

Transformations géométriques

Thomas Budzinski

Table des matières

1	Symétries centrales et axiales, translations	2
2	Homothéties	4
2.1	Définitions et propriétés de base :	4
2.2	Quelques applications classiques :	6
2.3	Homothéties et cercles :	8
2.4	Chasse aux tangentes	10
2.5	Conseils pour les exercices	12
2.6	Exercices	12
3	Rotations	14
3.1	Cours	14
3.2	Conseils pour les exercices	16
3.3	Exercices	16
4	Similitudes directes	17
4.1	Définitions et propriétés de base	17
4.2	Centre d'une similitude	19
4.3	Deux similitudes pour le prix d'une	21
4.4	Similitudes indirectes	22
4.5	Conseils pour les exercices :	22
4.6	Exercices	23
5	Indications pour les exercices	25
6	Solutions des exercices	26

Introduction

Une transformation géométrique est une *bijection* du plan dans lui-même, c'est-à-dire une manière d'associer à chaque point un autre point, de telle manière que tout point soit l'image

d'un autre point, et que deux points différents aient des images différentes. Les transformations auxquelles on va s'intéresser conservent la plupart des propriétés géométriques intéressantes. Par exemple, toutes envoient une droite sur une droite, un cercle sur un cercle, un angle de 42° sur un angle de 42° , un carré sur un carré et ainsi de suite...

Le fait de s'intéresser aux transformations qui préservent certaines propriétés est un élément essentiel de la géométrie "moderne" (c'est-à-dire celle pratiquée depuis le XIX^e siècle) que vous rencontrerez si vous continuez des études en mathématiques. Cependant, les transformations du plan sont aussi très utiles dans la résolution de problèmes de géométrie plus élémentaires. Le but de ce document est de vous présenter les transformations usuelles du plan et la manière de les utiliser pour résoudre des problèmes de géométrie de type olympique. Il est possible de sauