séparant les facteurs premiers en 2 et $\geqslant 5$, unesimple inégalité permet de conclure.

Solution de l'exercice 65. On encadre facilement y par $x+1$ et $x+3$ strictement. On a donc$y = x+2$. Cela fournit immédiatement $x = 9$ et $y = 11$.

Solution de l'exercice 66. On a $899 = 900 - 1 = 31 \times 29$, or 31 et 29 sont premiers. Pour tout n, $a^n - b^n$ est divisible par $a - b$, donc $36^n - 5^n$ est donc divisible par $36 - 5 = 31$, et $24^n - (-7)^n$ est lui aussi divisible par $24 + 7 = 31$.Pour n pair, comme $(-7)^n = 7^n$, le terme P_n est bien divisible par 31,mais pour n impair, c'est $36^n + 24^n + 7^n - 5^n$qui est divisible par31, donc P_n n'est pas divisible par 31 (ni a fortiori par 899), car ladifférence 2×7^n n'est pas divisible par 29. De même, pour n pair,$36^n - 7^n$ est divisible par $36 - 7 = 29$, $24^n - 5^n$ est divisible par$24 + 5 = 29$, donc P_n est divisible par 29, alors que si n est impair,$36^n - 7^n$ est encore divisible par 29, mais $24^n - 5^n$ n'est pasdivisible par 29 (car 29 ne divise pas 2×5^n), donc P_n n'est pasdivisible par 29. P_n est divisible par 29 et par 31 (donc par 899) siet seulement si n est pair.

Solution de l'exercice 67. **Méthode 1.**$\lfloor ka/b \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à ka/b, donc $\frac{ka}{b} - 1 < \left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor \leqslant \frac{ka}{b}$. Ce qu'on peut écrire$\left\lfloor \frac{ka}{b} \right\rfloor = \frac{ka}{b} - \frac{u_k}{b}$, u_k étant l'entier comprisentre 0 et $b-1$ tel que $ka - u_k$ soit divisible par b (le reste de la division euclidienne). Or la somme des $\frac{ka}{b}$ vaut :

$$\frac{a}{b}(1 + 2 + \cdots + (b-1)) = \frac{a}{b} \times \frac{b(b-1)}{2} = \frac{a(b-1)}{2}.$$

Mais il faut en soustraire la somme des $\frac{u_k}{b}$: il n'est paspossible de calculer u_k pour un k donné, on peut néanmoins affirmerque les u_k sont non nuls etne prennent pas deux fois la même valeur. En effet, si $u_k = u_{k'}$,cela signifierait que $ka - u_k$ et $k'a - u_k$ sont tous deux divisibles par b, donc que $(k - k')a$ est divisible par b : $b$étant premier avec a, il diviserait $k - k'$ (d'après lethéorème de Gauss), ce qui n'est pas possible si k et k' sont distincts et tous deux compris entre 0 et $b - 1$ (donc$0 < |k - k'| < b$). Le même raisonnement prouve que u_k ne peut pasêtre nul. Et si u_k prend $b - 1$ valeurs distinctes entre 1 en $b - 1$, il prend toutes les valeurs de 1 à $b - 1$, de sorte que la somme des $\frac{u_k}{b}$ vaut :

$$1 + 2 + \cdots + \frac{b-1}{b} = \frac{b-1}{2}.$$

La somme m est donc égale à $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$. Le même calcul sur la somme n nous donnera le même résultat, symétriqueen a et b, de sorte qu'on aura obligatoirement $m = n = \frac{(a-1)(b-1)}{2}$.**Méthode 2.**On peut également remarquer que pour tout k, $\frac{ka}{b} + \frac{(b-k)a}{b} = a$ est entier. Si ni $\frac{ka}{b}$ ni$\frac{(b-k)a}{b}$ ne sont entiers, la somme de leurs parties décimalesvaut 1, donc la somme de leurs parties entières vaut $a - 1 = 2\frac{a-1}{2}$. Si b est pair, a, premier avec b, est impair, etle terme du milieu, $\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$, vaut$\frac{a-1}{2}$. On en déduit que l'on ne modifie pas la somme enremplaçant chaque partie entière par $\frac{a-1}{2}$, et comme il y a$b - 1$ parties entières, leur somme vaut toujours $\frac{(a-1)(b-1)}{2}$,tant dans le calcul de m que dans le calcul de n.

<u>Solution de l'exercice 68</u>. Posons $q = ab^2 + b + 7$, et $n = a^2b + a + b$. Puisque q divise$n$, q divise nb ainsi que $nb - aq = b^2 - 7a$. Or $-7a < b^2 - 7a < b^2$, et b^2 est manifestement strictement inférieur à q. De même,si $b \geq 3$, $-7a > -q$. Si $b \geq 3$, le quotient n/q, s'il estentier, ne peut être que 0. Il reste donc trois cas à étudier : $b = 1$, $b = 2$ et $b^2 - 7a = 0$.Si $b = 1$, $q = a + 8$ doit diviser $n = a^2 + a + 1 = (a+8)(a-7) + 57$. Donc $a + 8$ doit diviser 57 : soit $a = 11$, soit $a = 49$, cequi fournit deux solutions : $b = 1$ et $a = 11$, $q = 19$ et $n = 133 = 19 \times 7$, et $b = 1$, $a = 49$, $q = 57$, $n = 2451 = 57 \times 43$. Si $b = 2$, $q = 4a + 9$ doit diviser $2a^2 + a + 2 = \frac{1}{8}(4a+9)(4a-7) + \frac{79}{8}$. Donc $4a + 9$ doit diviser 79, ce qui n'estmanifestement pas possible (79 est premier et $79 - 9 = 70$ n'est pasdivisible par 4). Mais n'oublions pas le troisième cas : $b^2 - 7a = 0$. Si $7a$ est uncarré parfait divisible par 7, $a = 7k^2$, $b = 7k$, et on remarqueque pour toute valeur de k, nous avons là une solution, car $q = 343k^4 + 7k + 7$ divise $n = 343k^5 + 7k^2 + 7k = kq$.Les solutions sont donc $(11, 1)$, $(49, 1)$ et $(7k^2, 7k)$ pour toutvaleur de k.

<u>Solution de l'exercice 69</u>. En regardant modulo 3, on montre que $z = 2z'$ doit être un nombrepair. De même, en regardant modulo 4, on montre que $x = 2x'$ doitaussi être pair. L'équation devient alors :

$$3^{2x'} = (5^{z'} - 2^y)(5^{z'} + 2^y).$$

Chacun des facteurs doit être une puissance de 3 mais leur sommen'est pas divisible par 3. L'un des deux, nécessairement le plus petit(ici le premier), doit être égal à 1. On obtient ainsi les deuxéquations $5^{z'} - 2^y = 1$ et $5^{z'} + 2^y = 3^{2x'}$. La premièreéquation implique, en regardant modulo 3, que z' est impair et que$y$ est pair. Mais si $y \geqslant 3$, n'importe laquelle de des équationsimplique, en regardant modulo 8, que z' est pair. Il n'y a donc pasde solution avec $y \geqslant 3$. La seule possibilité restante est $y = 2$qui donne directement $x = z = 2$ aussi.

<u>Solution de l'exercice 70</u>. On a :

$$(a + b + c)^2 = (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca)$$

divisible par 6, ce qui implique $a + b + c$ divisible par 6. Orpour tout entier n, $n^3 - n = (n+1)n(n-1)$ est toujours divisible par6 : l'un des trois entiers $n+1$, n ou $n+1$ est multiple de 3, etl'un au moins est pair. Donc, $(a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c)$ estdivisible par 6, ce qui entraîne $a^3 + b^3 + c^3$ divisible par 6.

<u>Solution de l'exercice 71</u>. On note $S_k = 5^k + 7^k$. On va montrer que le PGCD de S_n etS_m est 12 si m et n sont impairs et 2 sinon. On note δle PGCD que l'on cherche à calculer. Pour $m = n = 1$, on a directement$\delta = 12$. On suppose $m > n$ et on pose $m = n + a$; a et $n$sont premiers entre eux. Posons $U_a = 7^a - 5^a$. Alors $S_m - 5^a S_n = 7^n U_a$. Or, on a $\mathrm{PGCD}(\delta, 7) = \mathrm{PGCD}(\delta, 5) = 1$, d'où$\delta = \mathrm{PGCD}(U_a, S_n)$.Si a est impair, on pose $S_n = \delta\ell$ et $U_a = \delta k$ avec$k$ et ℓ premiers entre eux. Alors $7^{an} = (\delta\ell - 5^n)^a$se met sous la forme $\delta L - 5^{an}$ grâce à la formule dubinôme. De même $7^{an} = \delta K + 5^{an}$ pour un entier K. Ainsi$\delta(K - L) = 2 \times 5^{an}$. D'après le théorème de Gauss,δ est un diviseur de 2. C'est 2 car les deux nombres sontpairs.Si a est pair, on pose $a = 2b$ de sorte que $\mathrm{PGCD}(b, n) = 1$ et $n$impair. Alors δ divise $(7^n - 5^n)(7^n + 5^n) = 7^{2n} - 5^{2n}$ainsi que $U_a = 7^{2b} - 5^{2b}$. Il divise donc leur PGCD qui vaut$7^2 - 5^2 = 24$. Par ailleurs, comme m et n sont impairs, on a $7^m \equiv -1 \pmod 8$ et $5^m \equiv 5 \pmod 8$ et ainsi $S_m \equiv 4 \pmod 8$. De même $S_n \equiv 4 \pmod 8$. Par conséquent S_n et $S_m$sont divisibles par 4 mais pas par 8. De même, on montre qu'ilssont divisibles par 3. La valeur de δ est donc 12 commeannoncé.

<u>Solution de l'exercice 72</u>. Si $n + 2$ est premier, aucun des facteurs de $n!$ n'est divisible par$n + 2$, donc $n!$ n'est pas divisible par $n + 2$. Par contre, si $n + 2 = pq$, p et q sont inférieurs ou égaux à n, dans la mesure où $n+2$n'a pas de diviseurs communs avec $n+1$. Si p et q sont distincts,tous deux apparaissent séparément dans le calcul de $n! = n \times \cdots \times q \times \cdots \times p \times \cdots \times 1$, et $n!$est divisible par pq. Si $p = q$, soit $p = q = 2$ auquel cas $n = 2$et $n! = 2$ n'est pas divisible par $n + 2 = 4$, soit $p = q \geqslant 3$,auquel cas parmi les entiers inférieurs ou égaux à $n = q^2 - 2$figurent q et $2q$ notamment (car $q^2 - 2q - 2 > 0$), ce qui suffit àprouver que $n!$ est divisible par q^2.

Solution de l'exercice 73. L'idée essentielle est de faire disparaître les racines carrées, enutilisant la différence de deux carrés. Posons $\varepsilon = \sqrt{7} - \frac{m}{n}$. Si l'on multiplie ε par $\sqrt{7} + \frac{m}{n}$, onobtient $\frac{7n^2 - m^2}{n^2}$. Le numérateur est un entier, mais pasn'importe quel entier : si on le minore par 1, cela ne suffit pas car$\sqrt{7} + \frac{m}{n} > \frac{m}{n}$. En étudiant les carrés modulo 7, onremarque qu'ils sont congrus à $0, 1, 2$ ou 4, ce qui entraîne que$7n^2 - m^2$ est congru à $0, 6, 5$ ou 3 modulo 7, et ne peut jamaisêtre égal à 1 ou 2. Donc $7n^2 - m^2 \geqslant 3$ dans la mesure où celane peut pas être nul, et si $\sqrt{7} + \frac{m}{n} < \frac{3m}{n}$, alors

$$\sqrt{7} - \frac{m}{n} = \frac{\frac{7n^2 - m^2}{n^2}}{\sqrt{7} + \frac{m}{n}} > \frac{3/n^2}{3m/n} = \frac{1}{mn}.$$

Si par contre $\sqrt{7} + \frac{m}{n} \geqslant \frac{3m}{n}$, alors $\sqrt{7} - \frac{m}{n} \geqslant \frac{m}{n} \geqslant \frac{1}{mn}$, l'égalité n'étant possibleque pour $m = 1$. Pour $m = 1$, $\sqrt{7} - \frac{1}{n} \geqslant \sqrt{7} - 1 > 1 \geqslant \frac{1}{mn}$, ce qui achève la démonstration.

Solution de l'exercice 74. Si a est différent de b, un nombre premier p figure, dans lesdécompositions en facteurs premiers de a et b, avec des exposantsdifférents, éventuellement nuls. Appelons u et v ces exposants de$p$ dans les décompositions de a et b respectivement. $a = Ap^u$, et$b = Bp^v$. A chaque diviseur k de A correspondent $u + 1$ diviseursde a : $k, kp, kp^2, \ldots kp^u$, donc le nombre de diviseurs de a,que nous appellerons $d(a)$, vaut $(u+1)d(A)$. Pour un i donné entre0 et u, les $d(A)$ diviseurs du type kp^i ont chacun i commeexposant de p : si on les mutiplie, l'exposant de p du produit vaut$id(A)$. Donc l'exposant de p dans la décomposition de $f(a)$ sera $(1 + 2 + \ldots + u)d(A) = \frac{u(u+1)}{2} d(A)$. En rapprochant de $d(a) = (u+1)d(A)$, on trouve que cet exposant de p dans la décomposition de$f(a)$ vaut $\frac{u}{2} d(a)$. Par un calcul analogue, p a pour exposant$\frac{v}{2} d(b)$ dans la décomposition de b. Cela permet d'écrire $\frac{u}{v} = \frac{d(b)}{d(a)}$. Mais $\frac{d(b)}{d(a)}$ est indépendant dunombre p choisi, de sorte que le rapport $\frac{u}{v}$ est le même pourtous les facteurs premiers p intervenant dans la décomposition de l'unou l'autre des entiers a ou b. Si $d(b) > d(a)$, pour tout p, $u > v$, ce qui signifie que p a un exposant plus élevé dans a que dans$b$, ce qui contredit le fait que le nombre de diviseurs de a estinférieur au nombre de diviseurs de b. De même, si $d(b) < d(a)$, $u < v$ pour tout p, donc le nombre de diviseurs de b ne peut pas êtreinférieur au nombre de diviseurs de a. Seul est possible le cas où,pour tout p, $u = v$, c'est-à-dire où l'exposant de p est le mêmedans a que dans b, ce qui signifie précisément que $a = b$.

3 En TPE

3.1 Les énoncés

Exercice 1 (*résolu par Marcus Hanzig*). On note $\{x\}$ la partie décimale d'un réel x.Montrer que $\{n\sqrt{3}\} > \frac{1}{n\sqrt{3}}$ pour tout entier n strictement positif.Existe-t-il une constante $c > 1$ telle que $\{n\sqrt{3}\} > \frac{c}{n\sqrt{3}}$ pour tout entier n strictement positif ?

Exercice 2. Soient n un entier naturel non nul, d le nombre de diviseurs strictement positifs de n et D le produit de ces diviseurs. Montrer que $n^d = D^2$.

Exercice 3. Une opération binaire $\star$ vérifie $(a \star b) \star c = a + b + c$ pour tous réels a, b et c. Montrer que $\star$ est l'addition usuelle.

Exercice 4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}^+$ une fonction telle que $f(1) = 1$ et :

$$f(x+y) \geqslant f(x) + f(y)$$

dès que x, y et $x + y$ sont dans $[0,1]$. Montrer que $f(x) \leqslant 2x$pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 5. Soit $A = \{1,2,3,4,5\}$. Combien y a-t-il de fonctions $f : \mathscr{P}(A)\backslash\{\varnothing\} \to A$ vérifiant $f(B) \in B$ et $f(B \cup C) \in \{f(B), f(C)\}$ pour toutes parties B et C non vides de A ?

Exercice 6 (*résolu par Christopher Wells*). Montrer qu'il existe un entierdivisible par 2^{100} et ne contenant pas le chiffre 0.

Exercice 7. Soit $n \geqslant 1$ un entier, et soient $X_1, \ldots, X_{2^n-1}$ des n-uplets d'entiers relatifs. Montrer qu'il existe un n-uplet d'entiers relatifs X tel que pour tout i, le segment ouvert $]X, X_i[$ ne passe par aucun point à coordonnées entières.

Exercice 8. Montrer qu'un couple(p, q) d'entiers strictement positifs vérifie l'équation

$$p^2 - 2q^2 = \pm 1$$

si et seulement si

$$\frac{p}{q} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{2}}}}$$

avec p et q premiers entre eux.

Exercice 9 (*résolu par Juliette Fournier*). Soit P un polynôme à coefficients entiers non constant. Montrer qu'ilexiste une infinité de nombres premiers p pour lesquels il existe aumoins un entier naturel x tel que p divise $P(x)$.

Exercice 10 (*résolu par Philippe Cloarec*). Deux joueurs jouent au jeu suivant.Ils disposent d'un rectangle en papier $n \times m$ quadrillé.Tour à tour, chaque joueur choisit un noeud du réseau à l'intérieur du rectangle, ou bien sur son bord gauche ouinférieur. Il hachure les cases du rectangle qui se trouvent en haut à droite par rapport au noeud choisi.Puis il passe le rectangle à l'autre joueur.À chaque coup, chaque joueur est obligé de hachurer au moinsune case non encore hachurée auparavant. Celui qui ahachuré la dernière case du rectangle a perdu. Lequeldes deux joueurs a une stratégie gagnante ?

Exercice 11. Trouver tous les réels x tels que :

$$\{(x+1)^3\} = x^3$$

où $\{x\}$ désigne la partie décimale de x.

Exercice 12. Quelles sont les longueurs des diagonales d'un quadrilatère dont leslongueurs des côtés sont 1, 3, 4 et 10 ?

Exercice 13. Deux polynômes à coefficients entiers ont une racine commune qui est un entier strictement négatif. Peut-il exister un entier positif sur lequel les polynômes s'évaluent respectivement en 2007 et 2008 ?

Exercice 14 (*résolu par Adrien Laroche*). Un point P est contenu dansun polyèdre convexe. Pour chaque face F du polyèdre, on considère le projeté orthogonal P_F de P sur le plan de cette face. Montrer qu'il existe au moinsune face F telle que P_F se trouve sur la face F elle-même, et non sur son prolongement.

Exercice 15. On dispose d'un carré $ABCD$ de côté $a > 1$. On place le point A' (resp. B', resp. C', resp. D') sur le côté $[AB]$ (resp. $[BC]$, resp. $[CD]$, resp $[DA]$) à distance 1 de l'extrémité A (resp. B, resp. C, resp. D). On obtient un carré $A'B'C'D'$ (plus petit) pour lequel on réitère la construction.Quelle est la plus petite valeur de a pour laquelle il est possibled'itérer 2007 fois la construction précédente ?

Exercice 16. Soient x et y des nombres réels. On suppose que la suite des :

$$(\cos(n\pi x)+\cos(n\pi y))_{n\in\mathbb{N}}$$

ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Montrer que x et y sont tous les deux rationnels.

Exercice 17 (*résolu par Maxime Martelli et Rémi Varloot*). La suite (x_n) est définie de la manière récursive suivante : $x_1 = 10^{2007}+1$ et pour tout $n \geqslant 2$, x_n est le nombre $11x_{n-1}$ auquel on a retiré le chiffre de gauche. Montrer que la suite (x_n) est bornée.

Exercice 18. Soient $f_1,\dots,f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ des fonctions additivites (*i.e.*satisfaisant $f_i(x+y) = f_i(x)+f_i(y)$ pour tous réels x et y). Onsuppose que :

$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x) = ax^n$$

pour un certain réel a. Montrer qu'il existe un indice i pour lequel la fonction f_i est de la forme $f_i(x) = b_i x$, $b_i \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. Pierre dit : « Avant-hier j'avais10 ans. L'année prochaine, je fêterai mon 13-ièmeanniversaire. » Quel jour est-on ?

Exercice 20 (*résolu par François Caddet, Marc Coiffier et Jean-Alix David*). Soit (a_n) définie par $a_1 = 3$, $a_2 = 2$, et pour $n \geqslant 1$, a_{n+2} est le reste de la division euclidienne de $a_n + a_{n+1}$ par 100. Calculer le reste de la division euclidienne de :

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2007}^2$$

par 8.

Exercice 21 (*résolu par Amélie Héliou*). Si n est un entier, on note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n. Trouver tous les entiers n tels que $n = d(n)^2$.

Exercice 22. Montrer que tout entier $k > 1$ admet un multiple non nul inférieur à k^4 dont l'écriture décimale ne comporte que quatre chiffres distincts.

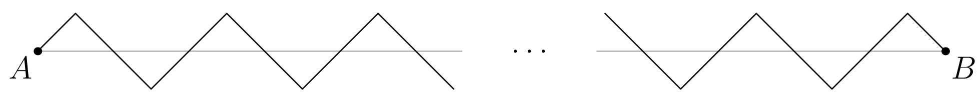
Exercice 23. On considère 2007 réels $x_1,\dots,x_{2007}$ tels que pour tout $I \subset \{1,2,\dots,2007\}$ de cardinal 7, il existe $J \subset \{1,2,\dots,2007\}$ de cardinal 11 vérifiant

$$\frac{1}{7}\sum_{i\in I} x_i = \frac{1}{11}\sum_{j\in J} x_j.$$

Montrer que tous les x_i sont égaux.

Exercice 24. Un polygone régulier à 2007 côtés est pavé par des triangles dont les sommets sont choisis parmi les sommets du polygone. Montrer qu'un seul triangle du pavage a ses trois angles aigus.

Exercice 25 (*résolu par Anca Arnautu*). On suppose que $AB = 1$, et que les segments obliques font un angle de 45° par rapport à (AB). Il y a n sommets au dessus de (AB).



Quelle est la longueur de la ligne brisée ?

Exercice 26 (*résolu par Anca Arnautu et Adrien Laroche*). Soit $\mathscr{P}$ la parabole dans le plan d'équation $y = x^2$. Soit Γ_1 le cercle de diamètre 1 tangent intérieurement à $\mathscr{P}$ en l'origine. Par récurrence, on définit Γ_{n+1} comme le cercle tangent à Γ_n et deux fois à $\mathscr{P}$.Calculer le diamètre de Γ_{2007}.

Exercice 27 (*résolu par Jean-François Martin*). On choisit un point à l'intérieur d'un $2n$-gone régulier et on le relieà tous les sommets du polygone. Les $2n$ trianglesainsi obtenus sont coloriés en noir et blanc en alternance.Montrer que l'aire totale des triangles noirs est égaleà celle des triangles blancs.

Exercice 28 (*résolu par Martin Clochard*). Montrer que pour tous réels strictement positifs x et y,

$$\frac{2xy}{x+y} + \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} \geqslant \frac{x+y}{2} + \sqrt{xy}.$$

Exercice 29. Soit X un ensemble fini de cardinal n, et soient $A_1, \ldots, A_m$ des parties de cardinal 3 dont les intersections deux à deux sont decardinal au plus 1. Montrer qu'il existe une partie A de X decardinal supérieur ou égal à $[\sqrt{2n}]$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x) et ne contenant aucun des A_i.

Exercice 30 (*résolu par Christopher Wells*). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant :

$$f(x^3 + y^3) = (x+y)(f(x)^2 - f(x)f(y) + f(y)^2)$$

pour tous réels x et y. Montrer que pour tout réel x, on a$f(2007x) = 2007f(x)$.

Exercice 31 (*résolu par Adrien Laroche*). Montrer que pour tous entiers strictement positifs a et b, le nombre $(36a + b)(a + 36b)$ n'est pas une puissance de 2.

Exercice 32 (*résolu par Pierre Camilleri*). Montrer que dans un polyèdre quelconque, il y a toujours deux faces ayant le même nombre de côtés.

Exercice 33 (*résolu par Marcus Hanzig*). Montrer que la suite (a_n) définie par $a_1 = 1$ et :

$$a_n = a_{n-1} + a_{[n/2]}$$

pour $n \geqslant 2$ (où $[k]$ est la partie entière de k) contient uneinfinité de multiples de 7.

Exercice 34 (*résolu par Alice Héliou*). Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(x^2 - y^2) = (x-y)(f(x) + f(y))$$

pour tous réels x et y.

Exercice 35. Que peut-on dire d'une fonction f dont le graphe possède deux centres de symétrie ?

Exercice 36. Soit a_n la suite récurrence définie par $a_0 = 2$ et $a_{n+1} = 2a_n^2 - 1$. Soient $N \geqslant 1$ et p un diviseur premier de a_N. On suppose qu'il existe un entier x tel que $x^2 \equiv 3 \pmod p$. Montrer que 2^{N+2} divise $p - 1$.

Exercice 37. Trouver tous les couples de nombres premiers (p, q) tels que :

$$x^{3pq} \equiv x \pmod{3pq}$$

pour tout entier x.

Exercice 38. Trouver tous les n-uplets de réels strictement positifs $(a_1, \ldots, a_n)$ tels que :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 96 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 144 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 216.$$

Exercice 39. Nous avons 13 boules de poids1 à 13 kg, mais d'apparence similaire. À l'usineon a collé sur chaque boule une petite étiquetteindiquant son poids (ainsi, les étiquettes vontausside 1 à 13). Nous voulons vérifier que toutes lesétiquettes ont été collées correctement, sans permutationspar rapport aux vrais poids des boules. Pour celanous disposons d'une balance à deux plateaux. Ellene permet pas de dire le poids de telle ou telleboule (ou ensemble de boules). Elle permet seulementde vérifier si l'ensemble de boules posées sur leplateau gauche pèse moins, autant ou plus que l'ensemble de boules posées sur le plateau droit.Montrer qu'on peut s'assurer en 3 pesées que toutesles étiquettes sont collées correctement.

Exercice 40. Trouver le plus petit entier $n > 0$ pour lequel les fractions :

$$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, \ldots, \frac{91}{n+93}$$

sont toutes irréductibles.

Exercice 41 (*résolu par Juliette Fournier*). Soit λ la racine positive de l'équation $t^2 - 1998t - 1 = 0$. Soit la suite (x_n) définie par $x_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$, par :

$$x_{n+1} = [\lambda x_n]$$

où $[x]$ est la partie entière de x. Calculer le reste de la division euclidienne de x_{1998} par 1998.

Exercice 42. Existe-t-il des entiers strictement positifs n et m tels que 5^n et 6^m se terminent par les quatre mêmes chiffres ?

Exercice 43 (*résolu par Thomas Williams*). Montrer que le nombre$\underbrace{111\ldots111}_{3^n}$est divisible par 3^n, mais pas par 3^{n+1}.

Exercice 44 (*résolu par Vincent Langlet*). Soit $n > 10$ un entier dont tous les chiffres sont dans l'ensemble $\{1, 3, 7, 9\}$. Montrer que n admet un diviseur premier supérieur ou égal à 11.

Exercice 45. Trouver tous les entiers $n \geqslant 2$ pour lesquels le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x_1^2 + x_2^2 + 50 & = & 16x_1 + 12x_2 \\ x_2^2 + x_3^2 + 50 & = & 16x_2 + 12x_3 \\ & \vdots & \\ x_{n-1}^2 + x_n^2 + 50 & = & 16x_{n-1} + 12x_n \\ x_n^2 + x_1^2 + 50 & = & 16x_n + 12x_1 \end{array} \right.$$

admet au moins une solution en nombres entiers.

Exercice 46. Un ver pénètre par un point A dans une belle pomme rouge assimilée à une sphère de 5 cm de rayon et il en sort par un point B, la longueur du parcours AB est de 9,9cm. Sachant que le parcours du ver n'est pas nécessairement rectiligne, trouver le coup de couteau qui partage la pomme en deux parties égales avec l'une des deux moitiés parfaitement saine.

Exercice 47. Un parallélépipède rectangle P est contenu dans un parallélépipède rectangle Q. Est-il possibleque le périmètre de P soit plus grand que celui de Q ?

Exercice 48. Soient $(a_1,\dots,a_n)$ et $(x_1,\dots,x_n)$ deux n-upletsde réels strictement positifs dont les sommes font 1. Montrer que :

$$2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \leqslant \frac{n-2}{n-1}+\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i x_i^2}{1-a_i}$$

et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 49. Soient $x_1,\dots,x_n$ des nombres réels stictement supérieurs à 1.On compte le nombre de réels de la forme $\varepsilon_1 x_1+\cdots+\varepsilon_n x_n$, $\varepsilon_i\in\{0,1\}$ qui sont dans un intervalledonné de longueur 1. Quel est le nombre maximal que l'on peut obtenirainsi ?

Exercice 50. On donne à chaque lettre de l'alphabet une valeur correspondant à son rang. Ainsi la lettre A vaut 1, la lettre B vaut 2, *etc.* Trouver le plus petit nombre qui est égal à la somme des valeurs de lettres qui apparaissent dans son écriture en toutes lettres.

Exercice 51. Trouver un polynôme à deux variables P tel que l'ensemble des valeursprises par $P\left(x,y\right)$ lorsque x et y parcourent les nombres réelssoit exactement les nombres réels strictement positifs.

Exercice 52 (*résolu par Alice Héliou*). La somme de vingt entiers consécutifs est 1030. Quel est le plus petitde ces entiers ?

Exercice 53 (*résolu par Martin Clochard*). Trouver toutes les solutions réelles de l'équation :

$$4x^2-40[x]+51=0$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Exercice 54 (*résolu par Adrien Laroche*). On perce un trou cylindrique de 6 cm de long à travers une sphère, l'axe du cylindre passant par le centre de la sphère.Quel est le volume restant ?(On rappelle que le volume d'une calotte sphérique est $\pi h^2(R-h/3)$, où R est le rayon de la sphère et h la hauteur de la calotte.)

Exercice 55. Un point du plan A à coordonnées entières est dit visible depuisl'origine O si le segment ouvert $]OA[$ ne contient aucun point à coordonnées entières. Combien y a-t-il de points visibles dans $[0,25]^2\setminus\{(0,0)\}$?

Exercice 56 (*résolu par Rémi Varloot*). Un iceberg a la forme d'un polyèdre convexe flottant sur la mer. Se peut-il qu'au moins 90% du volume de l'iceberg se trouve en dessous du niveau de l'eau et qu'au moins 50% de sa surface soit au dessus ?

Exercice 57. Trouver tous les nombres de 1 à 100ayant un nombre impair de diviseurs positifs.

Exercice 58 (*résolu par Lucas Boczkowski*). Trouver tous $n\in\{1,2,\dots,999\}$ tel que n^2 soit égal au cube de la somme des chiffres de n.

Exercice 59 (*résolu par Mathieu Aria, Jeanne Nguyen et Thomas Williams*). Soient $n \geqslant 3$ et $x_1, \ldots, x_{n-1}$ des entiers positifs ou nuls. Onsuppose :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} &= n \\ x_1 + 2x_2 + \cdots + (n-1)x_{n-1} &= 2n - 2. \end{aligned}$$

Calculer la valeur minimale de :

$$\sum_{k=1}^{n-1} k(2n-k)x_k.$$

Exercice 60 (*résolu par Charlotte Le Mouel*). Montrer que tout entier naturel peut s'écrire comme la différence de deux entiers ayant le même nombre de diviseurs premiers.

Exercice 61 (*résolu par Ambroise Marigot*). Trouver tous les polynomes en deux variables $P(x, y)$ tels que pour tous x et y, on ait :

$$P(x+y, y-x) = P(x, y).$$

Exercice 62. Soient A et B deux points du plan et (d) une droite ne coupant pas le segment $[AB]$. Déterminer (géométriquement) le point M de (d) pour lequel l'angle $\widehat{AMB}$ est maximal.

Exercice 63. Soit un cercle $\mathscr{C}$ de centre O etun point A à l'extérieur du cercle. Du point A on tracedeux demi-droites : une qui coupe le cercle aux points$B$ et C (dans cet ordre) et l'autre aux points$D$ et E (dans cet ordre également). Montrer que

$$\widehat{CAE} = \frac{\widehat{COE} - \widehat{BOD}}{2}.$$

Exercice 64. Les cercles k_1 et k_2 de centres respectifs O_1 et O_2 sontextérieurement tangents au point C, tandis que le cercle k de centre$O$ est extérieurement tangent à k_1 et k_2. Soient ℓ la tangentecommune à k_1 et k_2 au point C et $[AB]$ le diamètre de k perpendiculaire à ℓ. On suppose que O_1 et A sont du même côtéde ℓ. Montrer que les droites (AO_2), (BO_1) et ℓ sont coucourantes.

Exercice 65 (*résolu par Philippe Cloarec*). Une suite d'entiers (a_n) vérifie $a_{n+1} = a_n^3 + 1999$ pour tout n. Montrer qu'il y a parmi les a_n au plus un carré parfait.

Exercice 66 (*résolu par Vincent Langlet*). Cinq pierres d'apparence identique ont des masses différentes : notons $m(x)$ la masse de x. Олег connait les poids des pierres et Дмитры essaie de les deviner. Pour cela, on convient qu'il peut choisir trois pierres A, B, C et poser la question suivante à Олег : « est-il vrai que $m(A) < m(B) < m(C)$? », qui répond donc par oui ou non.Дмитры peut-il à coup sûr déterminer l'ordre des pierres par ordre croissant de masse en ne posant que neuf questions ?

Exercice 67 (*résolu par Alice Héliou*). Un régiment augarde-à-vous est disposé sur une place en un rectangle$n \times m$. L'adjudant choisit le soldat le plus petitdans chaque rang. Le plus grand de ces soldats-làs'appelle Pierre. Ensuite l'adjudant choisit le soldatle plus grand dans chaque colonne. Le plus petit de ces soldats-là s'appelle Paul. Est-ce que Pierre peut êtrele même soldat que Paul ? Est-ce qu'il peut être plus grandque Paul ? Plus petit que Paul ?

Exercice 68. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ croissantes telles que

$$(2^m + 1) f(n) f(2^m n) = 2^m f(n)^2 + f(2^m n)^2 + (2^m - 1)^2 n$$

pour tous entiers n et m.

Exercice 69 (*résolu par Rémi Varloot*). $ABCD$ et $A'B'C'D'$ sont deux trapèzesdont les côtés correspondantssont égaux :

$$AB = A'B', \quad BC = B'C', \quad CD = C'D', \quad AD = A'D'.$$

Cependant, dans $ABCD$ c'est les côtés $[AB]$ et $[CD]$ qui sontparallèles, tandis que dans $A'B'C'D'$ ce sont les côtés$[B'C']$ et $[A'D']$. Montrer que les deux trapèzes sont enfait des parallélogrammes.

Exercice 70 (*résolu par Dmitry Ivanov*). Trouver tous les couples d'entiers (x, y) tels que :

$$x^3 = y^3 + 2y^2 + 1.$$

Exercice 71 (*résolu par Alexandre Nolin*). Existe-t-il un triangle dontle périmètre fait moins de 1 centimètre, tandis le rayonde son cercle circonscrit excède 1 kilomètre ?

Exercice 72. Trouver les réels $x > -1$, $x \neq 0$ tels que :

$$\frac{x^2}{(x+1-\sqrt{x+1})^2} < \frac{x^2+3x+18}{(x+1)^2}.$$

Exercice 73 (*résolu par Charlotte Le Mouel*). Le palais du Minotaure est constitué d'un millionde cellules reliées par des couloirs. De chaque cellule partentexactement trois couloirs. Le Minotaure, parti d'une des cellules,parcourt son palais, en tournant alternativement à droite età gauche dans les cellules par lesquelles il passe. Montrer qu'ilfinira par revenir dans sa cellule de départ.

Exercice 74 (*résolu par Anca Arnautu*). Existe-t-il une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$|f(x+y) + \sin x + \sin y| < 2$$

pour tous réels x et y ?

Exercice 75. Combien y a-t-il de zéros dans le nombre :

$$12345678910111213141516171819202122...20062007$$

Exercice 76 (*résolu par Rémi Varloot*). Soit F_n la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer qu'il existeun $n > 0$ tel que F_n soit un multiple de 2007.

Exercice 77 (*résolu par Dmitry Ivanov*). On appelle A et B deux sommets opposés d'un cube de côté 1. Quel est le rayon de la sphère centrée à l'intérieur du cube, tangenteaux trois faces qui se rencontrent en A et aux trois arêtes qui serencontrent en B ?

Exercice 78. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement convexe. Est-il possible de trouver quatre points sur son graphe qui soient les sommets d'unparallélogramme ?

Exercice 79. Si $p_1, \ldots, p_k$ sont les diviseurs premiers d'un entier n, on pose $a_n = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k}$. Montrer que pour toutentier $N \geqslant 2$:

$$\sum_{n=2}^{N} a_2 a_3 \cdots a_n < 1.$$

Exercice 80. On colorie les nombres rationnels non nuls en deux couleurs : blanc et noir. On suppose que 1 est colorié en blanc, que x et $x+1$ ne sont jamais coloriés de la même couleur et que x et $\frac{1}{x}$ ont au contraire toujours la même couleur.Quelle est la couleur de $\frac{1543}{275}$?

Exercice 81. Soit ABC un triangle. On construit extérieurement à celui-ci les carrés $ABED$, $BCGF$ et $ACHI$. Montrer que les points D, E, F, G, H et I sont cocycliques si, et seulement si ABC est équilatéral ou isocèle rectangle.

Exercice 82 (*résolu par Jean-Denis Zafar*). Soient deux cercles sécants en P et Q. Une droite intersectant le segment $[PQ]$ coupe les cercle en A, B, C et D dans cet ordre. Montrer que $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 83. Dans la fraction :

$$\frac{29 \div 28 \div 27 \div \cdots \div 16}{15 \div 14 \div 13 \div \cdots \div 2}$$

on place les mêmes parenthèses au numérateur et au dénominateur et on constate que le résultat de l'opération obtenue est un nombre entier.Quel est ce nombre ?

Exercice 84 (*résolu par Ambroise Marigot*). Pour quels entiers k existe-t-il une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ vérifiant$f(2006) = 2007$ et :

$$f(xy) = f(x) + f(y) + kf(\mathrm{PGCD}(x, y))$$

pour tous entiers x et y ?

Exercice 85. Un quadrilatère convexe $ABCD$ est tel que $\widehat{ABC}+\widehat{BCD} < \pi$. Soit E le point d'intersection des droites (AB) et (CD). Montrer que $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ si, et seulement si :

$$AC^2 = CD \cdot CE - AB \cdot AE.$$

Exercice 86. Dans l'écriture décimale de A, les chiffres apparaissent par ordre (strictement) croissant de gauche à droite. Quelle est la somme des chiffres de $9A$?

Exercice 87. Déterminer les 100 premierschiffres après la virgule de

$$\left(5+\sqrt{26}\right)^{100}.$$

Exercice 88. Un rectangle $ABCD$ est contenu dans un rectangle $A'B'C'D'$. Est-il possible que le périmètre de P soit plus grand que celui de Q ?

Exercice 89 (*résolu par François Caddet et Jean-Alix David*). Est-ce que 1 000 000 027 est premier ?

Exercice 90. Montrer que

$$\sin\frac{7\pi}{30} + \sin\frac{11\pi}{30} = \sin\frac{\pi}{30} + \sin\frac{13\pi}{30} + \frac{1}{2}.$$

Exercice 91 (*résolu par Marc Coiffier*). Soient A, B, C, D, E, F et G des points du plan tels que $AB = BC = CD = DE = EF = FG = GA$ et A, B, F, D d'une part et A, G, C, E d'autre part sont alignés. Calculer l'angle $\widehat{EAD}$.

Exercice 92 (*résolu par Rémi Varloot*). Montrer que $\mathbb{N}$ peut s'écrire comme l'union de trois ensembles disjoints tels que tous m et n vérifiant $|m-n| \in \{2,5\}$ n'appartient pas au même ensemble.Montrer que $\mathbb{N}$ peut s'écrire comme l'union de quatre ensembles disjoints tels que tous m et n vérifiant $|m-n| \in \{2,3,5\}$ n'appartient pas au même ensemble. Est-il possible de faire celaavec seulement trois ensembles ?

Exercice 93. La suite (x_n) est définie récursivement par $x_0 = 1$, $x_1 = 1$, et :

$$x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{x_n}$$

pour tout $n \geqslant 0$. Calculer x_{2007}.

Exercice 94 (*résolu par Yrvann Emzivat, William Fujiwara et Amélie Héliou*). Soient ABC un triangle acutangle et D, E et F les pieds des hauteursissues de A, B et C respectivement. Soit P (resp. Q, resp. R)le pied de la perpendiculaire à (EF) (resp. (FD), resp. (DE)) issuede A (resp. B, resp. C). Montrer que les droites (AP), (BQ) et(CR) sont concourantes.

Exercice 95 (*résolu par Alice Héliou*). L'entier naturel A a la propriété suivante : le nombre $1+2+\cdots+A$ s'écrit (en base 10) comme le nombre A suivi de trois autreschiffres. Trouver A.

Exercice 96 (*résolu par Noémie Combe*). Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus. Où placer trois points A', B' et C' sur les côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement de telle sorte que le périmètre du triangle $A'B'C'$ soit minimal ?

Exercice 97 (*résolu par Ambroise Marigot*). Montrer qu'il existe un entierdivisible par 2^{100} et ne contenant que des chiffres 8 et 9.

Exercice 98 (*résolu par Juliette Fournier*). Par combien de zéros peut se terminer le nombre $1^n+2^n+3^n+4^n$?

Exercice 99. Soient cinq nombres vérifiant les propriétés suivantes :

☞ ils sont tous non nuls, et au moins l'un d'entre eux vaut 2007 ;

☞ quatre de ces nombres peuvent toujours être réordonnées pour former une suite géométrique.

Quels sont ces nombres ?

Exercice 100 (*résolu par Marcus Hanzig*). Soient $n \geqslant 1$ un entier et $x_1, \ldots x_n$ des réels strictementpositifs de somme égale à 1. Montrer que :

$$1 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1+x_1+\cdots+x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i+\cdots+x_n}} < \frac{\pi}{2}.$$

3.2 Les solutions

Solution de l'exercice 1. Pour $n=1$, la condition $\{n\sqrt{3}\} > \frac{c}{n\sqrt{3}}$ ne peut être vérifiée que si $\sqrt{3}-1 > \frac{c}{\sqrt{3}}$, c'est-à-dire seulement si $c < 3-\sqrt{3}$. Soit $c \in [1, 3-\sqrt{3}[$ une telle constante. Pour tout n, $\{n\sqrt{3}\}$ est strictement plus grand que $\frac{c}{n\sqrt{3}}$ si et seulement si $n\sqrt{3} - \frac{c}{n\sqrt{3}} > \left[n\sqrt{3}\right]$ (où $[x]$ désigne la partie entière de x). Comme $c < 3-\sqrt{3} < \sqrt{3} < 3n^2$, les deux côtés de l'inégalité sont positifs, et on peut élever au carré pour obtenir l'inégalité équivalente

$$3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} > \left[n\sqrt{3}\right]^2. \tag{III.2}$$

Quel que soit n, $3n^2-1$ n'est pas un carré parfait, car aucun carré parfait n'est congru à 2 modulo 3, et $3n^2$ n'est pas non plus un carré parfait. Pour cette raison, $\left[n\sqrt{3}\right]=\left[\sqrt{3n^2}\right]$, qui est le plus grand entier dont le carré est inférieur ou égal à $3n^2$, est au plus égal à $\sqrt{3n^2-2}$, avec égalité si et seulement si $3n^2-2$ est un carré parfait. Montrons que cette égalité a lieu pour des entiers aussi grands que l'on veut. Soit $(m_0,n_0)=(1,1)$ puis $(m_{k+1},n_{k+1})=(2m_k+3n_k,m_k+2n_k)$. On vérifie facilement que $m_{k+1}^2-3n_{k+1}^2=m_k^2-3n_k^2$. Par conséquent, l'égalité $3n_k^2-2=m_k^2$ étant vraie pour $k=0$, elle reste vraie pour $k\geqslant 1$. De plus, la suite (n_k) étant strictement croissante, on en déduit ce que l'on voulait montrer.Ces résultats en poche, intéressons-nous maintenant aux deux questions de notre énoncé. Tout d'abord, si $c=1$, on a

$$3n^2-2+\frac{1}{3n^2}>3n^2-2\geqslant\left[n\sqrt{3}\right]^2$$

pour tout n, ce qui montre l'égalité (III.2), équivalente à l'égalité que l'on voulait montrer.Si $c>1$, alors, pour n suffisemment grand,

$$3n^2-2c+\frac{c^2}{3n^2}\leqslant 3n^2-2.$$

En outre, pour une infinité de n, on a $3n^2-2=\left[n\sqrt{3}\right]^2$, et donc pour ces n, l'inégalité (III.2) n'est pas vérifiée. Il n'existe donc pas de $c>1$ vérifiant l'inégalité de l'énoncé.

<u>*Solution de l'exercice 2.*</u> L'application $f:x\mapsto\frac{n}{x}$ réalise une bijection de l'ensembledes diviseurs positifs de n. Ainsi D est aussi égal au produit des $f(x)$ pour$x$ diviseur de n, ce qui s'écrit encore $D=\frac{n^d}{D}$. Le résultats'ensuit.

<u>*Solution de l'exercice 3.*</u> Remarquons tout d'abord que si $a\star b=a\star d$, alors $a+b+c=(a\star b)\star c=(a\star d)\star c=a+d+c$, d'où $b=d$. De même, si $a\star b=d\star b$, alors $a=d$. Montrons maintenant que $a\star b=b\star a$. Pour cela, posons $d_1=a\star b$ et $d_2=b\star a$. Alors $d_1\star c=a+b+c=b+a+c=d_2\star c$, et ainsi $d_1=d_2$. Posons à présent $x=a\star 0$. On a $x\star 0=a+0+0=a$. Donc $2x=(x\star 0)\star x=a\star x=x\star a=(a\star 0)\star a=2a$, ce qui implique $x=a$, c'est-à-dire $a\star 0=a$. Pour tous a et b, $a+b=(a\star b)\star 0=a\star b$, ce qui conclut.

<u>*Solution de l'exercice 4.*</u> Pour tous $y>x$, $f(y)\geqslant f(x)+f(y-x)\geqslant f(x)$, donc f est croissante. Par ailleurs, une récurrence immédiate donne $f(2^{-k})\leqslant 2^{-k}$ pour tout entier k. Pour $x\in]0,1]$, soit $k\in\mathbb{N}^*$ tel que $2^{-k}<x\leqslant 2^{-(k-1)}$; alors $f(x)\leqslant f(2^{-(k-1)})\leqslant 2^{-(k-1)}<2x$. Comme $f(0)+f(1)\leqslant f(1)$, on a $f(0)=0$ et donc $f(x)\leqslant 2x$ dans tous les cas.

<u>*Solution de l'exercice 5.*</u> Soit f une fonction vérifiant les conditions de l'énoncé. Alors si $B\subset C\subset A$ vérifient $f(C)\in B$, on a $f(C)=f(B\cup(C\backslash B))\in\{f(B),f(C\backslash B)\}$. Mais $f(C)\notin C\backslash B$, donc $f(C)\neq f(C\backslash B)$. Ce qui montre que $f(C)=f(B)$. Nous allons numéroter les éléments de A de la façon suivante. Posons $a_1=f(A)$. Alors, pour tout $B\subset A$ contenant a_1, $f(B)=a_1$ d'après l'argument précédent. Posons maintenant $a_2=f(A\backslash\{a_1\})$. Alors pour tout $B\subset A$ tel que $a_1\notin B$ et $a_2\in B$, on a $f(B)=a_2$.De même, en posant $a_3=f(A\backslash\{a_1,a_2\})$, pour tout B tel que $a_1,a_2\notin B$ et $a_3\in B$, alors $f(B)=a_3$. On définit a_4 et a_5 de manière similaire.Inversement, si on a choisi une numérotation $a_1,\ldots,a_5$ des éléments de A, on peut lui associer une fonction de la manière suivante :pour tout $B\in A$, on définit $f(B)$ comme étant égal à $a_i\in B$ avec i minimal. Ces fonctions sont toutes distinctes, et on vérifie facilement qu'elles respectent les conditions de l'énoncé.Finalement, il y a autant de telles fonctions que de manières de numéroter les 5 éléments de A, c'est-à-dire $5!=120$.

<u>*Solution de l'exercice 6.*</u> Montrons par récurrence sur n qu'il existe un entier N divisible par 2^{100} et ayant ses n derniers chiffres non nuls. Pour $n=1$, il suffit de prendre $N=2^{100}$.Maintenant, soit N un entier divisible par 2^{100} et ayant ses n derniers chiffres non nuls. Si son$(n+1)$-ième chiffre en partant de la fin est égalementnon nul, alors on peut prendre le même entier pour $n+1$.Sinon, on prend

$N' = N + 2^{100} \cdot 10^n$.Ainsi, en 100 étapes, on obtient un entier divisible par2^{100} dont les 100 derniers chiffres sont non nulles.Il suffit alors de ne garder que ces 100 derniers chiffres,car 10^{100} est divisible par 2^{100}.

<u>Solution de l'exercice 7.</u> Remarquons en premier lieu que le cas $n = 1$ est trivial. On supposera donc $n \geqslant 2$.Notons $X = (x_1, \ldots, x_n)$ et $X_i = \left(x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}\right)$. La condition énoncée peut se redire de la façon suivante :

$$\forall i \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}, \quad \mathrm{PGCD}\left(x_1 - x_{i,1}, \ldots, x_n - x_{i,n}\right) = 1$$

ce qui est encore équivalent à :

$$\forall i \in \{1, \ldots, 2^n - 1\}, \forall p \text{ premier}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \not\equiv \left(x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}\right) \pmod p.$$

Notons maintenant p_k le k-ième nombre premier et essayons de résoudre ce système de congruences en se limitant aux s premiers nombres premiers, avec $p_1 \ldots p_s > \max\left|x_{i,j}\right|$. On obtient :

$$(S) : \begin{cases} (x_1, \ldots, x_n) \equiv \left(y_{1,1}, \ldots, y_{1,n}\right) \pmod{p_1} \\ (x_1, \ldots, x_n) \equiv \left(y_{2,1}, \ldots, y_{2,n}\right) \pmod{p_2} \\ \qquad\vdots \\ (x_1, \ldots, x_n) \equiv \left(y_{s,1}, \ldots, y_{s,n}\right) \pmod{p_s} \end{cases}$$

où $\left(y_{k,1}, \ldots, y_{k,n}\right) \not\equiv \left(x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}\right) \pmod{p_k}$ pour tout k et pour tout i. À k fixé, il existe donc au moins $p_k^n - 2^n + 1$ possibilités différentes modulo p_k pour le choix de $\left(y_{k,1}, \ldots, y_{k,n}\right)$. Ainsi il existe au moins :

$$A_s = \prod_{k=1}^{s} \left(p_k^n - 2^n + 1\right)$$

systèmes de congruences classiques qui fournissent une solution de(S). D'apres le lemme chinois, à chacun d'entre eux correspond unesolution telle que pour tout i, $1 \leqslant x_i \leqslant p_1 \ldots p_s$.La dernière inégalité prouve que si p est un nombre premier plus grandque $p_1 \ldots p_s$, alors $(x_1, \ldots, x_n) \not\equiv \left(x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}\right) \pmod p$ (car sinon il y aurait réellement égalité et il y aurait déjà égalité modulo 2 par exemple, ce qui est supposé faux).Reste donc à étudier les nombres premiers compris entre p_s et $p_1 \ldots p_s$. Soit donc p un nombre premier compris entre p_s et $p_1 \ldots p_s$. Le nombre de n-uplets pour lesquels la condition decongruence modulo p n'est pas satisfaite est majoré par $(2^n - 1)\left(\frac{p_1 \ldots p_s}{p} + 1\right)$. Ainsi le nombre de n-uplets qui vont être rejetés par les conditions de congruence modulo p, pour $p_s < p < p_1 \ldots p_s$, est majoré par :

$$B_s = \left(2^n - 1\right) \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ p_s < p < p_1 \ldots p_s}} \left(\frac{p_1 \ldots p_s}{p} + 1\right)$$

Il suffit pour conclure de prouver que $B_s < A_s$ pour s suffisammentgrand. C'est ce que nous allons faire.On a d'une part :

$$A_s = \prod_{k=2}^{s} \left(p_k^n - 2^n + 1\right) \geqslant \prod_{k=2}^{s} \left(\frac{p_k}{3}\right)^n = \frac{3}{2} \left(\frac{p_1}{3} \ldots \frac{p_s}{3}\right)^n$$

et d'autre part :

$$B_s \leqslant 2\left(2^n - 1\right)\left(p_1 \ldots p_s\right) \sum_{p=1}^{p_1 \ldots p_s} \frac{1}{p} \leqslant 4\left(2^n - 1\right)\left(p_1 \ldots p_s\right)^{3/2}$$

Ainsi :

$$\frac{A_s}{B_s} \geqslant C \frac{p_1^{n-3/2}}{3^n} \ldots \frac{p_s^{n-3/2}}{3^n} \quad \text{où } C \text{ est une constante nedépendant que de } n$$

et cette quantité peut être rendue arbitrairement grande dès que $n \geqslant 2$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>. Notons

$$\frac{p_n}{q_n} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cdots + \cfrac{1}{2}}}}$$

où la fraction contient n fois le chiffre 2 etp_n et q_n sont premiers entre eux. Il est alorsfacile à vérifier que

$$p_n = p_{n-1} + 2q_{n-1}, \qquad q_n = p_{n-1} + q_{n-1}.$$

Ou, de manière équivalente,

$$p_{n-1} = 2q_n - p_n, \qquad q_{n-1} = p_n - q_n.$$

D'autre part, (p, q) est une solution de $p^2 - 2q^2 = \pm 1$ si et seulement si $(2q - p, p - q)$ est également solution. En effet,

$$(2q - p)^2 - 2(p - q)^2 = 4q^2 - 4qp + p^2 - 2p^2 + 4pq - 2q^2 = 2q^2 - p^2.$$

Si (p, q) est une solution avec $p > 1$, on a nécessairement $p > q$ et donc $2q - p < p$.Ainsi en réitérant l'opération

$$(p, q) \mapsto (2q - p, p - q)$$

on obtient en un nombre fini n d'étapes une solutionavec $p = 1$, donc la solution $p = q = 1$. Or on a aussi $p_0 = q_0 = 1$. Par conséquent, en inversant les n étapes,on prouve par récurrence que $(p, q) = (p_n, q_n)$.Inversement, comme $(p_0, q_0) = (1, 1)$ est une solution,alors, par recurrence, (p_n, q_n) est solution pour tout n.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>. Écrivons P sous la forme $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$. Si $a_0 = 0$, le résultat est immédiat. Supposons donc que $a_0 \neq 0$. Quitte àremplacer $P(x)$ par $\frac{P(a_0 x)}{a_0}$, on peut supposer que$a_0 = 1$, ce que nous allons faire.Nous allons raisonner par l'absurde et donc supposer qu'il n'existe qu'unnombre fini de nombres premiers p pour lesquels on peut trouver unentier x tel que $P(x)$ soit un multiple de p. Notons N leproduit de tous ces nombres premiers. Considérons un entier x tel que$|P(Nx)| > 1$ et considérons un diviseur premier p de $P(Nx)$. Par définition p divise N mais alors $P(Nx) \equiv a_0 = 1 \pmod{p}$, ce qui est absurde.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>. Pour $m = n = 1$ c'est le premier joueurqui perd dès son premier coup. Dans tous les autres casil a une stratégie gagnante. Nous allons le démontrer sansexhiber la stratégie elle-même.Notons d'abord qu'il s'agit d'un jeu fini et donc l'undes joueurs a nécessairement une stratégie gagnante.Supposons que c'est le deuxième joueur. Nous recommendonsalors au premier joueur de hachurer juste une case :le coin en haut à droite du rectangle. Si notre supposition est correcte,le deuxième joueur a alors un coup gagnant. Mais dans ce cas, le premier joueur peut« retirer » son premier coup et faire le coup gagnantà la place du deuxième joueur. Quel que soit ce coup, le coinen haut à droite du rectangle sera automatiquement hachuré.Donc le premier joueur peut maintenant utiliser la soi-disantstratégie gagnante du deuxième joueur pour gagner. Cettecontradication montre que c'est le premier joueur qui aune stratégie gagnante.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u>. Tout d'abord, l'équation implique $0 \leqslant x^3 < 1$, c'est-à-dire $0 \leqslant x < 1$. Elle assure également que $(x+1)^3$ et x^3 ont la même partie décimale, c'est-à-dire qu'ils diffèrent d'un entier. On est ainsi amenéà résoudre $3x^2 + 3x = k$ (avec $k \in \mathbb{Z}$) et à ne retenir que les solutions comprises entre 0 et 1. Or, le discriminant de l'équationprécédente est $\Delta = 9 + 12k$; il est positif pour $k \geqslant 0$ (on rappelle que k est entier) et les solutions de l'équation s'écriventdans ce cas :

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 12k}}{6}.$$

On remarque que le choix du signe − conduit à un x négatif, ce qui est exclu. De plus pour que la solution n'excède pas 1, on doit prendre $k \leqslant 5$. Cela fournit six solutions potentielles à l'équation de départ dont on vérifie sans mal qu'elles conviennent toutes.

Solution de l'exercice 12. Le côté de longueur 10 est strictement plus grand que la somme des longueurs de deux autres côtés. L'inégalité triangulaire assure qu'untel quadrilatère ne peut exister.

Solution de l'exercice 13. L'hypothèse nous dit que les deux polynômes, disons P_1 et P_2 s'écrivent respectivement $P_1(x) = (x-a)Q_1(x)$ et $P_2(x) = (x-a)Q_2(x)$ où a est un certain entier strictement négatif et où Q_1 et Q_2 sont des polynômes à coefficients entiers. S'il existait un entier $b > 0$ tel que $P_1(b) = 2007$ et $P_2(b) = 2008$, $b-a$ devrait diviser simultanément 2007 et 2008, et donc leur différence 1. Mais cela n'est pas possible car $b-a > 1$ du fait que $b > 0$ et $a < 0$.

Solution de l'exercice 14. Choisissons la face F pour laquellela longueur PP_F est la plus petite possible (s'il y aplusieurs faces comme cela, on peut en prendre une quelconque).Nous affirmons que P_F se trouve alors dans la face F.En effet, si le segment $[PP_F]$ coupe une autre face F'en un point P', alors on a $PP_{F'} < PP' < PP_F$ encontradiction avec le choix de F.

Solution de l'exercice 15. À chaque étape la côté du nouveau carré a toujours une longueur strictement supérieure à 1 puisque c'est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont l'un des autres côtés mesure 1. Ainsi, la construction est toujours possible quelle que soit la valeur de a.

Solution de l'exercice 16. Soient $a_n = \cos(n\pi x)$ et $b_n = \cos(n\pi y)$. On a

$$(a_n + b_n)^2 + (a_n - b_n)^2 = 2(a_n^2 + b_n^2) = 2 + (a_{2n} + b_{2n}).$$

Si $(a_n + b_n)$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, il s'ensuit que $(a_n - b_n)$ ne prend aussi qu'un nombre fini de valeurs, et c'est donc aussi le cas de (a_n) et (b_n). En particulier, il existe $n > m$ tels que $a_m = a_n$. Ainsi, soit $(n-m)\pi x$, soit $(n+m)\pi x$ est un multiple entier de π, ce qui montre que x est rationnel. De même, y est aussi rationnel.

Solution de l'exercice 17. Supposons que x_n compte au plus k chiffres, *i.e.* $x_n < 10^k$. Ainsi $11x_n < 11 \times 10^k$, ce qui montre que l'on est dansl'alternative suivante :

- ☞ soit $11x_n$ compte au plus $k+1$ chiffres : dans ce cas, x_{n+1} compte au plus k chiffres ;
- ☞ soit $11x_n$ compte $k+2$ chiffres, et il commence par 10 : dans ce cas, x_{n+1} est obtenu en supprimant le premier 1, et comme le 0 suivant se supprime tout seul, la conclusion reste que x_{n+1} compte au plus k chiffres.

Dans tous les cas, donc, x_{n+1} a au plus k chiffres. Par récurrence, on montre donc que x_n n'a jamais plus de chiffres que n'en a x_1. La suite est donc bornée.

Solution de l'exercice 18. Posons pour tout i, $c_i = f_i(1)$. Pour tout entier m et réel x,

$$a(1+mx)^n = \prod_{i=1}^{n} f_i(1+mx) = \prod_{i=1}^{n} [c_i + mf_i(x)].$$

Supposons dans un premier temps que $a \neq 0$. Dans ce cas, $c_i \neq 0$ pour tout i. Fixons $x \in R$. Les polynômes (en T)$\prod_{i=1}^{n}[c_i + Tf_i(x)]$ et $a(1+Tx)^n$ coïncident sur un nombre infini de valeurs (sur $\mathbb{N}$) et donc sont égaux en tant que polynômes. Les facteurs étant tous de degré 1, l'unicité de la factorisation entraîne $c_i + f_i(x)T = b_i(1+xT)$, pour certains réels b_i (dépendant *a priori* de x). Par identification des coefficients, il reste $b_i = c_i$ et $f_i(x) = b_i x$. On en déduit $f_i(x) = c_i x$, et ceci est vrai pour tout réel x.Supposons maintenant $a = 0$. Nous voulons montrer qu'il existe un indice i tel que la fonction f_i soit identiquement nulle. Supposons le contraire et considérons des réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que $f_i(a_i) \neq 0$

pour tout i. Pour tout entier m, posons $x_m = a_1 + ma_2 + \cdots + m^{n-1}a_m$. Comme $\prod_{i=1}^{n} f_i(x_m) = 0$, il existe i tel que $f_i(x_m) = 0$. Comme les indices i sont en nombre fini, il en existe un tel que $f_i(x_m) = 0$ pour une infinité de valeur de m. Or :

$$f_i(x_m) = f_i(a_1) + mf_i(a_2) + \cdots + m^{n-1}f_i(a_n)$$

est un polynôme non nul en m. Il est donc impossible qu'il s'annuleune infinité de fois.

<u>*Solution de l'exercice 19.*</u> L'année prochaine, Pierre fêtera son 13-ièmeanniversaire. L'année en cours, il fêtera donc ou a déjà fêté son 12-ième anniversaire. Donc il a soit 11 soit 12 ans. Vu qu'il en avait 10 avant-hier, il en a en fait 11 maintenant.Ce qui implique deux choses : (1) il a eu son anniversairehier ou aujourd'hui ; (2) il n'a pas encore fêté son anniversaire cette année. Ainsi son anniversaire était hier et c'étaitl'année dernière. Donc hier on était le 31 décembre etaujourd'hui le 1 janvier.

<u>*Solution de l'exercice 20.*</u> Considérons la suite (b_n) telle que $0 \leqslant b_n \leqslant 3$ et $b_n \equiv a_n \pmod 4$. Comme 4 divise 100, (b_n) vérifie la relation de récurrence $b_{n+2} \equiv b_n + b_{n+1} \pmod 4$. On remarque que la suite (b_n) est périodique, la séquence $3, 2, 1, 3, 0, 3$ se répétant 334 fois jusqu'à 2004.De plus, si $a \equiv b \pmod 4$, alors $a^2 \equiv b^2 \pmod 8$. En effet, en écrivant $a = b + 4k$, on a $a^2 = (b+4k)^2 = b^2 + 8kb + 16k^2$. On en déduit que $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2007}^2 \equiv 334(1+4+1+1+0+1) + 1 + 4 + 1 \equiv 6 \pmod 8$. La réponse à la question est donc 6.

<u>*Solution de l'exercice 21.*</u> L'égalité implique directement que n est un carré, il s'écrit donc sous la forme $n = p_1^{2\alpha_1} p_2^{2\alpha_2} \cdots p_d^{2\alpha_d}$ où les α_i sont des entiers strictement positifs etles p_i des nombres premiers deux à deux distincts. Dans ce cas,on a la formule suivante usuelle pour $d(n)$:

$$d(n) = (2\alpha_1 + 1)(2\alpha_2 + 1) \cdots (2\alpha_d + 1).$$

On remarque tout d'abord qu'elle implique que $d(n)$ est impair, et donc par l'égalité $n = d(n)^2$, n est aussi impair. Autrement dit,le nombre premier 2 n'apparaît pas parmi les p_i, *i.e.* $p_i \geqslant 3$ pour tout i. On a :

$$1 = \frac{d(n)}{\sqrt{n}} = \frac{2\alpha_1 + 1}{p_1^{\alpha_1}} \cdot \frac{2\alpha_2 + 1}{p_1^{\alpha_2}} \cdots \frac{2\alpha_d + 1}{p_1^{\alpha_d}}.$$

En utilisant $p_i \geqslant 3$, on montre sans grande difficulté que chacun des facteurs précédents est supérieur à 1 et que l'égalité est atteinte seulement si $p_i = 3$ et $\alpha_i \in \{1, 2\}$. Ceci ne laisse que deux possibilités pour n, à savoir 1 et 9. On vérifiequ'elles conviennent toutes les deux.

<u>*Solution de l'exercice 22.*</u> Soit n l'entier tel que $2^{n-1} \leqslant k < 2^n$. Pour $n \leqslant 5$, le résultat se vérifie à la main. Supposons $n \geqslant 6$. Soit S l'ensemble des entiers positifs strictement plus petits que 10^n dont tous les chiffres sont des 1 ou des 0. Le cardinal de S est égal à 2^n qui est strictement plus grand que k, donc il existe $a < b$ dans S congrus modulo k, et $b - a$ ne peut avoir pour chiffres que 8, 9, 0 et 1 dans son écriture décimale. De plus, $b - a \leqslant b < 10^n < 16^{n-1} \leqslant k^4$. Donc $b - a$ répond à la question.

<u>*Solution de l'exercice 23.*</u> Remarquons tout d'abord que quitte à tout translater, on peut supposer que $x_1 = 0$.Supposons dans un premier temps que les x_i sont des entiers. Dans cecas, si I est un sous-ensemble de $\{1, \ldots, 2007\}$ de cardinal7, alors $11 \sum_{i \in I} x_i \equiv 0 \pmod 7$ et donc, puisque 7et 11 sont premiers entre eux, $\sum_{i \in I} x_i \equiv 0 \pmod 7$. On en déduit que pour tout i, $x_i \equiv x_0 = 0 \pmod 7$, c'est-à-dire que tous les x_i sont des multiples de 7. Bien entendu la famille des $\frac{x_i}{7}$ est encore solution du problème. Par descente infinie, on montre finalement que tous les x_i sont nuls, ce qui est bien ce que l'on voulait.Traitons maintenant le cas général. On procède par approximation. Prenons une famille (x_i) de réels. Notons N un entier strictement positif et supérieur à tous les inverses des $|x_i|$ pour x_i non nul. En appliquant le principe des tiroirs, on obtient un entier strictement positif D et des entiers

relatifs p_i tels que$\left|Dx_i - p_i\right| \leqslant \frac{1}{155N}$ pour tout i.Montrons que la famille des p_i satisfait encore aux hypothèses del'énoncé. Prenons donc I un sous-ensemble de $\{1,\ldots,2007\}$ de cardinal 7. Alors on peut trouver un sous-ensemble J de $\{1,\ldots,2007\}$ de cardinal 11 tel que :

$$11\sum_{i\in I} Dx_i = 7\sum_{j\in J} Dx_j$$

Évaluons :

$$\begin{aligned}\left|11\sum_{i\in I} p_i - 7\sum_{j\in J} p_j\right| &= \left|11\sum_{i\in I}\left(p_i - Dx_i\right) - 7\sum_{j\in J}\left(p_j - Dx_j\right)\right| \\ &\leqslant 11\sum_{i\in I}\left|p_i - Dx_i\right| + 7\sum_{j\in J}\left|p_j - Dx_j\right| \leqslant \frac{154}{155N} < 1\end{aligned}$$

On en déduit l'égalité attendue, étant donné que le nombre dans le membre de gauche est un entier. Par le cas précédent, tous les p_i sont nuls et donc que $|x_i| \leqslant |Dx_i| \leqslant \frac{1}{155N}$, ce qui est impossible si $x_i \neq 0$ par définition de N.

Solution de l'exercice 24. La constatation essentielle est la suivante : un triangle a ses trois angles aigus si, et seulement si le centre de son cercle circonscrit est à l'intérieur du triangle. Ici, tous les triangles du pavage ont le même cercle circonscrit, disons Γ, qui est celui qui passe par tous les points du polygône régulier. Ainsi, il s'agit de montrer qu'il y a un et un seul triangle du pavage qui contient le centre O de Γ en son intérieur. Cela est évident, le seul problème pouvant survenir est que O appartienne à l'un des côtés. Mais ceci n'est pas possiblepuisque le polygone a un impair de côtés, et donc aucune de ses« diagonales » ne passe par le centre.

Solution de l'exercice 25. En dépliant la ligne brisée, on se rend compte qu'elle a la même longueur que la diagonale d'un carré de côté 1. C'est donc $\sqrt{2}$.

Solution de l'exercice 26. Soit r_n le rayon de Γ_n et d_n son diamètre. Posons $s_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$, et soit x_n l'abscisse positive du point de tangence de Γ_n et de $\mathscr{P}$ (Γ_n est tangent à $\mathscr{P}$ en (x_n, x_n^2) et $(-x_n, x_n^2)$). Alors, le centre de Γ_n est $(0, s_{n-1} + r_n)$. La pente de la droite tangente à $\mathscr{P}$ en (x_n, x_n^2) est $2x_n$, et la pente de la droite normale est $-\frac{1}{2x_n}$. Or, le centre de Γ_n est sur cette normale, donc $\frac{x_n^2-(s_{n-1}+r_n)}{x_n-0} = -\frac{1}{2x_n}$, et $x_n^2 - s_{n-1} - r_n = -\frac{1}{2}$. En outre, $r_n^2 = (x_n - 0)^2 + (x_n^2 = s_{n-1} - r_n)^2$, donc $x_n^2 = r_n^2 - \frac{1}{4}$ et $r_n^2 - r_n - s_{n-1} + \frac{1}{4} = 0$. La résolution de cette équation donne $r_n = \frac{1+2\sqrt{s_{n-1}}}{2}$ et $d_n = 1 + 2\sqrt{s_{n-1}}$. Puis on montre par récurrence forte que $d_n = 2n - 1$. La réponse à la question est donc 4013.

Solution de l'exercice 27. Introduisons sur le plan un systèmede coordonnées avec l'origine au centre du polygone. Soit un segment $[AB]$ et un point P,de coordonnées (x, y), situé dans un demi-plan, choisi une fois pour toutes, par rapport au segment $[AB]$.Considérons l'aire du traingle ABP en tant que fonctionde x et y. Il est facile à voir que cette fonction estde la forme $ax + by + c$, où a, b, c sont des constantes réelles.Revenons à notre problème. Soit P le point de l'énoncé,choisi à l'intérieur du $2n$-gone. La valeur

(aire des triangles noirs) − (aire des triangles blancs)

peut être considérée comme une fonction de (x, y), les coordonnéesde P. Elle est donc également de la forme $f(x, y) = ax+by+c$, car sommede plusieurs fonction de cette forme-là. Si $x = y = 0$, lepoint P se trouve au centre du polygone, donc $f(x, y) = 0$par symétrie. Ainsi f est de la forme $f(P) = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{v}$, où $\vec{v}$ est le vecteurde coordonnées (a, b). Mais par symétrie, f est invariantepar rotation d'angle $2\pi/n$. Donc le vecteur $\vec{v}$ doit êtreinvariant par cette rotation. Autrement dit, $\vec{v} = 0$,donc f est identiquement nulle.

<u>*Solution de l'exercice 28.*</u> Posons $a = \frac{x+y}{2}$ et $b = \sqrt{xy}$. L'inégalité se réécrit

$$\frac{b^2}{a} + \sqrt{2a^2 - b^2} \geqslant a + b$$

ou encore $\sqrt{2a^2 - b^2} \geqslant a + b - \frac{b^2}{a}$. En élevant au carré, et après calcul, on obtient l'inégalité équivalente

$$a^4 - b^4 \geqslant 2a^3 b - 2ab^3$$

c'est-à-dire

$$(a^2 - b^2)(a^2 + b^2) \geqslant 2ab(a^2 - b^2).$$

Pour a et b strictement positifs, on a toujours $a \geqslant b$ d'après l'inégalité arithmético-géométrique, et donc si $a \neq b$ l'inégalité précédente est encore équivalente à

$$a^2 + b^2 - 2ab \geqslant 0$$

qui est encore vraie pour $a = b$. Ceci conclut.

<u>*Solution de l'exercice 29.*</u> Soit A un sous-ensemble de X ne contenant aucun des A_i, et de cardinal maximal. Soit k ce cardinal. Par hypothèse, pour tout $x \in X \backslash A$, il existe $i(x) \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $A_{i(x)} \subset A \cup \{x\}$, sinon l'ensemble $A \cup \{x\}$ vérifierait lui aussi la condition et A ne serait pas de cardinal maximal. Soit $L_x = A \cap A_{i(x)}$, qui, d'après l'observation précédente, est de cardinal 2. Comme le cardinal de $A_i \cap A_j$ est inférieur ou égal à 1 pour tous $i \neq j$, les L_x pour $x \in X \backslash A$ doivent être tous distincts. Or, il y a $\binom{k}{2}$ sous-ensembles distincts de A de 2 éléments, et $n - k$ ensembles L_x. On en déduit que $n - k \leqslant \binom{k}{2} = \frac{k(k-1)}{2}$. D'où $k^2 + k \geqslant 2n$. Mais alors $k \geqslant [\sqrt{2n}]$; en effet, si on avait $k < [\sqrt{2n}]$, on aurait $k \leqslant \sqrt{2n} - 1$ et donc $k^2 + k \leqslant 2n - \sqrt{2n} < 2n$.

<u>*Solution de l'exercice 30.*</u> En appliquant l'équation à $x = y = 0$, on a $f(0) = 0$. Avec $y = 0$, on trouve $f(x^3) = xf(x)^2$, ou de manière équivalente,

$$f(x) = x^{1/3} f(x^{1/3})^2.$$

En particulier, x et $f(x)$ ont toujours le même signe. Soit S l'ensemble défini par

$$S = \{a > 0, f(ax) = af(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

On a évidemment $1 \in S$. Montrons que si $a \in S$, alors $a^{1/3} \in S$. En fait,

$$axf(x)^2 = af(x^3) = f(ax^3) = f((a^{1/3}x)^3) = a^{1/3}xf(a^{1/3}x)^2$$

et donc

$$[a^{1/3}f(x)]^2 = f(a^{1/3}x)^2.$$

Comme x et $f(x)$ ont le même signe, $f(a^{1/3}x) = a^{1/3}f(x)$.Montrons maintenant que si $a, b \in S$, alors $a + b \in S$:

$$\begin{aligned}
f((a+b)x) &= f((a^{1/3}x^{1/3})^3 + (b^{1/3}x^{1/3})^3) \\
&= (a^{1/3} + b^{1/3})[f(a^{1/3}x^{1/3})^2 - f(a^{1/3}x^{1/3})f(b^{1/3}x^{1/3}) + f(b^{1/3}x^{1/3})^2] \\
&= (a^{1/3} + b^{1/3})(a^{2/3} - a^{1/3}b^{1/3} + b^{2/3}x^{1/3}f(x^{1/3})^2 \\
&= (a+b)f(x).
\end{aligned}$$

On conclut par une récurrence immédiate que $S = \mathbb{N}^*$ et en particulier, $f(2007x) = 2007f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 31. Écrivons $a = 2^c p$ et $b = 2^d q$, avec p et q impairs. On peut supposer sans perte de généralité que $c \geqslant d$. Alors $36a+b = 36\cdot 2^c p+2^d q = 2^d(36\cdot 2^{c-d} p+q)$. Donc $(36a+b)(36b+a) = 2^d(362^{c-d}p+q)(36b+a)$ a le facteur impair non trivial $36\cdot 2^{c-d}p+q$, et n'est pas une puissance de 2.

Solution de l'exercice 32. Notons n le nombre de faces. Considérons une face du polyèdre. Elle a au moins 3 côtés. D'autrepart, à chacun de ses côtés, il correspond une autre face du polyèdre(celle qui partage le côté en question) et à des côtés différents, ilcorrespond deux faces différentes. Ceci prouve que notre face a au plus$n-1$ côtés.Il y a donc n faces et $n-3$ possibilités pour le nombre de côtés. Leprincipe des tiroirs permet de conclure.

Solution de l'exercice 33. On raisonne par l'absurde. Supposons qu'il n'y ait qu'un nombre fini de multiples de 7 dans la suite, et soit a_k le dernier multiple de 7 (notons que $k \geqslant 5$ car $a_5 = 7$). On peut remarquer qu'alors

$$a_{2k-1} \equiv a_{2k} \equiv a_{2k+1} \equiv a \not\equiv 0 \pmod 7.$$

Puis, les sept éléments à partir de a_{4k-3} vont avoir des résidus distincts modulo 7. En effet, pour $n = 0,1,\dots,6$, $a_{4k-3+n} \equiv a_{4k-3} + na \pmod 7$, et quel que soit $a \not\equiv 0 \pmod 7$, na parcourt $\{1,2,\dots,6\}$ modulo 7 lorsque n parcourt ce même ensemble. Donc l'un de ces éléments au moins est un multiple de 7, ce qui est une contradiction avec le fait que a_k soit le dernier.

Solution de l'exercice 34. En prenant $x = y$, on obtient $f(0) = 0$. Puis avec $x = -1$ et $y = 0$, on a $f(1) = -f(-1)$. Avec, d'une part, $y = 1$, d'autre part, $y = -1$, on a pour tout x

$$f(x^2-1) = (x-1)(f(x)+f(1)),$$

$$f(x^2-1) = (x+1)(f(x)-f(1)).$$

De l'égalité $(x-1)(f(x)+f(1)) = (x+1)(f(x)-f(1))$, on tire $f(x) = f(1)x$. Donc toute fonction vérifiant l'équation est une fonction linéaire. Inversement, toute fonction de la forme $f(x) = kx$ vérifie cette équation.

Solution de l'exercice 35. La composée des deux symétries centrales est une translation de vecteur $\vec{v}(a,b)$ (non nul) qui laisse encore globalement invariant le graphe de f. Comme ce dernier ne peut contenir deux points de même abscisse (puisque f est une fonction), on a nécessairement $a \neq 0$.En terme de fonctions, l'invariance par translation se traduit parl'égalité $f(x+a) = f(x)+b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Il s'ensuit quela fonction g définie par $g(x) = f(x) - bx$ est périodique de période a. Au final, f s'écrit comme la somme d'une fonction linéaire et d'une fonction périodique.

Solution de l'exercice 36. Une méthode[12] consiste à introduire une suite auxiliaire (b_n)définie par récurrence comme suit :

$$b_0 = x \quad ; \quad b_{n+1} = 2a_n b_n \quad \text{pour tout } n \geqslant 0.$$

Une récurrence immédiate implique les relations $a_n^2 - b_n^2 \equiv 1 \pmod p$ et $a_n + b_n \equiv (2+x)^{2^n} \pmod p$ pour tout n.Appliquées à $n = N$, celles-ci fournissent $b_N^2 \equiv -1 \pmod p$et $(2+x)^{2^N} \equiv b_N \pmod p$. Il s'ensuit $(2+x)^{2^{N+1}} \equiv -1 \pmod p$, ce qui assure que l'ordre de $2+x$ modulo p est *exactement* 2^{N+2} (car p est impair, a_N l'étant aussi). La divisibilité souhaitée en résulte.*Remarque.* La méthode précédente se généralise lorsque l'hypothèse$x^2 \equiv 3 \pmod p$ est supprimée. Il faut alors travailler dans lecorps fini à p^2 éléments et la conclusion devient 2^{N+3} divise p^2-1 (ce qui est légèrement plus faible).

[12] Malgré les apparences, cette méthode n'est pasintrouvable. Le point de départ est la remarque selon laquelle larelation de récurrence ressemble à la formule du cosinus de l'angledouble (ou du cosinus hyperbolique pour ceux qui connaissent). La suiteintroduite b_n correspond alors (modulo p) à la suite des $i\times$sinus correspondants (ou à la suite des sinus hyperboliques). Larelation $a_n^2 - b_n^2 \equiv 1 \pmod p$ est alors attendue, ainsi quel'expression particulièrement simple de $a_n + b_n$ liée au fait quecelle-ci s'exprime comme une exponentielle complexe (ou uneexponentielle).

<u>*Solution de l'exercice 37.*</u> Par symétrie des rôles, on peut supposer $p \leqslant q$. On a $2^{3pq} \equiv 2 \pmod 3$, ce qui implique que p et q sont impairs (sinon 2^{3pq} serait congru à 1). Comme q est premier, on a $x^{3pq-1} \equiv 1 \pmod q$. Rappelons le résultat suivant[13] : il existe un entier x tel que pour tout n, on ait :

$$x^n \equiv 1 \pmod q \iff n \text{ est multiple de } q-1.$$

D'après ce résultat et la congruence précédente, on déduit que $q-1$ divise $3pq-1$. En outre, $3pq-1-3p(q-1) = 3p-1$, donc $q-1$ divise $3p-1$, et de même, $p-1$ divise $3q-1$. Supposons que $p=q$. Dans ce cas, $p-1$ divise $3p-1$, or $3p-1-3(p-1) = 2$ donc $p-1$ divise 2, d'où $p=q=3$. Mais $4^{27} \equiv 1 \pmod{27}$, donc $(3,3)$ n'est pas solution. On a alors $p \neq q$.Quitte à échanger p et q, on peut supposer $p<q$. Alors, comme p et q sont impairs, on a $q \geqslant p+2$, et donc l'entier $\frac{3p-1}{q-1}$ est strictement inférieur à 3. De plus, il est clairement différent de 1, et est donc égal à 2, c'est-à-dire que $2q = 3p+1$. Or, $p-1$ divise $3q-1$, donc aussi $6q-2 = 9p+1$ puis $(9p+1)-9(p-1) = 10$. Il reste les deux possibilités $(3,5)$ et $(11,17)$. Mais $3^{45} \equiv 0 \pmod{45}$ donc $(3,5)$ n'est pas solution du problème.Enfin, montrons que $(11,17)$ est solution. D'après le théorème chinois, il suffit de démontrer que $x^{3\times 11\times 17} \equiv x \pmod 3$, $x^{3\times 11\times 17} \equiv x \pmod{11}$ et $x^{3\times 11\times 17} \equiv x \pmod{17}$. On a $3\times 11\times 17 \equiv 1 \pmod 2$; pour $x \not\equiv 0 \pmod 3$, on a $x^2 \equiv 1 \pmod 3$ donc $x^{3\times 11\times 17} \equiv x \pmod 3$, et ceci est encore vrai pour $x \equiv 0 \pmod 3$. De même, on a $3\times 11\times 17 \equiv 1 \pmod{10}$, $x^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ pour $x \not\equiv 0 \pmod{11}$, donc $x^{3\times 11\times 17} \equiv x \pmod{11}$ et $3\times 11\times 17 \equiv 1 \pmod{16}$, $x^{16} \equiv 1 \pmod{17}$ pour $x \not\equiv 0 \pmod{17}$, donc $x^{3\times 11\times 17} \equiv x \pmod{17}$, ce qui conclut : les solutions sont les couples $(11,17)$ et $(17,11)$.*Remarque.* Les entiers n composés vérifiant $x^n \equiv x \pmod n$ pour tout n sont appelés les nombres de Carmichael. Celui de l'exercice $3\times 11\times 17 = 561$ est le plus petit et le plus connu, et comme on vient de le montrer c'est le seul de la forme $3pq$ avec p et q premiers. On sait aujourd'hui qu'il existe une infinité de nombres de Carmichael.

<u>*Solution de l'exercice 38.*</u> D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$(a_1+\cdots+a_n)(a_1^3+\cdots+a_n^3) \geqslant (a_1^2+\cdots+a_n^2)^2$$

avec égalité si et seulement si $(a_1,\ldots,a_n)$ et $(a_1^3,\ldots,a_n^3)$ sont proportionnels. Or, ici, $96\times 216 = 144^2$: on estdonc dans le cas d'égalité. Ceci montre que $a_1 = \cdots = a_n = a$. Il s'ensuit $na = 96$ et $na^2 = 144$, d'où $a = 3/2$, et $n = 64$.

<u>*Solution de l'exercice 39.*</u> Pour simplifier nous dirons « boule numéro k » au lieu de « bouleportant l'étiquette indiquant k kg. »Première pesée : posons sur un plateau les boules de 1 à 8 etsur l'autre les boules 11, 12 et 13. On a $1+2+3+4+5+6+7+8 = 36 = 11+12+13$. Ainsi, si la balance indiquel'égalité des poids, c'est qu'on a réellement les8 boules les plus légères d'un côté et les trois boulesles plus lourdes de l'autre. Nous avons donc divisé,de manière certaine, l'ensembledes boules en trois groupes :

$$\underbrace{1,2,3,4,5,6,7,8}_{A},\ \underbrace{9,10}_{B},\ \underbrace{11,12,13}_{C}.$$

Deuxième pesée : posons sur un plateau les boules1, 2, 3 et 9, et sur l'autre plateau les boules7 et 8. On a $1+2+3+9 = 15 = 7+8$. Donc, si labalance indique l'égalité des poids, les boules1, 2 et 3 sont en effet les plus légère du groupe A,la boule 9 la plus légère du groupe B et les boules7 et 8 les plus lourdes du groupe A. Ainsi nous avons divisé,de manière certaine, l'ensembledes boules en six groupes :

$$\underbrace{1,2,3}_{a},\ \underbrace{4,5,6}_{b},\ \underbrace{7,8}_{c},\ \underbrace{9}_{d},\ \underbrace{10}_{e},\ \underbrace{11,12,13}_{f}.$$

Troisième pesée : posons sur un plateau les boules1, 4, 7, 9 et 11 et sur l'autre plateau les boules3, 6, 10 et 13. On a $1+4+7+9+11 = 32 = 3+6+10+13$. Nous avons de nouveau mis sur un plateau

[13] On dit alors que x est d'ordre $q-1$. Le fait qu'un tel x existe n'est pas une évidence, mais c'est malgré tout un résultat à connaître.

les boulesqui sont sensées être les plus légères de leurs groupes,et sur l'autre les boules sensées être les plus lourdes.Donc, si la balance indique l'égalité des poids, c'est quetoutes les boules sont bien étiquettées.

Solution de l'exercice 40. Notons que la différence entre le numérateur et le dénominateur de chaque fraction est $n+2$. Donc $n+2$ doit être premier avec tous les entiers de 19 à 91. Comme cette liste contient tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 91, $n+2$ doit avoir seulement des facteurs premiers strictement plus grands que 91. Le plus petit entier vérifiant cette condition est 97, soit $n = 95$.

Solution de l'exercice 41. On a

$$1998 < \lambda = \frac{1998 + \sqrt{1998^2 + 4}}{2} = 999 + \sqrt{999^2 + 1} < 1999$$

d'où $x_1 = 1998$. Puisque $\lambda^2 - 1998\lambda - 1 = 0$, on a $\lambda = 1998 + \frac{1}{\lambda}$ et $x\lambda = 1998x + \frac{x}{\lambda}$ pour tout réel x. De plus, λ est irrationnel et x_{n-1} est entier, donc λx_{n-1} n'est pas entier ; ainsi, comme $x_n = [\lambda x_{n-1}]$, on a $x_n < \lambda x_{n-1} < x_n + 1$, ou encore

$$\frac{x_n}{\lambda} < x_{n-1} < \frac{x_n + 1}{\lambda}$$

que l'on réécrit

$$x_{n-1} - 1 < x_{n-1} - \frac{1}{\lambda} < \frac{x_n}{\lambda} < x_{n-1}$$

et on en déduit que $[x_n/\lambda] = x_{n-1} - 1$. Comme $1998x_n$ est entier, on a

$$x_{n+1} = [x_n\lambda] = \left[1998x_n + \frac{x_n}{\lambda}\right] = 1998x_n + x_{n-1} - 1,$$

et en particulier $x_{n+1} \equiv x_{n-1} - 1 \pmod{1998}$. Par récurrence, $x_{1998} \equiv x_0 - 999 \equiv 1000 \pmod{1998}$.

Solution de l'exercice 42. Non. En effet, les règles classiques de multiplication montrent que le produit de deux nombres se terminant par 5 (resp. 6) se termine encore par 5 (resp. 6). Ainsi, une puissance de 5 se termine toujours par 5, et une puissance de 6 par 6. Elles ne peuvent donc pas partager les quatre mêmes derniers chiffres.

Solution de l'exercice 43. Notons A_n le nombre en questionet montrons la propriété par récurrence sur n.On a $A_1 = 111$, qui est bien divisible par 3, maispas par 9. Maintenant supposons que A_n est divisible par 3^n, mais pas par 3^{n+1}.

$$A_{n+1} = 1\underbrace{00\ldots00}_{3^n-1}1\underbrace{00\ldots00}_{3^n-1}1 \cdot A_n.$$

Le nombre $100\ldots00100\ldots001$ a pour somme des chiffres 3.Il est donc divisible par 3, mais pas par 9. Par conséquent,A_{n+1} est divisible par 3^{n+1}, mais pas par 3^{n+2}.

Solution de l'exercice 44. Comme n se termine par 1, 3, 7 ou 9, il n'est pas divisible ni par 2, ni par 5. Comme les nombres premiers inférieurs à 11 sont simplement 2, 3, 5 et 7, il suffit pour conclure de montrer que$n$ n'est pas de la forme 3^a7^b. Pour cela, on étudie cette quantité modulo 20. Les puissances de 3 modulo 20 valentcycliquement 1, 3, 9 et 7, tandis que les puissances de 7 valent 1, 7, 9 et 3. Il s'ensuit que 3^a7^b est toujours congru modulo 20 à 1, 3, 7 ou 9. En particulier, son chiffredes dizaines est pair, et donc ne peut s'égaler à n qui a par hypothèse un chiffre des dizaines impair.

Solution de l'exercice 45. Posons $x_{n+1} = x_1$ de sorte que le système s'écrive sous la forme $x_i^2 + x_{i+1}^2 + 50 = 16x_i + x_{i+1}$ pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$. Cette dernière équation est équivalente à l'égalité$(x_i - 8)^2 +$

$(x_{i+1}-6)^2 = 50$ bien plus maniable pour cet exercice, puisqu'en examinant comment 50 peut s'écrire comme somme de deux carrés, elle implique que tous les couples (x_i, x_{i+1}) doivent être l'un des suivants :

$$\begin{array}{ccccccccccc} (7,-1) & ; & (7,13) & ; & (9,-1) & ; & (9,13) & ; & (3,1) & ; & (3,11) \\ (13,1) & ; & (13,11) & ; & (1,5) & ; & (1,7) & ; & (15,5) & ; & (15,7). \end{array}$$

Par ailleurs, un des précédents couples (x, y) ne peut effectivement apparaître que si x (resp. y) est la deuxième (resp. la première)d'un autre couple. Ceci élimine les couples $(7,-1)$, $(9,-1)$, $(9,13)$, $(3,1)$, $(3,11)$, $(13,11)$, $(1,5)$, $(15,5)$ et $(15,7)$ne laissant donc comme candidats que $(7,13)$, $(13,1)$ et $(1,7)$. Ainsi si solution il y a les x_i doivent former une suite périodique $\dots,7,13,1,7,13,1,\dots$ et ceci n'est évidemment possible que si n est multiple de 3.Réciproquement, si n est multiple de 3, cette suite périodique est bien solution.

Solution de l'exercice 46. Considérons C le point diamétralement opposé à A. Il est nécessairement distinct du point B car sinon le trajet serait au moins égal au diamètre de la pomme, soit 10cm. Le plan médiateur de $[BC]$, passant par définition par O le centre de la pomme, coupe cette dernière en deux parties égales. Nous affirmons que celle contenant C est saine. En effet, dans le cas contraire, par continuité du trajet, le ver serait passé par un point M situé sur le plan médiateur de $[BC]$, et en symétrisant le trajet du ver à partir dece point, on obtient un trajet de même longueur reliant A à C. Ceci n'est pas possible car A et C sont séparés de 10cm et letrajet du ver est par hypothèse strictement plus court.

Solution de l'exercice 47. Non. Soit $P(x)$ l'ensemble des pointsdont la distance au parallélépipède P est inférieure ou égaleà x. (On considère le parallélépipède comme une figurepleine, si bien que l'intérieur de P fait partie de $P(x)$pour tout x.) Notons $p(x)$ le volume de $P(x)$.$P(x)$ est constitué de :

- ☞ le parallélépipède P lui-même ;
- ☞ six parallélépipèdes de hauteur x construits sur les facesde P ;
- ☞ douze quarts de cylindres de rayon x construits sur lesarêtes de P ;
- ☞ huit huitièmes de sphère de rayon x construits autourdes sommets de P.

Le volume $p(x)$ vaut donc

$$p(x) = \frac{4}{3}\pi x^3 + l(P)x^2 + A(P)x + V(P),$$

où $l(P)$, $A(P)$ et $V(P)$ sont le périmètre de P, l'aire de Pet le volume de P respectivement.Comme $P \subset Q$, on a $p(x) < q(x)$ pour tout x. Autrement dit,

$$q(x) - p(x) = [l(Q) - l(P)]x^2 + [A(Q) - A(P)]x + [V(Q) - V(P)] > 0.$$

En considérant cette inégalité pour x très grand, ondéduit que $l(Q) \geqslant l(P)$.

Solution de l'exercice 48. Le membre de gauche est aussi égal à $1 - \sum_{i=1}^n x_i^2$, donc on peut réécrire l'inégalité cherchée sous la forme

$$\frac{1}{n-1} \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{1-a_i}.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{1-a_i}\right)\left(\sum_{i=1}^n (1-a_i)\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = 1,$$

et l'égalité $\sum_{i=1}^n (1-a_i) = n-1$ nous donne le résultat annoncé. Le cas d'égalité a lieu si et seulement si $\left(\frac{x_1^2}{1-a_1}, \dots, \frac{x_n^2}{1-a_n}\right)$ et $(1-a_1, \dots, 1-a_n)$ sont proportionnels, c'est-à-dire si et seulement si $(x_1^2, \dots, x_n^2)$ et $((1-a_1)^2, \dots, (1-a_n)^2)$ sont proportionnels.

<u>Solution de l'exercice 49</u>. Montrons que le nombre maximal de tels réels est $\binom{n}{[n/2]}$ où$[\cdot]$ désigne la partie entière. On obtient cette borne en prenantpar exemple $x_i = i + \frac{1}{2^i}$. Dans ce cas, les sommes de$[n/2]$ des x_i sont deux à deux distinctes (d'après l'unicité del'écriture en base 2) et toutes dans l'intervalle $[[n/2],[n/2]+1]$.Finalement, elles sont bien au nombre de $\binom{n}{[n/2]}$.Montrons maintenant que cette valeur ne peut pas être dépassée. Tout d'abord, remarquons que si on a une permutation σ de l'ensemble $\{1,\ldots,n\}$, alors au plus l'un des ensembles $J_i^\sigma = \{\sigma(1),\ldots,\sigma(i)\}$ vérifie que $\sum_{j\in J_i^\sigma} x_j \in I$, puisque les x_j sont supérieurs à 1. La somme de l'énoncé revient à faire la somme des x_j sur un sous-ensemble J de $\{1,\ldots,n\}$. Or, si un tel sous-ensemble J est de cardinal i, il existe $i!(n-i)!$ permutations σ telles que $J = J_i^\sigma$. Soit $f(J)$ l'ensemble de ces permutations, et soit T l'ensemble des $J \subset \{1,\ldots,n\}$ tels que $\sum_{j\in J} x_j \in I$. D'après la remarque précédente, les ensembles $f(J)$ pour $J \in T$ sont deux à deux disjoints, et comme $\mathrm{Card}(f(J)) = \mathrm{Card}(J)!(n-\mathrm{Card}(J))!$, on a

$$\sum_{J\in T} \mathrm{Card}(J)!(n-\mathrm{Card}(J))! \leqslant n!$$

puisque l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots,n\}$ est de cardinal $n!$. Or, $t!(n-t)!$ est minimal pour $t = [n/2]$, donc la somme de gauche est minorée par $\mathrm{Card}(T) \times [n/2]!(n-[n/2])!$. En divisant l'inégalité qui en découle par $n!$, on obtient

$$\mathrm{Card}(T) \leqslant \binom{n}{[n/2]},$$

qui est bien l'inégalité désirée.

<u>Solution de l'exercice 50</u>. Calculons la valeur des mots utilisés pour écrire les nombres :

Un :	35	Deux :	54	Trois :	81
Quatre :	82	Cinq :	43	Six :	52
Sept :	60	Huit :	58	Neuf :	46
Dix :	37	Onze :	60	Douze :	71
Treize :	83	Quatorze :	123	Quinze :	92
Seize :	64	Vingt :	72	Trente :	82
Quarante :	97	Cinquante :	104	Soixante :	107
Cent :	42	Et :	25		

Parmi les nombres précédents, ceux inférieurs à 100 sont largement dépassés par la somme des valeurs de leurs lettres. On en déduit que le nombre cherché est supérieur à 100. On vérifie que les nombres entre 101 et 120 ne conviennent pas. Comme la plus petite valeur associée à un chiffre des unités est 43 (qui est associée à 5), et qu'un test assure que les nombres 125, 135, 145, 155 et 165 sont encore largement dépassés par la somme des valeurs de leurs lettres, on en déduit que le nombre cherché est supérieur à 200.La valeur littérale de 200 est 96. Comme la somme des nombres compris entre 1 et 20, hormis 14, n'excède pas 100, aucun des nombres compris entre 200 et 220, hormis 214 n'est susceptible de convenir. On vérifie que 214 ne convient pas non plus, pas plus que 221. Le meilleur candidat est désormais 222 qui répond, lui, à la question.

<u>Solution de l'exercice 51</u>. Il est facile de voir que $P(x,y) = x^2 + (xy+1)^2$ convient.

<u>Solution de l'exercice 52</u>. Si n désigne le plus petit de ces entiers, la somme vaut :

$$n + (n+1) + (n+2) + \cdots + (n+19) = 20n + 190.$$

On est donc ramené à résoudre l'équation $20n + 190 = 1030$, qui donne$n = 42$.

<u>Solution de l'exercice 53</u>. Remarquons que

$$(2x-3)(2x-17) = 4x^2 - 40x + 51 \leqslant 4x^2 - 40[x] + 51 = 0$$

ce qui donne $1,5 \leqslant x \leqslant 8,5$ et $1 \leqslant [x] \leqslant 8$. D'après l'équation,

$$x = \frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}$$

et donc il est nécessaire que

$$[x] = \left[\frac{\sqrt{40[x]-51}}{2}\right].$$

En testant $[x] = 1,2,\dots,8$ dans cette équation, on trouve que $[x]$ ne peut être égal qu'à 2, 6, 7 ou 8. On en déduit que les seules solutions possibles pour x sont $\sqrt{29}/2$, $\sqrt{189}/2$, $\sqrt{229}/2$ et $\sqrt{269}/2$. Une vérification rapide confirme que ces valeurs marchent.

Solution de l'exercice 54. Soit R le rayon de la sphère. Par le théorème de Pythagore, le rayon du cylindre est $\sqrt{R^2-9}$. Le volume restant est égal au volume de la sphère, c'est-à-dire $\frac{4}{3}\pi R^3$, auquel on a enlevé le volume du cylindre, c'est-à-dire $\pi(R^2-9)\times 6$, et le volume des deux calottes sphériques, c'est-à-dire $2\times\pi(R-3)^2(R-\frac{R-3}{3}) = \frac{2}{3}\pi(R-3)^2(2R+3)$.Le calcul donne

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 - \pi(R^2-9)\times 6 - \frac{2}{3}\pi(R-3)^2(2R+3) = 36\pi\,\mathrm{cm}^3$$

et on constate en particulier que le résultat ne dépend pas de R !

Solution de l'exercice 55. La remarque suivante va nous faciliter la tache : le point de coordonnées (x,y) est visible si, et seulement si x et y sont premiers entre eux. Effectuons à présent le décompte des points visibles en comptant séparément ceux (strictement) au-dessous de la diagonale $x=y$, ceux au-dessus et ceux sur la diagonale. Bien entendu, par symétrie, il y a autant de points visibles au-dessous qu'au dessus. Par ailleurs sur la diagonale, il y a un unique point visible qui est $(1,1)$.À abscisse x fixée, il y a, par la première remarque de cette solution, autant du points visibles sous la diagonale que d'entiersdans $\{0,1,\dots,x-1\}$ qui sont premiers avec x. Par définition,c'est $\varphi(x)$ où φ est la fonction indicatrice d'Euler. Au final, le nombre cherché est donc :

$$1+2\big[\varphi(2)+\varphi(3)+\varphi(4)+\cdots+\varphi(25)\big] = 399.$$

(Pour calculer rapidement les premières valeurs de φ, on peut utiliser les formules $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ lorsque p est un nombre premier et $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ lorsque a et b sont premiers entre eux.)

Solution de l'exercice 56. Considérons une pyramide à base carrée de côté 1 et de hauteur $\frac{1}{10}$, immergée pointe en bas à 99% de la hauteur.Le volume en immersion vaut $\left(\frac{99}{100}\right)^3$ du volume total, ce qui dépasse bien 90%.La surface immergée vaut $2\left(\frac{99}{100}\right)^2\sqrt{\frac{1}{100}+\frac{1}{4}}$ alors que la surface totale est de $2\sqrt{\frac{1}{100}+\frac{1}{4}}+1$, et on vérifie que le rapport des deux est bien inférieurà 50%.

Solution de l'exercice 57. Si a est un diviseur de N, alorsN/a en est un aussi. Ainsi les diviseurs se répartissenten paires. La seule exception, c'est quand $a = N/a$, autrement dit, $N = a^2$. Dans ce cas, a est le seuldiviseur à ne pas avoir de paire. Donc N a un nombreimpair de diviseurs positifs si et seulement c'est uncarré parfait. Les nombres répondant à la question sont donc 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 et 100.

Solution de l'exercice 58. Pour que n^2 soit un cube, n doit être lui-même un cube. Comme $n < 1000$, on doit avoir $n = 1^3, 2^3, \dots,$ ou 9^3. Pour $n \geqslant 6^3 = 216$, on a $n^2 \geqslant 6^6 > 27^3$. Or, la somme des chiffres de n est au plus $9+9+9 = 27$.Pour $n \in \{1,8,27,64,125\}$, on vérifie à la main que 1 et 27 ont la propriété demandée et que ce n'est pas le cas des autres. Les solutions sont donc $n=1$ et $n=27$.

<u>Solution de l'exercice 59</u>. La somme que l'on considère peut être réécrite $2n(2n-2)-\sum_{k=1}^{n-1} k^2 x_k$. On a

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^2 x_k = \sum_{k=1}^{n-1} x_k + (k-1)(k+1)x_k \leqslant n + n\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)x_k = n + n(2n-2-n) = n^2 - n.$$

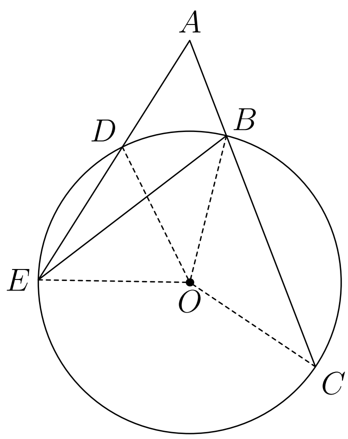
La quantité cherchée est donc au moins $2n(2n-2)-(n^2-n) = 3n^2-3n$, et cette borne est atteinte pour $x_1 = n-1$, $x_2 = \cdots = x_{n-2} = 0$, $x_{n-1} = 1$.

<u>Solution de l'exercice 60</u>. Si n est pair, on peut écrire $n = 2n-n$. Sinon, appelons d le plus petit nombre premier impair qui ne divise pas n. Puisque n s'écrit manifestement sous la forme $n = dn-(d-1)n$, il suffit de montrer que dn et $(d-1)n$ ont le même nombre de diviseurs premiers.Les facteurs premiers de dn sont ceux de n auxquels il faut ajouter d (puisque par hypothèse d ne divise pas n). D'autre part, tous les facteurs premiers de $d-1$ sont certainement plus petits que $d-1$ et donc apparaissent dans n, à l'exception de 2. Ainsi dn et $(d-1)n$ ont tous les deux un facteur premier de plus que n (c'est d pour dn et 2 pour $(d-1)n$), ce qui conclut la démonstration.

<u>Solution de l'exercice 61</u>. Les polynômes constants sont évidemment solutions.Remarquons que $P(x,y) = P(x+y, y-x) = P(2y,-2x)$ pour tous x et y. En répétant ce procédé, on obtient $P(x,y) = P(16x,16y)$. En écrivant $P(x,y) = \sum_{i,j\geqslant 0} a_{ij}x^i y^j$, l'égalité précédente implique, par unicité de l'écriture, que $16^{i+j}a_{ij} = a_{ij}$, et il s'ensuit que $a_{ij} = 0$ pour $i+j > 0$. Donc P doit être constant.

<u>Solution de l'exercice 62</u>. Soient pour l'instant M un point quelconque du plan et R le rayon du cercle circonscrit au triangle AMB. La formule $AB = 2R\sin\widehat{AMB}$ montre que l'angle $\widehat{AMB}$ est maximal lorsque$R$ est minimal (puisque AB reste constant). Ainsi, il s'agit de trouver le cercle de plus petit rayon passant par A et B et coupant la droite (d) et il est évidemment obtenu lorsqu'il est tangent àcette droite. Le point M cherché est le point de tangence.

<u>Solution de l'exercice 63</u>. La figure est la suivante :

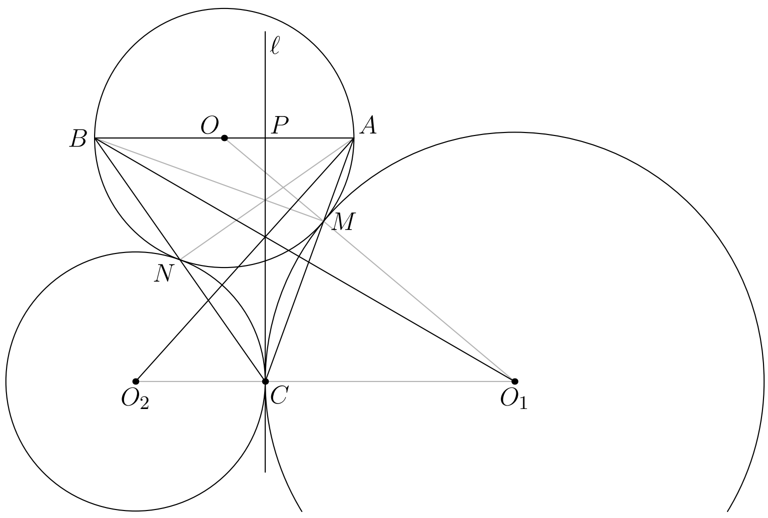


D'après le théorème de l'angle inscrit, d'une part, $\widehat{COE}/2 = \widehat{CBE}$ et d'autre part, $\widehat{BOD}/2 = \widehat{BED} = \widehat{BEA}$. On a donc

$$\frac{\widehat{COE}-\widehat{BOD}}{2} = \widehat{CBE}-\widehat{BEA} = \pi - \widehat{ABE}-\widehat{BEA} = \widehat{CAE}$$

qui est bien ce que l'on voulait.

<u>Solution de l'exercice 64</u>. Soient M et N les intersections respectives de (AC) et (BC) avec k.



On note r, r_1 et r_2 les rayons respectifs de k, k_1 et k_2. Le triangle AMO étant isocèle, on a

$$\widehat{AMO} = \widehat{OAM} = \widehat{O_1CM} = \widehat{CMO_1}.$$

Par conséquent, O, M, O_1 sont alignés et $AM/MC = OM/MO_1 = r/r_1$. De même, O, N, O_2 sont alignés et $BN/NC = ON/NO_2 = r/r_2$.Soit P le point d'intersection de ℓ et (AB). Les droites (AN), (BM), (CP) se coupent en l'orthocentre du triangle ABC, donc d'après le théorème de Ceva, $AP/PB = (AM/MC)(CN/NB) = r_2/r_1$. Soient maintenant D_1 et D_2 les intersections respectives de ℓ avec (BO_1) et (AO_2). Alors $CD_1/D_1P = O_1C/PB = r_1/PB$, et de même, $CD_2/D_2P = r_2/PA$. On en déduit $CD_1/D_1P = CD_2/D_2P$ et $D_1 = D_2$. Donc (AO_2), (BO_1) et ℓ sont concourantes.

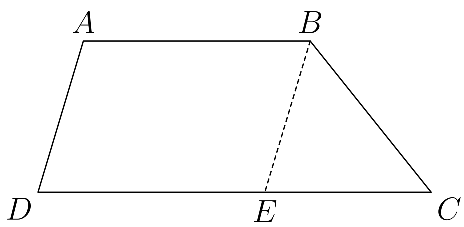
Solution de l'exercice 65. La clé consiste à étudier la suite (a_n) modulo 4. Un calcul immédiat montre que pour toute valeur de a_n, a_{n+2} est congru à2 ou à 3 modulo 4 ; en particulier il n'est jamais un carré. Ainsi les deux seuls carrés qui peuvent apparaître parmi les a_n sont les deux premiers, a_0 et a_1.Supposons un instant que ces deux nombres soient des carrés. Cela signifie que $a_0^6 + 1999$ est un carré, c'est-à-dire que l'équationdiophantienne $x^6 + 1999 = y^2$ a une solution. Or cette dernièreégalité se réécrit $(y-x^3)(y+x^3) = 1999$ et comme 1999 est premier l'un des deux facteurs vaut 1 et l'autre 1999. En effectuant la différence, il reste $2|x|^3 = 1998$, ce qui n'est pas possible étant donné que 999 n'est pas un cube. Ainsi, l'équationdiophantienne n'a pas de solutions, et les deux premiers termes de la suite ne peuvent être simultanément des carrés.

Solution de l'exercice 66. La réponse est non. Pour le prouver, nous allons montrer que quelles que soient les questions de Дмитры (de la forme de l'énoncé),Олег peut fournir des réponses de telle façon qu'une fois lestock de questions épuisé, il reste au moins deux ordres compatiblesavec les réponses données. En effet, si Дмитры n'a pas de chance, cela reviendrait exactement à dire qu'Олег peut modifier au fur et à mesure les pierres pour faire échouer Дмитры, de manière à ce que ça reste compatible avec les réponses qu'il a déjà données. La stratégie d'Олег est en fait très simple : pour chaque question de Дмитры, il regarde quelle réponse (oui ou non) écarte le moins d'ordres compatibles et donne cette réponse-ci.Nous allons montrer précisément qu'avec cette stratégie, si après la$(i-1)$-ième réponse, il reste x ordres compatibles, alors après la i-ième, il en reste au moins $\max(\frac{x}{2}, x-20)$. La minorationen $\frac{x}{2}$ est évidente. Pour $x-20$ maintenant, il suffit deconstater que si Олег répond non, alors il élimine au plus20 ordres, puisqu'étant donnés A, B et C, il y a en tout exactement 20 ordres (un sixième de $5! = 120$) pour lesquels Aest plus léger que B, lui même plus léger que C.On conclut alors facilement : au début, il y a 120 ordres possibles.Par ce qui précède, après la première question, Олег peut s'arranger pour qu'il en est au moins 100. Après la question suivante,au moins 80, puis au moins 60, puis au moins 40, puis au moins 20,puis au moins 10, puis au moins 5, puis au moins 3, puis finalementau moins 2 comme voulu.

Solution de l'exercice 67. Pierre ne peut pas êtrele même soldat que Paul, vu qu'ils n'ont pas le même prénom.Mais sinon une telle chose serait tout à fait possible,par exemple si le soldat de coordonnées (i, j) avaitla taille $i + j$.Considérons le soldat qui se trouve dans le rang de Pierreet dans la colonne de Paul. Il est plus grand que Pierre,vu que Pierre est le plus petit de son rang ; mais il est pluspetit que Paul, vu que Paul est le plus grand de sa colonne.Donc Paul est plus grand que Pierre.

Solution de l'exercice 68. Montrons tout d'abord que pour tout entier n, il existe une écriture$n = rs$ telle que $f(n) = r + s$ et $f(2n) = 2r + s$. Exploitons pour celal'équation fonctionnelle avec $m = 1$. Elle fournit une equation du seconddegré en $f(2n)$ dont le discriminant est $\Delta = f(n)^2 - 4n$.Celui-ci doit être entier, *i.e.* il existe un entier a tel que$f(n)^2 - 4n = a^2$. On a alors $(f(n)+a)(f(n)-a) = 4n$. Les deux facteursdoivent être pairs, car leur produit est $4n$ et leur somme $2f(n)$. Onpose donc $f(n) + a = 2r$ et $f(n) - a = 2s$ pour des entiers r et s.On a alors $f(n) = r+s$ et $rs = n$. Finalement, la résolutionde l'équation du second degré donne les deux solutions $f(2n) = 2r + s$ ou $f(2n) = 2s + r$, et quitte à échanger les rôles de $r$et s, on peut ne conserver que la première.Appliquons maintenant sans modération le résultat précédent. Déjà, pour$n = 1$, on a nécessairement $r = s = 1$, et donc $f(1) = 2$, $f(2) = 3$. Également, si $n = p$ est un nombre premier, on doit avoir $r = 1$,$s = p$ ou $r = p$, $s = 1$. Dans tous les cas $f(p) = r + s = p + 1$. Soitmaintenant n un nombre impair. D'après le postulat de Bertrand, il existe un nombre premier p compris entre $\frac{n}{2}$ et n, et d'après le cas que l'on vient de traiter, $f(p) = p + 1$. La croissance de f entraîne donc $f(n) \geqslant f(p) = p + 1 \geqslant \frac{n}{2} + 1$. Considérons une écriture $n = rs$ pour laquelle $f(n) = r + s$. Si aucun des diviseurs r et $s$ne vaut 1, ils sont tous les deux supérieurs ou égaux à 3 (puisque$n$ est supposé impair), d'où il résulte $f(n) = r + s \leqslant \frac{n}{3} + 3$, ce qui est en contradiction autre l'autre estimation dès que $n > 12$. Ainsi pour tout nombre impair $n > 12$, on a aussi $f(n) = n + 1$. Le-seul nombre impair qui échappe aux méthodes génériques précédentes est$n = 9$ qui, en l'occurrence se traite facilement à la main : les deux décompositions $n = rs$ possibles sont $9 = 9 \times 1$ et $9 = 3 \times 3$, mais dans le second cas, on aurait $f(9) = 6$, ce qui contredit lacroissance de f étant donné $f(7) = 8$; ainsi $f(9) = 10$.Il ne reste plus qu'à traiter le cas des nombres pairs. Pour cela, nousmontrons que si $f(n) = n + 1$, alors $f(2n) = 2n + 1$, la conclusion « $f(n) = n + 1$ pour tout entier n » en résultera par une récurrenceimmédiate sur la valuation 2-adique de n. Supposons donc $f(n) = n + 1$ pour un entier n fixé. D'après le premier alinéa, on sait qu'ilexiste une écriture $n = rs$ pour laquelle $f(n) = r + s$ et $f(2n) = 2r + s$. Les seules possibilités pour concilier $rs = n$ et $r + s = n + 1$sont $r = n$, $s = 1$ d'une part et $r = 1$, $s = n$ d'autre part.Dans le premier cas, $f(n) = 2n + 1$ comme souhaité. Supposons donc quel'on soit dans le second cas. Alors $f(2n) = n + 2$ et comme le nombre$2n - 1$ est manifestement impair, on a aussi $f(2n - 1) = 2n$. Ainsi, parcroissance, $n + 2 \geqslant 2n$, *i.e* $n \leqslant 2$. Si $n = 1$, on constate que $n+2 = 2n+1$ et donc on a également ce que l'on voulait.Pour $n = 2$, cela donnerait $f(4) = 4$, et donc la décomposition $n = rs$pour $n = 4$ serait $4 = 2 \times 2$. On en déduirait $f(8) = 6$, ce quicontredit une fois de plus la croissance de f car $f(7) = 8$.En résumé, la seule solution possible de l'équation fonctionnelle est$f(n) = n + 1$ et on n'oublie pas de vérifier pour finir que cette fonctionconvient bien.

Solution de l'exercice 69. Dans le trapèze $ABCD$, traçons la droite passant par Bet parallèle à (AD). Soit E son point d'intersection avecla droite (CD). Par l'inégalité triangulaire dans le triangle BCE, on a $CE \geqslant |BE - BC|$, soit $|AB - CD| \geqslant |AD - BC|$. L'égalité est atteinte si et seulement si le triangle BCE est dégénéré, c'est-à-dire si $ABCD$ est un parallélogramme.



Or, en utilisant le trapèze $A'B'C'D'$, on montre de la même manièreque $|AB - CD| \leqslant |AD - BC|$, et que l'égalité est atteintesi et seulement si $A'B'C'D'$ est un parallélogramme.Donc, en fait, on a $|AB - CD| = |AD - BC|$ et les deux trapèzessont des parallélogrammes.

<u>*Solution de l'exercice 70*</u>. Du fait que $2y^2+1>0$ et de la stricte croissance de la fonction cube, on déduit que l'équation implique $x>y$. D'autre part, on peutréécrire l'équation sous la forme :

$$x^3=(y+1)^3-y^2-3y.$$

Ainsi si $y^2+3y>0$, on déduit par le même argument que précédemment que $x<y+1$, ce qui est impossible à concilier avec $x>y$ sachant que x et y sont tous les deux des nombres entiers.On en vient donc à se demander quand la quantité $y^2+3y=y(y+3)$ est négative ou nulle. Un tableau de signe immédiat montre que c'est pour y compris entre -3 et 0. Comme y est un entier, il ne reste que les valeurs -3, -2, -1 et 0 que l'on teste une par une en les remplaçantdans l'équation. On obtient comme ceci la liste des solutions qui est formée des couples $(1,0)$, $(1,-2)$ et $(-2,-3)$.

<u>*Solution de l'exercice 71*</u>. Oui. Prenez trois points sur l'équateurdistants de moins de 1 millimètre. Ils forment un triangledont l'équateur est le cercle circonscrit.

<u>*Solution de l'exercice 72*</u>. Posons $y=\sqrt{x+1}$. On a $y\in]0,1[\cup]1,+\infty[$, et $x=y^2-1$. L'inégalité est équivalente à

$$\frac{(y^2-1)^2}{(y^2-y)^2}<\frac{(y^2-1)^2+3(y^2-1)+18}{y^4}$$

encore équivalente aux inégalités suivantes

$$\frac{(y+1)^2}{y^2}<\frac{y^4+y^2+16}{y^4}\Leftrightarrow (y+1)^2y^2<y^4+y^2+16\Leftrightarrow 2y^3<16\Leftrightarrow y<2.$$

La condition est donc satisfaite exactement pour $y\in]0,1[\cup]1,2[$ et $x\in]-1,0[\cup]0,3[$.

<u>*Solution de l'exercice 73*</u>. Introduisons l'ensemble des « états »% possibles du minotaure (cellule, couloir, intention),où la cellule est celle dans laquelle il se trouve, le couloir est celui par lequel il vient d'arriver, et l'intention est de trourner à droite ou à gauche.L'état du minotaure détermine entièrement la suite de son parcours.Le nombre d'états possibles est fini, donc le minotaure va un jour seretrouver dans un état où il a déjà été, et à partir de là son parcours va boucler. Il s'agit de prouver que cette bouclecontient nécessairement sa cellule de départ.Pour cela, notons que sachant l'état présent du minotaureon peut retrouver de manière unique son état précédent. Supposons alors que x soit le *premier* état dans lequelle minotaure s'est retrouvé deux fois. L'état qui doitprécéder x est déterminé de manière unique, et pourtantle minotaure n'est passé par cet état qu'une seule fois.Cela implique que x est en fait son état de départ, qui fait donc partie de la boucle.

<u>*Solution de l'exercice 74*</u>. Montrons qu'il n'existe pas de telle fonction. Supposons par l'absurde que f vérifie la condition de l'énoncé. Avec $x=y=\pi/2$, on a $|f(\pi)+2|<2$, et avec $x=-\pi/2$ et $y=3\pi/2$, on obtient $|f(\pi)-2|<2$. Or,

$$4=|f(\pi)+2-f(\pi)+2|\leqslant|f(\pi)+2|+|-f(\pi)+2|<2+2,$$

ce qui constitue une contradiction manifeste.

<u>*Solution de l'exercice 75*</u>. Parmi les nombres d'un seul chiffre (*i.e.* ceux de 1 à 9), il n'y a aucun zéro. Parmi les nombres de deux chiffres, il y a neuf zéros : un au bout de 10, un au bout de 20 et ainsi de suite jusqu'à 90.Voyons maintenant ce qui se passe pour les nombres de trois chiffres. Un zéro ne peut évidemment apparaître qu'en deuxième ou troisième position. Il y a un zéro en deuxième position dans tous les nombres de la forme $x0y$ où x est un chiffre entre 1 et 9, et y un chiffre entre 0 et 9. Cela en fait donc 90. On raisonne de même pour les troisièmes zéros et on en trouve également 90.Le même raisonnement permet de dénombrer les zéros qui apparaissent dans les nombres de 1000 à 1999 : ceux qui apparaissent en deuxième (resp. troisième, resp. quatrième) position sont au

nombre de $1 \times 10 \times 10 = 100$. Cela en fait donc en tout 300. Reste les zéros qui apparaissent dans les nombres compris entre 2000 et 2007 que l'on peut compter à la main ; on en trouve 17.Au final, le nombre cherché est $9+90+90+300+17 = 506$.

<u>*Solution de l'exercice 76.*</u> Considérons les paires de termes consécutifs de la suite de Fibonacci(F_0, F_1), (F_1, F_2), ... pris modulo 2007. Comme il n'y aque 2007^2 paires différentes d'entiers modulo 2007 et que la suitede Fibonacci est infinie, il existe deux paires congrues entre elles :$F_i \equiv F_{i+m} \pmod{2007}$ et $F_{i+1} \equiv F_{i+1+m} \pmod{2007}$ pour certains i et m.Si $i \geqslant 1$, $F_{i-1} \equiv F_{i+1} - F_i \equiv F_{i+m+1} - F_{i+m} \equiv F_{i+m-1} \pmod{2007}$. Par suite $F_{i-2} \equiv F_{i-1} - F_i \equiv F_{i+m-1} - F_{i+m} \equiv F_{i+m-2} \pmod{2007}$. Encontinuant ainsi, $F_j \equiv F_{j+m} \pmod{2007}$ pour tout $j \leqslant 0$. En particulier, $0 = F_0 \equiv F_m \pmod{2007}$, et donc$F_m$ est divisible par 2007.

<u>*Solution de l'exercice 77.*</u> Introduisons un repère orthonormé tel que $A = (0,0,0)$ et $B = (1,1,1)$, les côtés du cube étant parallèles aux axes. Soit r le rayon de la sphère. Son centre est le point de coordonnées (r, r, r), et le point de tangence avec l'une des arêtes en B est $(r, 1, 1)$. La distance entre ces deux points étant $\sqrt{2}(1-r)$, on en déduit $r = \sqrt{2}(1-r)$ et $r = 2-\sqrt{2}$.

<u>*Solution de l'exercice 78.*</u> Comme f est strictement convexe, pour tous x, y, t tels que $x < t < y$, le point $(t, f(t))$ est strictement au dessous de la droite joignant $(x, f(x))$et $(y, f(y))$. Supposons que quatre points $A = (a, f(a))$, $B = (b, f(b))$, $C = (c, f(c))$ et $D = (d, f(d))$ avec $a < b < c < d$ formentun parallélogramme. Remarquons qu'alors (AC) et (BD) se coupent : eneffet, B est au dessous de (AC) et C est au dessous de (BD). Cesont donc nécessairement les diagonales du parallélogramme. Mais alorselles se coupent en leur milieu. Or $\frac{a+c}{2} < \frac{b+d}{2}$, cequi constitue une contradiction.

<u>*Solution de l'exercice 79.*</u> Tout d'abord, on a

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n}\right) = \sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} \left[\frac{n}{p}\right]$$

où la dernière somme est prise sur les p premiers et où $[\cdot]$ désigne la partie entière. De plus,

$$\sum_{p \leqslant n} \frac{1}{p} \left[\frac{n}{p}\right] \leqslant \sum_{p \leqslant n} \frac{n}{p^2} < n\left(\frac{1}{4} + \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{1}{(2k+1)^2}\right) < \frac{n}{4}\left(\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{1}{k(k+1)}\right) = \frac{n}{4}\left(\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) < \frac{n}{2},$$

par conséquent $\sum_{k=2}^{n} a_k < \frac{n}{2}$ pour tout $n \geqslant 2$.Maintenant, d'après l'inégalité arithmético-géométrique,

$$a_2 a_3 \cdots a_n < \left(\frac{a_2 + a_3 + \cdots + a_n}{n-1}\right)^{n-1} < \frac{1}{2^{n-1}}\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}$$

puis en développant à l'aide de la formule du binôme, on trouve

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \leqslant 1 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2^k} \leqslant 3$$

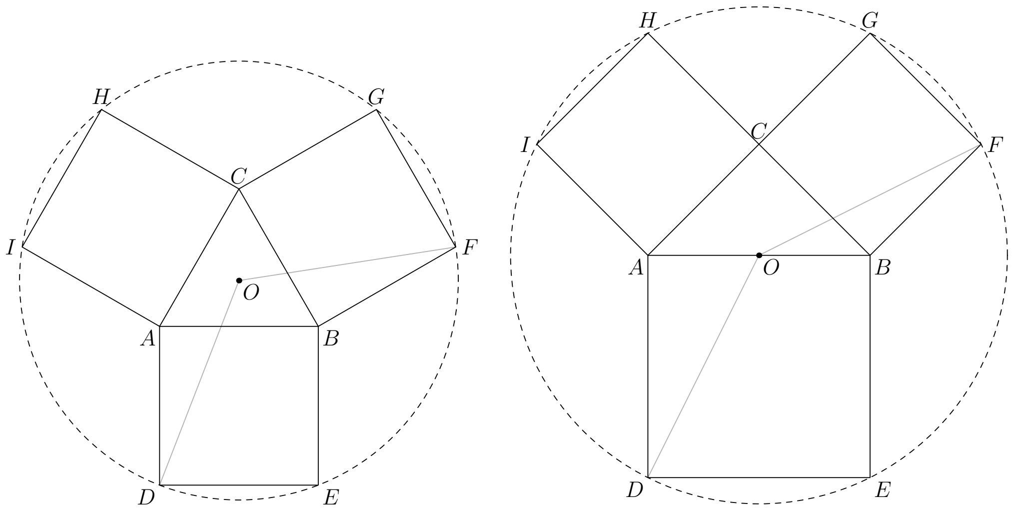
d'où $a_2 a_3 \cdots a_n < \frac{3}{2^{n-1}}$.En ajoutant ces inégalités, on a

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_2 \cdots a_n < \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{60} + 3\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \cdots\right) = \frac{46}{60} + \frac{3}{2^5}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots\right) = \frac{46}{60} + \frac{6}{32} < 1.$$

<u>*Solution de l'exercice 80.*</u> En appliquant plusieurs fois la définition, il vient que $\frac{1543}{275}$ a la couleur inverse de $\frac{1543}{275} - 5 = \frac{168}{275}$, qui à son tout a la même couleur que $\frac{275}{168}$. On poursuit le raisonnement de la même façon : $\frac{275}{168}$ a la couleur opposée de celle de $\frac{275}{168} - 1 = \frac{107}{168}$, qui a la même couleur que $\frac{168}{107}$,

qui a la couleur opposée de $\frac{168}{107} - 1 = \frac{61}{107}$, qui a la même couleur que $\frac{107}{61}$, qui a la couleur opposée de $\frac{107}{61} - 1 = \frac{46}{61}$, qui a la même couleur que $\frac{61}{46}$, qui a la couleur opposée de $\frac{61}{46} - 1 = \frac{15}{46}$ qui a la même couleur que $\frac{46}{15}$, qui a lacouleur opposée de $\frac{46}{15} - 3 = \frac{1}{15}$ qui a la même couleur que 15, lui-même de la même couleur que 1, c'est-à-dire blanc.En remontant, la couleur de $\frac{1543}{275}$ est aussi blanche.

Solution de l'exercice 81. Supposons que D, E, F, G, H et I sont cocycliques.



Les médiatrices de $[DE]$, $[FG]$, $[HI]$ étant celles de $[AB]$,$[BC]$, $[CA]$ respectivement, le centre du cercle doit être le centre O du cercle circonscrit à ABC. Notons M le milieu de $[AB]$ et R le rayon du cercle circonscrit à ABC. On calcule

$$OD^2 = (OM + AB)^2 + \frac{AB^2}{4} = \left(\sqrt{OA^2 - \frac{AB^2}{4}} + AB\right)^2 + \frac{AB^2}{4} = R^2 + AB\sqrt{4R^2 - AB^2} + AB^2$$

et de même

$$OF^2 = R^2 + BC\sqrt{4R^2 - BC^2} + BC^2.$$

D'après la loi des sinus, on a

$$\frac{AB}{\sin\widehat{C}} = \frac{BC}{\sin\widehat{A}} = \frac{AC}{\sin\widehat{B}} = 2R$$

et de l'égalité $OD = OF$, on déduit

$$4R^2\sin\widehat{C}\sqrt{1-\sin\widehat{C}} + 4R^2\sin^2\widehat{C} = 4R^2\sin\widehat{A}\sqrt{1-\sin\widehat{A}} + 4R^2\sin^2\widehat{A}$$

puis

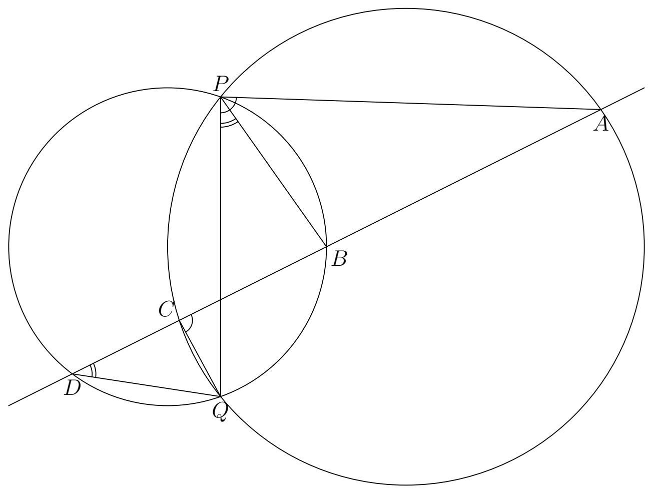
$$\cos\widehat{C}\sin\widehat{C} + \sin^2\widehat{C} = \cos\widehat{A}\sin\widehat{A} + \sin^2\widehat{A}.$$

Remarquons que l'on a

$$2(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta) = 1 - \cos 2\theta + \sin 2\theta = 1 + \sqrt{2}\sin(2\theta - \pi/4)$$

et l'étude de la fonction $\theta \mapsto \sin(2\theta - \pi/4)$ montre que $\widehat{A} = \widehat{C}$ ou $2\widehat{A} - \pi/4 + 2\widehat{C} - \pi/4 = \pi$ c'est-à-dire $\widehat{B} = \pi/4$. De même on a $\widehat{A} = \widehat{B}$ ou $\widehat{C} = \pi/4$, et $\widehat{B} = \widehat{C}$ ou $\widehat{A} = \pi/4$. Ceci montre que l'on a soit $A = B = C$, soit deux des angles égaux à $\pi/4$, c'est-à-dire que ABC est soit équilatéral, soit rectangle isocèle.Inversement, il est évident que si ABC est équilatéral, les points sont cocycliques ; si ABC est rectangle isocèle en C, on vérifie facilement que $OD = OF$, puis la cocyclicité s'ensuit aisément.

Solution de l'exercice 82. On commence par faire une jolie figure.



Par le théorème de l'angle inscrit, on a $\widehat{APQ} = \widehat{ACQ}$ et $\widehat{BPQ} = \widehat{BDQ}$. D'où $\widehat{APB} = \widehat{APQ} - \widehat{BPQ} = \widehat{ACQ} - \widehat{BDQ} = \pi - \widehat{DCQ} - \widehat{CDQ} = \widehat{DQC}$.

Solution de l'exercice 83. Après mise en place des parenthèses, la valeur de la fraction est :

$$A = \left(\frac{29}{15}\right)^{\varepsilon_1}\left(\frac{28}{14}\right)^{\varepsilon_2}\left(\frac{27}{13}\right)^{\varepsilon_3}\left(\frac{26}{12}\right)^{\varepsilon_4}\cdots\left(\frac{18}{4}\right)^{\varepsilon_{12}}\left(\frac{17}{3}\right)^{\varepsilon_{13}}\left(\frac{16}{2}\right)^{\varepsilon_{14}}$$

où les ε_i valent soit 1, soit -1 et, nécessairement$\varepsilon_1 = 1$ et $\varepsilon_2 = -1$. De plus, comme par hypothèse le résultat est entier, les nombres premiers qui n'interviennent qu'unefois, à savoir 29, 23, 19 et 17 doivent se trouver au numérateur. Ceci fournit $\varepsilon_7 = \varepsilon_{11} = \varepsilon_{13} = 1$. Après simplification des fractions, on obtient :

$$A = \frac{29\cdot 23\cdot 19\cdot 17}{2\cdot 3^4\cdot 5^2}\cdot\left(\frac{3^3}{13}\right)^{\varepsilon_3}\left(\frac{13}{2\cdot 3}\right)^{\varepsilon_4}\left(\frac{5^2}{11}\right)^{\varepsilon_5}\left(\frac{2^2\cdot 3}{5}\right)^{\varepsilon_6}\left(\frac{11}{2^2}\right)^{\varepsilon_8} 3^{\varepsilon_9}\left(\frac{2\cdot 5}{3}\right)^{\varepsilon_{10}}\left(\frac{3^2}{2}\right)^{\varepsilon_{12}}(2^3)^{\varepsilon_{14}}.$$

Il est impossible que ε_3 soit égal à -1, car sinon, il n'y aurait pas assez de 3 pour compenser un tel dénominateur. Ainsi $\varepsilon_3 = 1$, et pour éliminer le 13 qui apparaît alors audénominateur, on est obligé d'avoir $\varepsilon_4 = 1$. En comptant lespuissances de 5 maintenant, on obtient $\varepsilon_5 = 1$, puis enregardant le facteur 11, il suit $\varepsilon_8 = 1$. On en est à :

$$A = \frac{29\cdot 23\cdot 19\cdot 17}{2^4\cdot 3^2}\cdot\left(\frac{2^2\cdot 3}{5}\right)^{\varepsilon_6} 3^{\varepsilon_9}\left(\frac{2\cdot 5}{3}\right)^{\varepsilon_{10}}\left(\frac{3^2}{2}\right)^{\varepsilon_{12}}(2^3)^{\varepsilon_{14}}.$$

En regardant à nouveau l'exposant de 3, il suit $\varepsilon_{12} = 1$, puis en regardant l'exposant de 2, il vient $\varepsilon_6 = \varepsilon_{14} = 1$. Le nombre premier 5 donne alors ε_{10}, puis finalement en regardant une dernière fois l'exposant de 3, on obtient $\varepsilon_9 = \varepsilon_{12} = 1$. Au final :

$$A = 2\times 3\times 17\times 19\times 23\times 29 = 1\,292\,646.$$

Solution de l'exercice 84. Tout d'abord, en posant $x = y$ dans la deuxième équation, on obtient $f(x^2) = (k+2)f(x)$. En appliquant deux fois cette égalité, on a

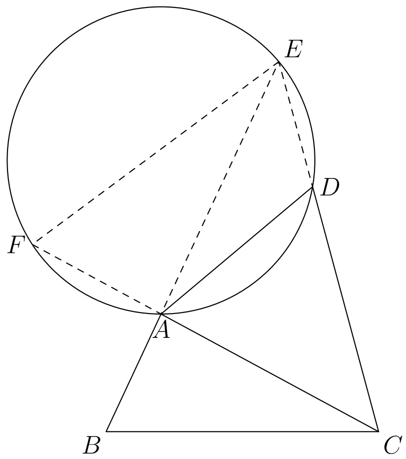
$$f(x^4) = (k+2)^2 f(x).$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned} f(x^4) &= f(x) + f(x^3) + kf(x) = (k+1)f(x) + f(x^3) \\ &= (k+1)f(x) + f(x) + f(x^2) + kf(x) = (2k+2)f(x) + f(x^2) \\ &= (3k+4)f(x). \end{aligned}$$

En appliquant les deux égalités précédentes à $x = 2006$, de manière à avoir $f(x) \neq 0$, on déduit que $(k+2)^2 = 3k+4$. La résolution de cette équation du second degré montre que nécessairement, $k = 0$ ou $k = -1$.Réciproquement, pour $k = 0$, une solution f est donnée par $f(p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 g(p_1) + \cdots \alpha_n g(p_n)$ où $g(2) = 2007$ et $g(p) = 0$ pour tout nombre premier $p \neq 2$. La fonction $f : p_1^{\alpha_1}\cdots p_n^{\alpha_n}) \mapsto g(p_1) + \cdots + g(p_n)$ convient.

Solution de l'exercice 85. Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit à ADE, et soit F le deuxième point d'intersection entre $\mathscr{C}$ et (CA).



En termes de longueurs algébriques, on a $AC^2 = \overline{CD}\cdot\overline{CE} + \overline{AB}\cdot\overline{AE}$ si et seulement si

$$\overline{AB}\cdot\overline{AE} = AC^2 - \overline{CD}\cdot\overline{CE} = CA^2 - \overline{CA}\cdot\overline{AF} = \overline{AC}\cdot\overline{AF},$$

c'est-à-dire si et seulement si B, C, E, F sont cocycliques. Mais cela a lieu si et seulement si $\widehat{EFC} = \widehat{EBC}$, et

$$\widehat{EFC} = \widehat{EFA} = \pi - \widehat{ADE} = \widehat{CDA}$$

(en angles orientés modulo π). Donc B, C, E et F sont cocycliques si et seulement si $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$, ce qu'on voulait.

Solution de l'exercice 86. Notons $A = \overline{a_1 a_2 \cdots a_k}$ l'écriture décimale de A. En faisant la soustraction

$$\begin{array}{rcccccc} & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_k & 0 \\ - & & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ \hline \end{array}$$

on trouve que les chiffres de $9A = 10A - A$ sont a_1, $a_2 - a_1$, $a_3 - a_2$, ..., $a_{k-1} - a_{k-2}$, $a_k - a_{k-1} - 1$, $10 - a_k$. Leursomme est $10 - 1 = 9$.

Solution de l'exercice 87. Le nombre

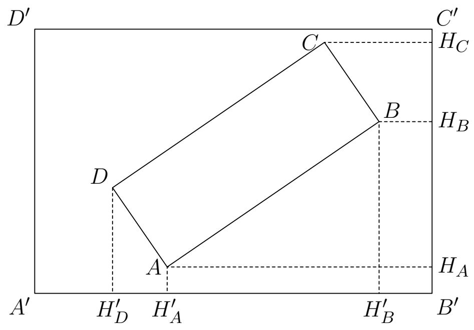
$$\left(5+\sqrt{26}\right)^{100} + \left(\sqrt{26}-5\right)^{100} = \sum_{i+j=100} C_{100}^i \cdot \left(\sqrt{26}\right)^i \cdot 5^j \cdot \left[1 + (-1)^j\right]$$

est entier. En effet, le facteur $1 + (-1)^j$ est non nulsi et seulement si i et j sont pairs, auquel cas$(\sqrt{26})^i$ est entier. D'autre part,

$$\sqrt{26} - 5 < \frac{1}{10}.$$

En effet, $(5+1/10)^2 = 25+1+1/100 > 26$. Par conséquent, $(\sqrt{26}-5)^{100} < 10^{-100}$, et donc les100 premiers chiffres de $(5+\sqrt{26})^{100}$ après la virgule sont que des neufs.

Solution de l'exercice 88. Ce n'est pas possible. En effet, projetons les sommets A, B, C, D sur les côtés de $A'B'C'D'$ comme sur le schéma suivant :



D'après l'inégalité triangulaire, on a $AB \leqslant H_A H_B + H'_A H'_B$ et $AD = BC \leqslant H_B H_C + H'_A H'_D$, et on peut donc majorer le demi-périmètre

$$AB + AD \leqslant H_A H_B + H_B H_C + H'_A H'_B + H'_A H'_D \leqslant B'C' + A'B'.$$

Le demi-périmètre de $ABCD$ est majoré par celui de $A'B'C'D'$, il en est donc de même de leurs périmètres.

Solution de l'exercice 89. Non. On a

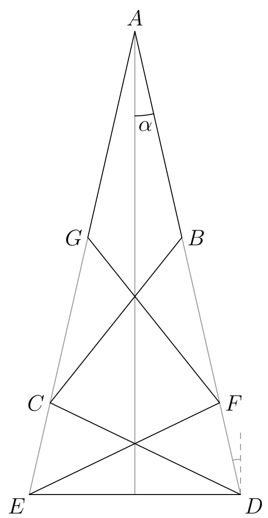
$$1\,000\,000\,027 = 1\,000^3 + 3^3 = (1\,000 + 3) \cdot (1\,000^2 - 1\,000 \cdot 3 + 3^2).$$

Solution de l'exercice 90. On peut réécrire cette égalité de lamanière suivante :

$$\sin\frac{7\pi}{30} + \sin\frac{19\pi}{30} + \sin\frac{31\pi}{30} + \sin\frac{43\pi}{30} + \sin\frac{55\pi}{30} = 0.$$

La différence entre deux angles successifs dans cetteégalité fait $12\pi/30 = 2\pi/5$. Les extrémités desvecteurs de norme 1 pointant dans les directions indiquées par ces 5 angles forment les sommets d'unpentagone régulier. La somme de ces vecteurs est doncun vecteur invariant par rotation d'angle $2\pi/5$,autrement dit, la somme est nulle. La somme des sinusest la projection de la somme des vecteurs sur l'axedes ordonnées, elle est donc nulle aussi.

Solution de l'exercice 91. La figure est entièrement déterminée par l'énoncéet en particulier, elle est symétrique par rapport à la médiatrice de$[DE]$. Notons 2α l'angle que l'on cherche. On a alors $\widehat{AED} = \widehat{ADE} = \frac{\pi}{2} - \alpha$.



Les triangles DAE et CDE sont isocèles de sommets respectifs A et D.Comme ils ont en commun l'angle $\widehat{AED}$, ils sont semblables. Ilen résulte que $\widehat{CDE} = 2\alpha$.Par ailleurs AGF et BCD sont aussi des triangles isocèles de sommetsrespectifs G et C. Il en résulte $\widehat{ACB} = 2\alpha$ et :

$$\widehat{BCD} = \pi - 2\widehat{ADC} = \pi - 2\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - 2\alpha\right) = 6\alpha.$$

Comme les points A, C et E sont alignés, on a la relation$\widehat{ACB} + \widehat{BCD} + \widehat{DCE} = \pi$, c'est-à-dire $2\alpha + 6\alpha + \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi$, d'où $\alpha = \frac{\pi}{14}$ et l'angle cherché vaut $2\alpha = \frac{\pi}{7}$.

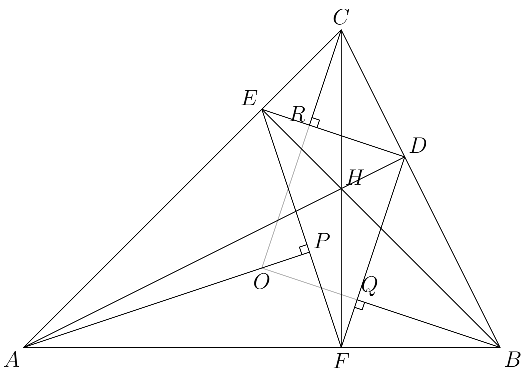
<u>*Solution de l'exercice 92.*</u> Dans le premier cas, on vérifie facilement que les ensembles $\{3k+1, k \in \mathbb{N}\}$, $\{3k+2, k \in \mathbb{N}\}$ et $\{3k, k \in \mathbb{N}\}$ satisfont la condition.De même, dans le deuxième cas, les ensembles $\{4k+1, k \in \mathbb{N}\}$, $\{4k+2, k \in \mathbb{N}\}$, $\{4k+3, k \in \mathbb{N}\}$ et $\{4k, k \in \mathbb{N}\}$ conviennent.Montrons que ce n'est en revance pas possible avec seulement trois ensembles.Supposons que trois ensembles A, B, C satisfont la deuxième condition. Notons que les nombres 1, 3, 6 doivent être dans des ensembles différents. Sans perte de généralité, on suppose que $1 \in A$, $3 \in B$, $6 \in C$. Alors $4 \in B$. On remarque également que $2, 5 \notin B$ et 2 et 5 sont dans des ensembles différents. Deux cas possibles : $\{1,2\} \subset A$, $\{3,4\} \subset B$, $\{5,6\} \subset C$ ou bien $\{1,5\} \subset A$, $\{3,4\} \subset B$, $\{2,6\} \subset C$. Mais dans chacun des deux cas, il est impossible de placer 7 dans un des trois ensembles. Ceci achève la démonstration.

<u>*Solution de l'exercice 93.*</u> On commence par calculer les premiers termes de la suite (x_n). On trouve :

$$x_2 = 2 \quad ; \quad x_3 = 3 \quad ; \quad x_4 = 2 \quad ; \quad x_5 = 1 \quad ; \quad x_6 = 1$$

et on retrouve deux termes consécutifs égaux à 1. À partir de ce moment, les calculs se répètent, ce qui prouve que la suite (x_n) de périodique, en l'occurrence de période 5. Ainsi $x_{2007} = x_2 = 2$.

<u>*Solution de l'exercice 94.*</u> On commence par faire une figure :



Nous allons montrer que les trois droites (AP), (BQ) et (CR) passent par le centre du cercle circonscrit à ABC, appelé O.Les points B, C, E et F sont cocycliques, sur le cercle de diamètre $[BC]$. D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{CBF} = \pi - \widehat{CEF} = \widehat{AEF}$. De plus, encore par le théorème de l'angle inscrit, cette fois dans le cercle circonscrit à ABC, on a $\widehat{ABC} = \widehat{AOC}/2$. Le triangle AOC est isocèle en O et donc

$$\widehat{OAE} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{AOC}}{2} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ABC} = \frac{\pi}{2} - \widehat{AEF}.$$

On en déduit $(AO) \perp (EF)$ puis $O \in (AP)$. De la même façon, on obtient $O \in (BQ)$ et $O \in (CR)$.

<u>*Solution de l'exercice 95.*</u> La propriété de l'énoncé se traduit par l'inégalité :

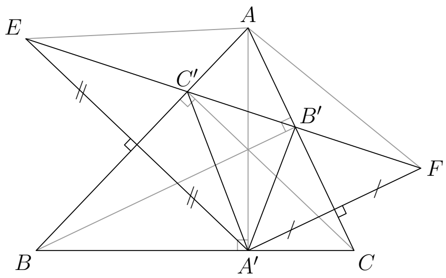
$$0 \leqslant \frac{A(A+1)}{2} - 1000A = A\left(\frac{A+1}{2} - 1000\right) \leqslant 999.$$

Si $A < 1999$, alors le facteur $\frac{A+1}{2} - 1000$ est négatif est l'encadrement n'est pas vérifié. Si $A \geqslant 2000$, alors le précédentfacteur est supérieur à $\frac{1}{2}$ et le produit $A(\frac{A+1}{2} - 1000)$ dépasse 1000. La seule solution est donc $A = 1999$, dont onpeut vérifier si on le souhaite qu'elle convient bien.

Solution de l'exercice 96. Choisissons pour l'instant A' quelconque sur le côté $[BC]$ et notons E et F les symétriques respectifs de A' par rapport aux droites(AB) et (AC). Alors, pour tous B' et C' situés respectivementsur $[AC]$ et $[AB]$, on a :

$$A'C' + C'B' + B'A' = EC' + C'B' + B'F \geqslant EF.$$

Ainsi les meilleurs choix possibles pour B' et C' (A' étant toujours fixé) sont les points d'intersection de la droite (EF) avec les côtés du triangle, et le périmètre du triangle $A'B'C'$ est alorségal à la longueur du segment $[EF]$. Il s'agit donc de déterminerla position du point A' pour laquelle le segment $[EF]$ a une longueur minimale. Or, on remarque que le triangle AEF est isocèle de sommet A car $AE = AA' = AF$, et que l'angle en A dans ce triangle est constant (*i.e.* ne dépend pas de A') égal à $2\widehat{BAC}$. Ainsi, la longueur EF est-elle proportionnelle à AA', et est donc minimale lorsque A' est le pied de la hauteur issue de A. On raisonne de même avec les autres sommets et on obtient que B' et C' doivent être les pieds des hauteurs issues respectivement de B et C. (On peut remarquer que dans ce cas, ce sont bien les intersections de la droite (EF) avec (AC) et (AB).)



Solution de l'exercice 97. Notons tout d'abord que pour $p > 0$, le dernier chiffrede 2^p est 6, 2, 4 ou 8 selon que le reste de $p$modulo 4 vaut 0, 1, 2 ou 3. Ainsi 2^{101} se termine par un 2.Montrons par récurrence qu'il existeun entier N divisible par 2^{100} et dont les n dernierschiffres sont des 8 et des 9. Pour $n = 1$, il suffit de prendre $N = 2^{103}$ qui se termine par 8.Maintenant, soit N un entier divisible par 2^{100} et dont les n derniers chiffres sont de 8 et des 9. Soit a son$(n+1)$-ième chiffre en partant de la fin. Soit k lapartie entière de $(9-a)/2$. Considérons lenombre $N' = N + k \cdot 2^{101} \cdot 10^n$. Il est évidentqu'il est divisible par 2^{100} et que ses n derniers chiffressont les mêmes que ceux de N. Quant à son $(n+1)$-ième chiffreen partant de la fin, il est égal à $a + 2k$, car le dernierchiffre de 2^{101} est un 2. Avec la définition de k,on voit que $a + 2k$ vaut soit 8 soit 9 selon que $a$est pair ou impair. Nous avons donc réussi de passer de $n$chiffres à $n+1$ chiffres.Ainsi, en 100 étapes, on obtient un entier divisible par2^{100} dont les 100 derniers chiffres sont des 8 et des 9.Il suffit alors de ne garder que ces 100 derniers chiffres,car 10^{100} est divisible par 2^{100}.

Solution de l'exercice 98. L'écriture peut ne se terminer par aucun zéro (par exemple pour $n = 0$), se terminer par un zéro (par exemple pour $n = 1$ ou $n = 2$), ou par deux zéros (par exemple pour $n = 3$). Pour $n \geqslant 3$, 2^n et 4^n sont divisibles par 8, et 3^n est congru à 3 ou 1 modulo 8, donc $1^n + 3^n$ est congru à 2 ou 4. Il s'ensuit que la somme est congrue à 2 ou 4 modulo 8. Or, 1000 est divisible par 8, par conséquent la somme ne peut pas se finir par trois zéros ou plus.

Solution de l'exercice 99. Remarquons que si α, β, γ, δ sont les termes d'une progression arithmétique, alors il en est de même de $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$, $|\delta|$, et le produit du plus grand et du plus petit parmi $|\alpha|$, $|\beta|$, $|\gamma|$ et $|\delta|$ estalors égal au produit des deux termes médians.Soient donc a, b, c, d et e les nombres de l'énoncé et supposons qu'ils soient classés de telle façon que $|a| \leqslant |b| \leqslant |c| \leqslant |d| \leqslant |e|$. D'après l'hypothèse, b, c, d et e sont les termes d'une progression géométrique, et donc d'après les remarques préliminaires,on a l'égalité $|b||e| = |c||d|$. De même, on obtient :

$$|a||e| = |c||d| \quad ; \quad |a||e| = |b||d| \quad ; \quad |a||e| = |b||c| \quad ; \quad |a||d| = |b||c|$$

d'où on déduit sans mal l'égalité $|a| = |b| = |c| = |d| = |e|$. Ainsi a, b, c, d et e sont tous soit égaux à 2007, soit égaux à-2007.Par hypothèse, l'un d'eux, disons a vaut 2007. Si maintenant un autre, disons b vaut -2007, alors du fait que a, b, c, d forme, à l'ordre près, une suite géométrique, on déduit que c et d valent l'un 2007 et l'autre -2007, disons $c = 2007$ et $d = -2007$. Mais, si $e = 2007$, alors a, b, c, e contient trois termes positifs ou un négatif et donc ne peut être réordonné en une suite géométrique. On arrive de même à une contradiction si $e = -2007$ en considérantle quadruplet (a, b, d, e).Au final, tous les nombres sont égaux à 2007.

Solution de l'exercice 100. L'inégalité de gauche est une conséquence du fait que

$$\sqrt{1 + x_1 + \cdots + x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i + \cdots + x_n} \leqslant \frac{1}{2}(1 + x_1 + \cdots + x_n) = 1$$

donné par l'inégalité arithmético-géométrique, qui implique

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\sqrt{1 + x_1 + \cdots + x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i + \cdots + x_n}} \geqslant \sum_{i=1}^{n} x_i = 1.$$

Pour l'inégalité de droite, posons $\theta_i = \arcsin(x_1 + \cdots + x_i)$ pour tout i (on pose $\theta_0 = 0$). On a alors

$$\sqrt{1 + x_1 + \cdots + x_{i-1}} \cdot \sqrt{x_i + \cdots + x_n} = \cos\theta_{i-1}$$

et l'égalité désirée devient

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin\theta_i - \sin\theta_{i-1}}{\cos\theta_{i-1}} < \frac{\pi}{2}.$$

On a la majoration suivante :

$$\sin\theta_i - \sin\theta_{i-1} = 2\cos\frac{\theta_i + \theta_{i-1}}{2}\sin\frac{\theta_i - \theta_{i-1}}{2} < \cos\theta_{i-1}(\theta_i - \theta_{i-1}),$$

en utilisant que $\theta_{i-1} < \theta_i$, que cos est décroissante que $[0, \frac{\pi}{2}]$, et que $\sin x < x$ pour $x > 0$.On a donc

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sin\theta_i - \sin\theta_{i-1}}{\cos\theta_{i-1}} < \sum_{i=1}^{n} \theta_i - \theta_{i-1} = \theta_n - \theta_0 < \frac{\pi}{2},$$

qui était bien ce que l'on voulait.

4 Les tests

4.1 Les énoncés

Stratégies de base

Exercice 1 (*USAMO, 1994*). On considère une suite d'entiers $a_1, a_2, \ldots$ telle que $a_1 > 0$ et $a_{n+1} > a_n + 1$ pour tout $n > 0$. Soit $b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Montrer que pour tout n, il existe un carré parfait k^2 tel que $b_n \leqslant k^2 < b_{n+1}$.

Exercice 2 (*Engel, Problem-Solving Strategies*). Xavier a rempli un tableau 3×3 comme sur la figure 1. Il dit à Dimitri : « Tu as le droit de modifier mon tableau, mais pas n'importe comment, seulement en choisissant deux cases côte-à-côte, et en leur ajoutant un même nombre entier (relatif). Mais tu peux le faire plusieurs fois si tu veux. » Un peu plus tard, Dimitri revient tout content : « J'ai obtenu la grille 2 ! » annonce-t-il à Xavier. Mais Xavier n'est pas content. « Tu as triché, tu n'as pas respecté mes règles. » Qui a raison ?

1	2	3
4	5	6
7	8	9

figure 1

7	8	9
6	2	4
3	5	1

figure 2

Exercice 3 (*Taïwan, 2001*). Soit S l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ des entiers entre 1 et n. On choisit n parties deux à deux distinctes de S, notées $A_1, \ldots, A_n$. Montrer qu'il existe un élément x de S tel que les parties $B_1 = A_1 \setminus \{x\}, \ldots, B_n = A_n \setminus \{x\}$ soient également deux à deux distinctes.

Remarque : la notion $A \setminus \{x\}$ désigne l'ensemble A auquel on a retiré l'élément x (si x n'est pas dans A, $A \setminus \{x\} = A$).

Géométrie

Exercice 1. Soient Γ un cercle, $[BC]$ une corde de Γ. Soit A le milieu de l'arc $\widehat{BC}$. Par A on mène deux cordes quelconques $[AD]$ et $[AE]$ qui coupent le segment $[BC]$ en F et G respectivement. Montrer que le quadrilatère $DFGE$ est inscriptible dans un cercle.

Exercice 2 (*Olympiades russes de géométrie 2005*). Dans un cercle, les cordes $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en P. Les perpendiculaires à (AC) et à (BD) en C et D respectivement se coupent en Q. Montrer que (AB) est perpendiculaire à (PQ).

Exercice 3 (*Engel, Problem-Solving Strategies*). Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé. On construit les triangles équilatéraux ABE et CGD, extérieurement au quadrilatère, et BCF et DHA, intérieurement au quadrilatère. Montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.

Exercice 4 (*USAMO, 1974*). On considère un triangle équilatéral de côté x, et un point à l'intérieur dont les distances aux sommets sont a, b, c. Considérons maintenant un triangle ABC de côtés a, b, c, et un point M à l'intérieur du triangle tel que $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA}$. Montrer que $MA + MB + MC = x$.

Exercice 5 (*Olympiades 1995*). Soit $ABCDEF$ un hexagone convexe tel que :

$$AB = BC = CD, \quad DE = EF = FA, \quad \widehat{BCD} = \widehat{EFA} = 60°$$

Soit G et H deux points intérieurs à l'hexagone tels que $\widehat{AGB} = \widehat{DHE} = 120°$. Montrer l'inégalité :

$$AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF$$

Arithmétique

Exercice 1 (*Engel*). Soient a et b des entiers. Montrer que si 9 divise $a^2 + ab + b^2$, alors a et b sont multiples de 3.

Exercice 2 (*Engel*). Est-il possible que le produit de trois nombres entiers consécutifs soit de la forme a^n, avec $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$ des entiers positifs ?

Exercice 3 (*USAMO 1993*). Soient r et s deux entiers positifs impairs. On considère la suite (a_n) définie par $a_1 = r$, $a_2 = s$, et pour tout $n > 0$, a_{n+1} est le plus grand diviseur impair de $a_n + a_{n-1}$.

Montrer que cette suite reste constante à partir d'un certain rang et calculer la valeur de la constante finale en fonction de r et s.

Exercice 4 (*Kürschák 1980*). Soit n un entier impair positif. Montrer qu'il existe des entiers positifs a et b tels que

$$\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$$

si et seulement si n possède un diviseur premier congru à 1 modulo 4.

Exercice 5 (*Engel*). Dans la région reculée de Torturie, le vizir dispose en cercle n condamnés, numérotés dans l'ordre entre 1 et n. Implacablement, il envoie au bourreau un condamné sur deux : les condamnés $2, 4, \ldots$, et ainsi de suite en tournant autour du cercle, en sautant une personne entre deux supplices, jusqu'au moment où il n'en reste plus qu'un.

Calculer en fonction de n le numéro du dernier condamné restant.

4.2 Les solutions

Stratégies de base

Solution de l'exercice 1. Soit k un entier fixé : le plus grand carré strictement inférieur à b_k, noté M^2 vérifie $(M+1)^2 = M^2 + 2M + 1 \leqslant b_k + 2M$. On veut donc montrer $2M < a_{k+1}$, par exemple en montrant que $4b_k < a_{k+1}^2$.

Pour $k = 1$, on doit vérifier que $4a_1 < a_2^2$, ce qui est vrai car $a_2^2 \geqslant (a_1 + 2)^2 = 4a_1 + a_1^2 + 4$. Supposons que $4b_n < (a_{n+1})^2$. Alors

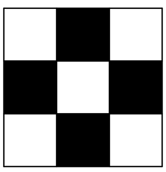
$$4b_{n+1} = 4b_n + 4a_{n+1} < a_{n+1}^2 + 4a_{n+1} < a_{n+1}^2 + 4a_{n+1} + 4 \leqslant a_{n+2}^2$$

et par récurrence sur n, $4b_n < a_{n+1}^2$, d'où l'on déduit, pour $n = k$, que $(2M)^2 < 4b_k < a_{k+1}^2$, comme recherché.

On a donc $(M+1)^2 < b_{k+1}$, et $(M+1)^2 \geqslant b_k$ par définition de M.

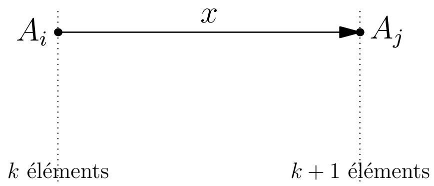
Solution de l'exercice 2. C'est Xavier qui a raison.

On colorie les cases alternativement en noir et blanc comme sur la figure suivante. Deux cases côte-à-côte sont de couleur différente ; la quantité obtenue en faisant la différence de la somme des cases noires par celle des cases blanches est un invariant. Pour la première grille, il vaut -5, et pour la deuxième, il vaut 1. On ne peut donc pas passer de l'une à l'autre en respectant les règles données par Xavier.



<u>Solution de l'exercice 3</u>. Supposons qu'il n'existe pas de tel x. Alors quel que soit le choix de x dans S, les parties $A_i \setminus \{x\}$ ne sont plus distinctes. Ceci ne peut arriver que si deux A_i diffèrent exactement de l'élément x (car les A_i sont distincts).

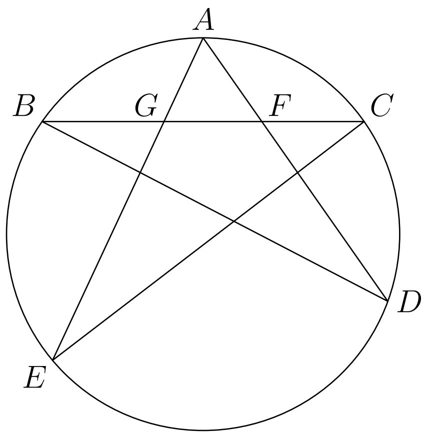
Plaçons un point pour chaque A_i, on les classe de gauche à droite suivant le nombre d'éléments. Pour chaque x dans S, on choisit un A_i et un A_j tel que $A_j = A_i \cup \{x\}$, et on trace une flèche étiquetée «x» de A_i vers A_j.



Retirons maintenant les points qui n'ont qu'une seule flèche (entrante ou sortant). Lorsque ce n'est plus possible, il reste toujours autant de points que de flèches et chaque point est doté exactement de deux flèches. En partant d'un point, on construit ainsi un polygone en suivant les flèches (un cycle). Celui-ci est constitué de deux chemins qui partent du point G le plus à gauche du cycle pour arriver au point D le plus à droite. Mais ces deux chemins sont étiquetés par les éléments de $D \setminus G$, et comme chaque étiquette n'apparaît qu'une fois, c'est impossible.

Géométrie

<u>Solution de l'exercice 1</u>.



Faisons la chasse aux angles. On a :

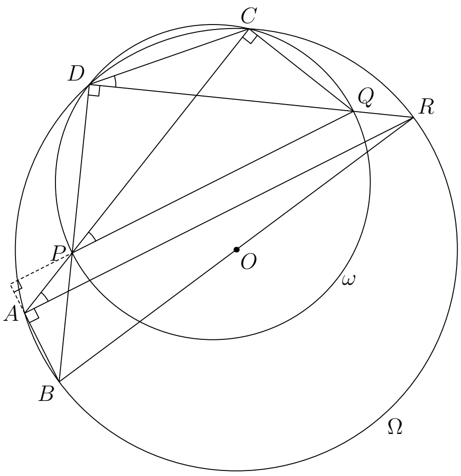
$$\widehat{BGE} = \widehat{BCE} + \widehat{AEC} = \widehat{BDE} + \widehat{ADC}$$

Or les arcs $\widehat{BA}$ et $\widehat{AC}$ sont égaux d'où :

$$\widehat{BGE} = \widehat{BDE} + \widehat{ADB} = \widehat{ADE}.$$

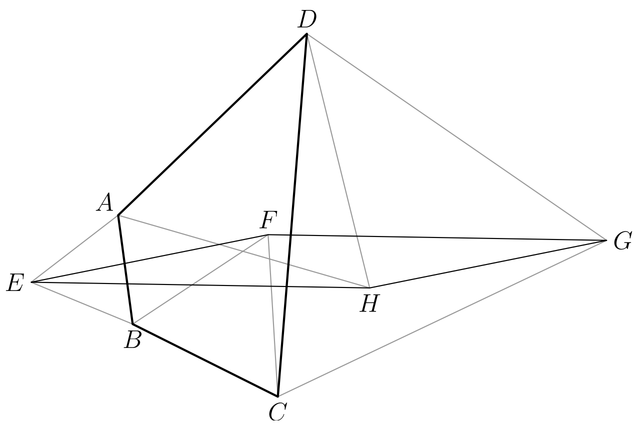
Par conséquent les angles $\widehat{EGF}$ et $\widehat{EDF}$ sont supplémentaires, donc le quadrilatère $DFGE$ est inscriptible.

<u>Solution de l'exercice 2</u>. Notons Ω notre cercle. On introduit le point R, intersection de la droite (DQ) avec Ω.



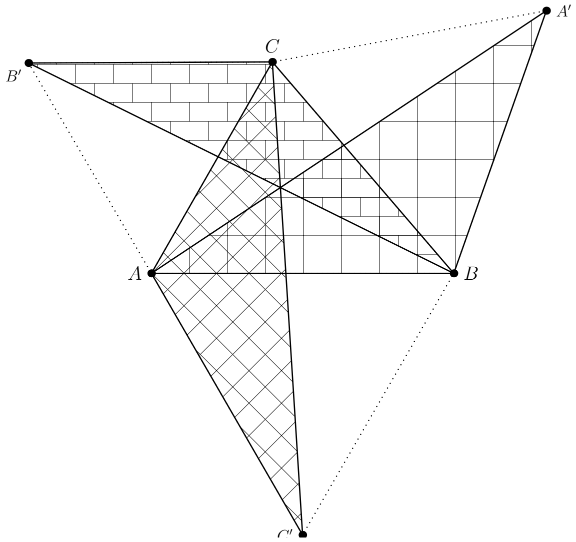
Comme $\widehat{PDQ} = \widehat{PCQ}$, les points P, D, C et Q sont cocycliques ; notons ω le cercle passant par ces points. On en déduit l'égalité des angles inscrits $\widehat{QPC}$ et $\widehat{QDC}$. Dans le cercle Ω, le théorème de l'angle inscrit donne $\widehat{RAC} = \widehat{RDC}$, et donc $\widehat{RAC} = \widehat{QPC}$. Par suite, les droites (AR) et (PQ) sont parallèles. Par ailleurs, $\widehat{BDR}$ étant droit, $[BR]$ est un diamètre du cercle, et il s'ensuit que $\widehat{BAR}$ est droit. Le parallélisme des droites (AR) et (PQ) fournit le résultat annoncé.

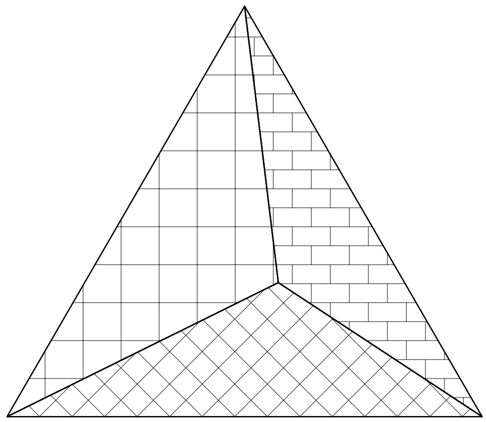
Solution de l'exercice 3. On commence par faire une figure :



La rotation de centre A et d'angle 60° transforme E en B et H en D, donc le segment $[EH]$ en $[BD]$. La rotation de centre C et d'angle 60° transforme de même le segment $[FG]$ en $[BD]$. Comme (EH) et (FG) font chacun un angle (orienté) de 60° avec (BD), on déduit que (EH) et (FG) sont parallèles. On montre de même que (EF) et (HG) sont parallèles. Donc $EFGH$ est un parallélogramme.

Solution de l'exercice 4.



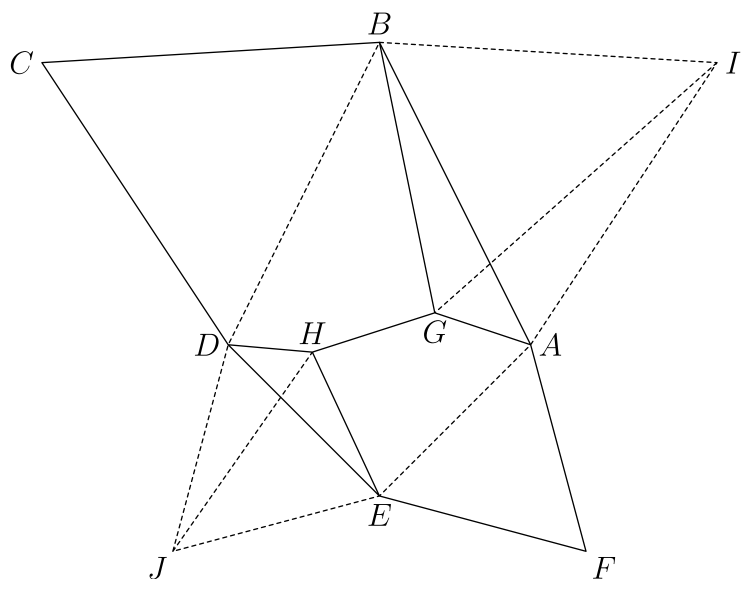


Construisons les triangles équilatéraux extérieurs à ABC s'appuyant sur les côtés. Le point d'intersection de deux des cercles circonscrits à ces triangles vérifie $\widehat{AMB} = \widehat{BMC} = \widehat{CMA}$, il est donc sur le troisième. Par construction, (AM), (BM), et (CM) sont les bissectrices des angles en M, et passent respectivement par les sommets des triangles équilatéraux A', B', C' opposés à A, B, C.

On a $MA + MB + MC = MA + MA' = AA' = BB' = CC'$. Remarquons alors que les triangles ABA', BCB', CAC' ont au total deux côtés de longueurs a, b ou c et trois côtés de longueurs AA'. On peut donc (vérifier que la somme des angles au sommet fait 360°) former avec ces morceaux un triangle équilatéral muni d'un point à distances a, b, c des sommets. Son côté est obligatoirement $x = AA' = MA + MB + MC$.

<u>*Solution de l'exercice 5.*</u> On construit extérieurement à l'hexagone les points I et J de telle sorte que les triangles ABI et DEJ soient équilatéraux. Par symétrie par rapport à l'axe BE on a $IJ = CF$.

Comme $\widehat{AGB} = \frac{2\pi}{3}$, le point G appartient au cercle circonscrit au triangle ABG d'où $AG + BG = IG$. De même on a $DH + EH = JH$. L'inégalité à montrer devient alors $IG + GH + HJ \geq IJ$ ce qui est trivial.



Arithmétique

Solution de l'exercice 1. On a en fait $a^2+ab+b^2=(a-b)^2+3ab$. C'est un multiple de 9, en particulier, donc 3 divise $(a-b)$, mais 9 aussi. Du coup, 9 est diviseur de $3ab$, donc a ou b est multiple de 3, mais comme 3 divise $(a-b)$, le résultat est encore vrai.

Solution de l'exercice 2. On a $(n-1)n(n+1)=n(n^2-1)$. Si ce nombre était une puissance k-ième, n et n^2-1 le seraient aussi, donc on aurait $n=a^k$, $n^2-1=b^k$ d'où $(a^2)^k-b^k=1$ ce qui est impossible.

Solution de l'exercice 3. Remarquons que $a_{n+2} \leqslant (a_n+a_{n+1})/2$ puisque a_n+a_{n+1} est un nombre pair, donc a_{n+2} en est un diviseur strict. Ainsi, a_n+a_{n+1} est une suite décroissante d'entiers positifs, par conséquent elle est constante à partir d'un certain rang N. Or si $a_n+a_{n+1}=a_{n+1}+a_{n+2}$, $a_n=a_{n+2} \leqslant (a_n+a_{n+1})/2$ donc $a_n \leqslant a_{n+1}$ pour tout $n \geqslant N$. La suite (a_n) elle-même est donc constante à partir du rang N.

Par ailleurs, on vérifie facilement que le PGCD de a_n et a_{n+1} est aussi le PGCD de a_{n+1} et a_n+a_{n+1} donc celui de a_{n+1} et a_{n+2} car a_{n+1} est impair. La limite de la suite est donc le PGCD de r et s.

Solution de l'exercice 4. Supposons que n s'écrive sous la forme demandée. Alors $(a+b)n=4ab$. Soit d le PGCD de a et b, $a=d\alpha$, $b=d\beta$. Alors $(\alpha+\beta)n=4d\alpha\beta$. En particulier, 4 divise $\alpha+\beta$ donc α est de la forme $2k+x$ et β est de la forme $2k-x$, avec x un certain nombre impair. Alors $\alpha\beta$, qui est premier avec $\alpha+\beta$, divise n et il vaut $4k^2-x^2$, qui est congru à -1 modulo 4, et il possède par conséquent un facteur premier de cette forme.

Réciproquement, soit n un nombre de la forme $4k-1$ (si n en est un multiple, on a encore une solution en multipliant a et b). On veut $(a+b)n=4ab$. Alors 4 divise $a+b$, donc on suppose $a=2l+x$ et $b=2l-x$. On voudrait donc $ln=(4l^2-x^2)$. Mais $n=4k-1$, donc on cherche

$$x^2=4l^2-4kl+l=(2l-k)^2+k^2-l.$$

Choisissons donc $l:=k^2$ et $x:=2k^2-k$. On a bien

$$\frac{4}{n}=\frac{1}{4k^2-k}+\frac{1}{k}.$$

Solution de l'exercice 5. On note $f(n)$ le numéro du dernier condamné restant. On note l'écriture de n en base 2

$$n=b_0+b_1\times 2+b_2\times 4+\cdots+b_k\times 2^k.$$

Supposons $b_0=0$. Alors n est pair : lors du premier tour, on élimine tous les condamnés pairs, et on recommence avec 1, 3, ..., $2n/2+1$. On élimine 3, puis 7..., et le nombre qui restera est $f(n)=2f(n/2)-1$.

Supposons $b_0=1$. Alors n est impair : lors du premier tour, on élimine tous les condamnés pairs, et on recommence avec n, 1, 3, ..., $2(n-1)/2+1$. On élimine 1, puis 5, puis 7...Tout ce qui passe comme si on posait le problème avec pour points 3, ..., $2(n-1)/2+1$, donc

$$f(n)=2f\left(\frac{n-1}{2}\right)+1.$$

Soit c_k le nombre qui vaut -1 si $b_k=0$ et 1 si $b_k=1$. On a en fait $c_k=2b_k-1$. On peut donc résumer ce qu'on vient de dire par $f(2b+b_0)=2f(b)+c_0$.

Ainsi :

$$\begin{aligned}
f(b_0+b_1\times 2+b_2\times 4+\cdots+b_k\times 2^k) &= c_0+2\times f(b_1+b_2\times 2+\cdots+b_k\times 2^{k-1})\\
&= c_0+2\times c_1+4\times f(b_2\times+\cdots+b_k\times 2^{k-2})\\
&= \cdots\\
&= c_0+c_1\times 2+c_2\times 4+\cdots+c_k\times 2^k\\
&= 2(b_0+b_1\times 2+b_2\times 4+\cdots+b_k\times 2^k)-(1+1\times 2+1\times 4+\cdots+1\times 2^k)
\end{aligned}$$

D'où $f(n) = 2(n-2^k)+1$: depuis l'écriture en base 2 de n, l'écriture de $f(n)$ en base 2 est obtenue en déplaçant le chiffre «1» le plus à gauche du côté droit.

Par exemple, si $n = 25$, qui s'écrit 11001 en base 2, $f(n)$ s'écrit 10011 en base 2, ce qui donne 19. En effet, les condamnés éliminés sont successivement

2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
1	5	9	13	17	21	25					
7	15	23									
11	3										

et il reste 19 à la fin.

IV. Quelques informations sur les olympiades internationales

1 Compte-rendu des OIM 2007 (Hanoï, Vietnam) par Xavier Caruso

Qu'est-ce qu'une délégation ? Une délégation à une Olympiade est généralement composée de huit personnes qui se répartissent comme suit :

- un chef de délégation (*Leader*) ; en général Claude Deschamps pour la France
- un adjoint (*Deputy Leader*) ; en général Johan Yebbou pour la France
- les six candidats (*Contestants*) ; numérotés par ordre alphabétique de FRA1 à FRA6 pour la France

À ces gens peuvent s'ajouter des observateurs qui se répartissent encore en trois catégories A, B et C selon qu'ils restent aux côtés du chef de délégation, de l'adjoint ou des candidats. Cette année, à Hanoï, 98 pays étaient représentés pour un total de 522 candidats, 93 chefs, 88 adjoints et 84 observateurs (certains pays n'ont envoyé que des observateurs). J'étais moi-même observateur B, et j'ai donc passé la totalité de l'Olympiade avec Johan Yebbou épiant chacun de ses faits et gestes.

La délégation française cette année, à Hanoï

Avant le début officiel de l'Olympiade Les chefs de délégation arrivent quelques jours avant la cérémonie d'ouverture pour choisir collectivement les problèmes qui seront proposés à la compétition. Le choix s'effectue parmi les exercices de la liste courte, mise au point au préalable par le pays organisateur et résultant d'une première sélection des propositions envoyées par chacun des pays participants. L'adjoint, quant à lui, accompagne les candidats et arrive généralement la veille de la cérémonie d'ouverture. Cette année, nous avions décidé d'avancer notre voyage de quelques jours pour faire un dernier entraînement sur place et également avoir plus de temps pour s'habituer au décalage horaire. Ainsi, nous sommes arrivés pratiquement le même jour que Claude Deschamps.

Bien entendu, pendant cette période pré-Olympiade pendant laquelle les exercices sont choisis, il semble préférable, afin de limiter les possibilités de triche, d'interdire tout contact entre les chefs de délégation et leurs équipes respectives. On m'a relaté que selon les années, cette précaution était appliquée avec plus ou moins de sérieux et d'efficacité. Généralement toutefois, les mesures suivantes sont toujours prises : les chefs de délégation ne logent pas dans le même hôtel que leur équipe (et souvent aussi pas dans la même ville), et les lieux de résidence sont tenus, dans une certaine mesure, secrets. Épisoquement, il arrive que l'on assiste à des mesures de prévention plus rudes, comme par exemple la confiscation des téléphones portables jusqu'à la fin des épreuves. Cette année, il faut avouer que les mesures étaient exceptionnellement sévères : les chefs de délégation étaient quasiment emprisonnés dans leur hôtel gardé par la police sans autorisation de communiquer avec l'extérieur, et évidemment sans accès à Internet. Au bout de quelques jours, ne pouvant plus supporter cet isolement, ils ont obtenu le droit de sortir en ville en groupe de cinq minimum à condition de signaler tous leurs déplacements aux policiers de garde.

L'arrivée Dès la descente de l'avion, l'équipe d'organisation de l'Olympiade prend en charge les diverses délégations, et les conduit dans les hôtels adéquats. À chaque délégation, il est en particulier affecté un guide chargé de rester auprès des élèves (et de servir d'interprète) pendant toute la durée du séjour. Traditionnellement, chaque participant reçoit quelques petits cadeaux comme un sac à dos, un carnet de notes, des stylos, un T-shirt, *etc.* mais bien entendu, cela varie selon les années. Cette fois-ci, nous avons eu comme cadeau original un parapluie, les orages étant traditionnellement plutôt fréquents au Vietnam en cette saison. (Il faut dire cependant que, durant notre séjour, le temps a été plutôt très clément, et les pluies vraiment rares.)

La panoplie du parfait participant

Signalons que depuis quelques années, les hôtels sont excessivement luxueux, pas moins de trois étoiles, et souvent au-delà, avec en plus une tendance à la surenchère pour les hôtels des chefs de délégation. Cette année se distinguait encore des précédentes par le fait que dès le début de l'Olympiade les adjoints (et les observateurs B) étaient séparés des lycéens. Un système de bus avait toutefois été mis en place pour que les adjoints puissent rendre visite à leurs élèves et les soutenir pendant les derniers moments précédant les épreuves.

Notre guide

Une chambre d'hôtel d'élèves

La cérémonie d'ouverture C'est sans surprise la cérémonie d'ouverture qui marque officiellement le début de l'Olympiade. Elle comprend généralement plusieurs discours des responsables des Olympiades et du pays organisateur, ainsi que le défilé des candidats de tous les pays. Il est plutôt conseillé aux candidats de revêtir une tenue élégante ce jour-là puisqu'ils vont être amenés à monter sur scène. Certaines délégations défilent avec un drapeau de leur nation, quelquefois arborent une mascotte ou lancent des bonbons dans la salle. Il serait peut-être souhaitable que la France fasse aussi des efforts dans cette direction : par exemple, on pourrait habiller les élèves avec des « uniformes », deux bleus, deux blancs et les deux derniers rouges. Finalement, il arrive qu'un petit spectacle agrémente cette réception officielle, comme c'était le cas cette année.

Un spectacle ouvre la cérémonie

L'équipe française défile

Évidemment, à l'issue de la cérémonie, les chefs de délégation d'une part et les adjoints et candidats d'autre part sont reconduits dans leurs hôtels respectifs, si possible sans que ceux-ci n'aient pu ni se voir, ni se parler. (Comme je l'ai déjà mentionné, cette année, la sécurité semblait vraiment optimale, et de fait on n'a su que plus tard où les chefs étaient placés dans la salle.)

Les épreuves Le lendemain, commence le concours. Celui-ci s'étale sur deux jours en deux épreuves de quatre heures et demie chacune. Chaque épreuve comporte trois exercices, chacun noté sur sept points. Le total général est donc sur 42. Bien que chaque exercice rapporte autant de points, le premier énoncé de chaque journée est jugé plus facile que le second, lui-même plus facile que le troisième. Il est donc fortement conseillé aux candidats de traiter en priorité le premier exercice.

Pratiquement, les élèves sont tout d'abord transportés (en général par bus) de leur hôtel à la salle (ou aux salles) d'examen où ils se répartissent selon un plan de table défini à l'avance par le pays organisateur. Il va de soi que les candidats d'une même délégation sont dispersés au mieux dans les différentes salles. Tout le nécessaire de travail est normalement fourni aux élèves au début de l'épreuve, notamment les feuilles, mais il est malgré tout conseillé d'apporter quelques affaires personnelles, comme une règle, un compas, des stylos de couleur, et éventuellement de la nourriture ou des boissons (quelques biscuits et de l'eau sont selon les années aussi fournis). Seulement lors de la première demi-heure, il est autorisé à poser des questions sur d'éventuelles imprécisions de l'énoncé (de toute façon, très rares) : il est donc important que le candidat prenne un peu de temps au début de l'épreuve pour s'assurer qu'il comprend bien l'intégralité de l'énoncé, avant de se lancer dans la résolution du premier problème (qui est, rappelons-le, le plus facile et celui par lequel il faut commencer). Les questions doivent être posées par écrit et sont transmises sans retouche à l'intégralité des chefs de délégation, qui décident collégialement quelle réponse il convient de donner (qui, selon Johan, est la plupart du temps « L'énoncé est clair ! »)... ceci encore une fois dans l'idée de respecter le principe d'équité.


L'arrivée des candidats

Il convient de signaler que le déroulement de l'examen est très codifié. Par exemple, chaque candidat a, à sa disposition, différents panneaux qu'il est censé lever lorsqu'il souhaite adresser une requête. Ainsi existe-t-il un panneau « Help » pour signaler un problème urgent de santé, un panneau « More paper » pour demander de nouvelles feuilles de copie ou de brouillon, un panneau « Toilet » pour aller aux toilettes et finalement un panneau « Water » pour, vous l'aurez deviné, demander de l'eau. Si vous avez l'esprit aussi tordu que notre dernier médaillé d'or, vous remarquerez que l'on peut s'amuser à combiner les panneaux pour obtenir des phrases comme « Help, more toilet water ! », mais ce n'est cependant pas conseillé. Bizarrement, il n'y a pas (du moins, il n'y avait pas cette année) de panneau dédié pour poser une question sur l'énoncé ; dans les cas non prévus, il suffit normalement de lever la main et d'attendre qu'un humain vienne s'inquiéter du problème. En théorie, tout devrait se dérouler dans le silence le plus absolu, mais il faut avouer que, les jeunes étant ce qu'ils sont :-), on assiste parfois à quelques comportements étonnants, de quoi passer un petit moment de détente au milieu de ces heures de réflexion. Au terme des quatre heures et demie, les élèves rendent leurs copies et *tous* leurs brouillons. Insistons réellement sur le fait qu'il est tout à fait primordial de rendre *tous* les brouillons puisqu'une simple remarque d'apparence anodine peut rapporter des points. Je reviendrai sur cela par la suite lorsque je parlerai de la coordination.

Certains de nos candidats nous ont avoué que les épreuves d'une Olympiade peuvent être déstabilisantes pour beaucoup de raisons. Évidemment, il y a l'aspect formel qui vient d'être mentionné, mais aussi le fait de composer dans un pays étranger, dans une salle que l'on ne connaît pas, entouré de personnes que l'on n'a jamais vues, et dans une atmosphère peut-être un peu particulière (ce n'est pas tous les jours que l'on représente la France !). Bref, il semble utile d'avoir en tête ces aspects de la compétition et éventuellement de s'être légèrement préparé à les affronter sereinement.

La salle d'examen

Après le gong final et le ramassage des copies, les élèves sont reconduits à leur hôtel où les adjoints (qui ont eu en général des visites organisées le matin) les attendent de pied ferme pour leur demander leurs premières impressions sur l'épreuve et quels exercices ils ont résolu intégralement ou partiellement. C'est également à ce moment que les adjoints prennent connaissance du sujet de l'Olympiade ; ainsi, ils sont évidemment plus ou moins démunis devant les commentaires des élèves qui s'enchaînent souvent très vite : comment répondre par exemple intelligemment à « Pour l'exercice 2, j'ai utilisé la droite de Simson, c'est bien ? » lorsque l'on découvre à peine l'énoncé ? C'est aussi l'occasion rêvée pour les élèves de justifier leur échec en argumentant que la difficulté des exercices n'avait rien à voir avec celle des années précédentes. Évidemment, les adjoints (et leurs observateurs) déchantent rapidement après s'être plongé quelques minutes dans le sujet. Blague à part, cette rencontre post-épreuve est très importante pour la suite des événements puisque ce sont les adjoints (avec les chefs) qui devront défendre les copies de leurs candidats ; ainsi s'ils savent à l'avance quelles pages sont importantes, quels arguments sont incomplets, quelles sont les idées directrices, *etc.* ils auront plus de facilité par la suite à bâtir une argumentation qui rapportera le maximum de points à la copie.

L'après-midi qui suit est en général laissé libre pour tout le monde. Il faut noter qu'il est mis à la disposition des élèves (et aussi des adjoints) de nombreuses activités pour occuper leur temps libre : on compte notamment traditionnellement des salles de jeux (jeux de société, échecs), des salles informatique avec accès à Internet, des possibilités pour faire du sport, *etc.* Bien entendu, les dispositifs diffèrent d'une année sur l'autre en fonction des infrastructures dont dispose le pays organisateur, mais la tendance générale tend à proposer une quantité suffisamment vaste d'activités qui peut satisfaire tout le monde.

Un match de waterpolo entre élèves

La coordination Commence ensuite la correction et la notation des copies, travail portant le nom de coordination et réalisé en commun par les chefs de délégation, les adjoints et les coordinateurs. Pour cela, il faut commencer par réunir chefs et adjoints dans un même hôtel : Johan me fait savoir que ce sont plus souvent les adjoints qui se déplacent jusqu'à l'hôtel des chefs (bien que la solution inverse ait déjà été vue), l'avantage semblant être d'éloigner la coordination du lieu de résidence des candidats. C'est en tout cas ce qu'il s'est passé cette année au Vietnam, où nous avons rejoint les chefs dans un hôtel encore plus luxueux près de la baie d'Halong.

Les copies et les brouillons sont également acheminées sur les lieux de la coordination et photocopiées : un exemplaire (l'original) revient au chef de délégation et un autre (la photocopie) aux coordinateurs. Évidemment, les chefs de délégation ne reçoivent que les copies de leurs élèves, alors que les coordinateurs ont un exercice attitré. Les deux partis prennent connaissance du contenu du travail des élèves et mettent chacun indépendamment une note selon un barème malgré tout très précis. Pendant les deux jours suivants (parfois, cela peut durer plus de temps), se succèdent les coordinations : selon un planning décidé à l'avance, les chefs de délégation accompagnés de leurs adjoints (et éventuellement des observateurs) rencontrent les coordinateurs et se mettent d'accord (ou pas) sur la note à attribuer à l'élève.

Généralement, il n'y a pas vraiment matière à pinailler étant donné la précision du barème. En tout cas, la plupart de nos coordinations se sont conclues rapidement. Malgré tout, il peut apparaître des discussions lorsque la copie traitée n'est pas claire, typiquement lorsque les principaux arguments ne sont pas dans l'ordre ou dissimulés dans les brouillons. C'est alors à nous d'expliquer aux coordinateurs que la copie a plus de valeur qu'il n'y paraît au premier regard, et de quémander quelques points supplémentaires. Il va sans dire que si l'on arrive parfois à obtenir quelques miettes, cela n'est pas comparable à ce que l'on pourrait avoir avec un effort minimum de rédaction.

Johan et Claude discutent pour quelques points supplémentaires

Avant de poursuivre, donnons quelques idées sur la manière dont sont conçus les barèmes. Souvent plusieurs solutions sont envisageables pour résoudre un exercice, et dans ce cas, les plus naturelles d'entre elles sont complètement balisées : tel résultat intermédiaire rapporte tant de points, tel autre en rapporte tant mais seulement si la démarche du candidat montrait clairement qu'il avait une idée assez précise de la façon dont l'utiliser, *etc.* En outre, il faut savoir qu'avant tout une telle solution (balisée) est classée soit en « début de solution » soit en « solution presque complète », selon des critères qui pour le coup peuvent parfois être subjectifs ; c'est donc le moment de marchander lorsqu'une copie est tendancieuse à ce point de vue. Dans le cas du « début de solution », le barème n'attribue en général pas plus de quatre points, et, comme je le disais précédemment, ceux-ci dépendent des résultats intermédiaires obtenus. Dans le cas d'une « solution presque complète », la note ne peut descendre en dessous de cinq points, et habituellement il est retiré un point par erreur ou lacune. Finalement, il arrive que la copie ne suive pas clairement un cas prévu par le barème : il est possible que l'idée soit complètement originale, mais il est plus fréquent que certains résultats soient prouvés sans véritable cohérence, et surtout répertoriés dans plusieurs solutions distinctes. C'est alors à la force de l'argumentation des chefs et des adjoints que se joue la note finale ; malgré tout, il est rare que celle-ci puisse atteindre des sommets faramineux.

Au regard de ce qui précède, les conseils que l'on peut donner à nos futurs candidats sont les suivants. Tout d'abord, mais cela va de soi, essayez autant que possible de rédiger clairement, proprement et précisément, aussi bien d'ailleurs sur vos copies que sur vos brouillons. En effet, si l'exercice n'est pas résolu entièrement, c'est généralement dans vos brouillons que l'on pourra trouver des résultats partiels qui peuvent rapporter des points. Si ceux-ci sont démontrés à la va-vite, il sera plus difficile pour nous de justifier qu'il était bien clair que vous aviez vu qu'il s'agissait là d'un résultat important et que si la rédaction de la preuve souffre de quelques lacunes, c'est simplement par manque de temps. Par ailleurs, sans aller jusqu'à faire un catalogue complet pour chaque exercice, n'hésitez pas à mentionner (sur vos brouillons) toutes les idées un tant soit peu sérieuses qui vous passent par la tête, si possible même en les détaillant un minimum. Par exemple, cette année, le barème octroyait plus ou moins un point si le candidat avait parlé de descente infinie sur l'exercice 5 sans pour autant avoir vraiment développé cette piste. Mentionnons pour finir qu'en temps normal, les erreurs qui apparaissent sur les brouillons ne font perdre aucun point ; ce n'est malgré tout pas une raison pour aligner inepties sur inepties car l'on comprend aisément que dans le cas où l'on trouve dans votre copie une formule à partir de laquelle on peut résoudre l'exercice en deux lignes (ce qu'évidemment vous n'avez pas remarqué), il sera plus facile pour nous d'expliquer que vous étiez très proche de la solution et que vous auriez certainement conclu avec juste un peu plus de temps (et donc que vous méritez au moins cinq points) si ladite formule n'apparaît pas comme par magie au milieu d'un ramassis d'autres relations du même type, la plupart étant fausses. (Cette histoire n'est pas une fiction : elle s'est plus ou moins déroulée cette année même.)

Bien que ce cas soit très rare, il est possible que les avocats (chefs et adjoints) et les coordinateurs n'arrivent pas à se mettre d'accord sur la note finale au terme de leur petite délibération. Dans cette situation, on remonte dans la hiérarchie, et c'est d'abord le chef des coordinateurs qui continue l'arbitrage. Si aucun accord n'est trouvé au terme de ce second round, la décision finale est votée par l'ensemble des chefs de délégation lors de la dernière réunion du jury, présentée juste après.

La dernière réunion du jury À l'issue de la coordination, l'ensemble des chefs de délégation se réunit une dernière fois. Comme mentionné précédemment, ils examinent d'abord les éventuels conflits non encore résolus entre avocats et coordinateurs. Ils décident ensuite les barres pour les médailles de bronze, d'argent et d'or : traditionnellement, environ la moitié des candidats reçoivent une médaille, et parmi les médaillés, un sixième reçoit l'or, un tiers l'argent, et la moitié le bronze. Malgré tout, cette règle est toujours sujette à débat car il est impossible de respecter exactement les proportions puisque l'on se voit mal couper un élève en douze. La question est encore plus épineuse lorsqu'il s'agit de couper (ou plutôt de ne pas couper) les points.

Pendant ce temps, la belle vie Pendant les jours de coordination, les candidats ont diverses activités prévues, et notamment des excursions organisées pour visiter le pays d'accueil. Bien entendu, la qualité et l'intérêt de ces excursions varie fortement d'une année sur l'autre, mais je dois dire que j'ai trouvé celles de cette année vraiment bien (les adjoints et leurs observateurs font généralement les mêmes sorties, mais pas aux mêmes dates) : nous avons visité le musée d'ethnologie qui retrace très fidèlement la vie de nombreuses minorités au Vietnam, le temple de la Littérature qui est un ancien temple reconverti en université, le village de Van Phuc spécialisé dans la fabrication et la vente de soie puis finalement la fameuse baie d'Halong. En plus de cela, il est toujours possible de profiter des activités de temps libre déjà mentionnées précédemment, et il peut aussi être organisé des soirées ou d'autres rendez-vous (par exemple compétitions sportives) par l'Olympiade. Pendant tout ce temps, séparés de leurs accompagnateurs, les candidats sont surveillés par leurs guides respectifs.

La baie d'Halong

Et nos élèves sur le bateau

Certaines années, mais ce n'était pas le cas à Hanoï, l'Olympiade met en place un système d'affichage qui permet d'informer les élèves de leurs résultats au fur et à mesure des coordinations. Si ce n'est pas le cas, les pressés ont toujours la possibilité d'accéder au site de Mathlinks[1] (`http://www.mathlinks.ro/`) où les résultats sont mis à jour très rapidement.

[1] Nous vous conseillons d'ailleurs de fréquenter ce site, et notamment son forum qui voit défiler chaque jour un nombre considérable d'exercices d'entraînement.

Avant de deschampter Après la coordination, les chefs de délégation, les adjoints et leurs observateurs éventuels quittent à nouveau leur hôtel pour rejoindre celui des candidats (ou si ce n'est pas le même, un hôtel dans la même ville). Ils peuvent alors retrouver leurs élèves, et les féliciter ou les réprimander selon le cas. Ce moment est toujours attendu avec une certaine angoisse par les petits français, tant il est connu que les félicitations de Claude Deschamps sont bien plus rares que les engueulades. Malgré tout, ne vous inquiétez pas trop : il met rarement ses menaces à exécution (pour l'instant aucun élève n'est rentré à la nage) et, à la rentrée prochaine, il n'y paraîtra plus.

C'est également à ce moment que les encadrants rendent aux élèves leurs copies et leurs brouillons (les originaux, sans annotations). C'est ainsi d'autant plus facile pour eux de commenter leurs âneries, ou de leur expliquer comment ils auraient pu éviter de perdre bêtement un point. Finalement, les accompagnateurs remettent également à leurs candidats le fameux « diplôme » de participation à l'Olympiade.

Nos élèves ont malgré tout pu profiter de la dernière soirée pendant laquelle chaque équipe pouvait s'improviser artiste l'espace d'un instant en montant sur scène devant les autres délégations. L'équipe française a ainsi pu montrer ses talents en chansons, puisqu'elle a interprété pas moins de trois titres qui ont chacun connu un franc succès.

Rémi sur scène à la guitare

La cérémonie de clôture Traditionnellement le lendemain a lieu la cérémonie de clôture qui comme son nom l'indique clôt officiellement l'Olympiade. Lors de cette cérémonie, outre quelques discours d'importantes personnalités, on peut assister à la remise des médailles. Bien que ceci soit réalisé à un rythme assez rapide, la remise de toutes les médailles prend encore un certain temps puisqu'il ne faut pas oublier qu'en moyenne deux cent cinquante lauréats en reçoivent une. Souvent encore, un petit spectacle termine la cérémonie, après quoi il est organisé une séance de photos puis un buffet où chacun peut manger et se divertir comme il l'entend. (Cette année, le buffet était toutefois sous-dimensionné de sorte qu'il n'était pas si facile de trouver une place à une table, ni d'ailleurs de la nourriture en quantité suffisante.)

En fin de soirée, chacun est reconduit à son hôtel en attendant le grand départ qui, selon les horaires des avions, a lieu le lendemain ou le jour suivant.

Nos chefs ont réussi à trouver une place assise au banquet final

Le retour L'organisation de l'Olympiade prend encore en charge le transport des hôtels à l'aéroport qui se fait en règle générale par bus. Cette année, une fois arrivés à l'aéroport, notre guide est encore restée avec nous un bon moment, mais d'après ce que je comprends, ce n'est pas une règle absolue.

Pour simplifier la fin, disons simplement qu'une fois enregistré, on embarque, on s'endort puis on se réveille à Paris... mais quiconque est déjà monté dans un avion (surtout pour un vol international) sait bien que c'est infiniment plus complexe.

2 Sujets des OIM 2007

Exercice 1. Soient n nombres réels $a_1, a_2, \dots, a_n$. Pour chaque i ($1 \leqslant i \leqslant n$) on définit

$$d_i = \max\{a_j : 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j : i \leqslant j \leqslant n\}$$

et on pose

$$d = \max\{d_i : 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

(a) Montrer que pour tous nombres réels $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$,

$$\max\{|x_i - a_i| : 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2}. \qquad \text{(IV.1)}$$

(b) Montrer qu'il existe des nombres réels $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n$ tels que (IV.1) soit une égalité.

Exercice 2. On donne cinq points A,B,C,D et E tels que $ABCD$ soit un parallélogramme et $BCED$ un quadrilatère convexe, inscriptible. Soit ℓ une droite passant par A. On suppose que ℓ coupe l'intérieur du segment $[DC]$ en F et coupe la droite (BC) en G. On suppose aussi que $EF = EG = EC$. Montrer que ℓ est la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$.

Exercice 3. Dans une compétition mathématique certains participants sont des amis. L'amitié est toujours réciproque. Un groupe de participants est appelé une *clique* si toute paire d'entre eux est formée de deux amis. (En particulier, chaque groupe d'au plus un participant constitue une clique.) Le nombre de participants dans une clique est appelé sa *taille*.

On suppose que, dans cette compétition, la plus grande taille des cliques est paire. Montrer que les participants peuvent être répartis dans deux pièces de telle sorte que la plus grande taille des cliques contenues dans une de ces pièces soit égale à la plus grande taille des cliques contenues dans l'autre.

Exercice 4. Dans un triangle ABC la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$ recoupe le cercle circonscrit en R, coupe la médiatrice de $[BC]$ en P et la médiatrice de $[AC]$ en Q. Le milieu de $[BC]$ est K et le milieu de $[AC]$ est L. Montrer que les triangles RPK et RQL ont la même aire.

Exercice 5. Soit a et b deux entiers strictement positifs. Montrer que si $4ab-1$ divise $(4a^2-1)^2$, alors $a = b$.

Exercice 6. Soit n un entier strictement positif. Dans l'espace on considère l'ensemble

$$S = \left\{(x, y, z) : x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\}, x + y + z > 0\right\},$$

constitué de $(n+1)^3 - 1$ points. Trouver le plus petit nombre de plans dont la réunion contient S mais de contient pas $(0, 0, 0)$.

3 Sujets des OIM 2006

Exercice 1. Soit ABC un triangle. On appelle I le centre de son cercle inscrit. Soit un point P à l'intérieur du triangle qui vérifie :

$$\widehat{PBA}+\widehat{PCA}=\widehat{PBC}+\widehat{PCB}.$$

Montrer que $AP \geqslant AI$, avec égalité si et seulement si $P = I$.

Exercice 2. Soit P un polygone régulier à 2006 côtés. On dit qu'une diagonale de P est *bonne* si ses extrémités partagent le contour de P en deux parties qui comportent chacune un nombre impair de côtés. Les côtés de P sont également considérés comme bons. On appelle *bon* triangle un triangle isocèle dont deux côtés sont bons. On suppose que P est découpé en triangles par 2003 diagonales, deux à deux non sécantes à l'intérieur de P. Trouver le nombre maximal de bons triangles qui peuvent apparaître dans une telle configuration.

Exercice 3. Trouver le plus petit réel M tel que l'inégalité

$$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leqslant M(a^2+b^2+c^2)^2$$

soit vérifiée pour tous les réels a, b, c.

Exercice 4. Trouver tous les couples d'entiers (x, y) qui vérifient

$$1+2^x+2^{2x+1}=y^2$$

Exercice 5. Soit P un polynôme à coefficients entiers de degré $n > 1$, et k un entier naturel. On définit le polynôme Q par $Q(x) = P(P(\cdots P(P(x))\cdots))$, où P apparaît k fois. Montrer qu'il existe au plus n entiers t tels que $Q(t) = t$.

Exercice 6. À chaque côté b d'un polygone convexe P, on associe l'aire maximum d'un triangle de côté b contenu dans P. Montrer que la somme des aires associées aux côtés de P est supérieure ou égale à deux fois l'aire de P.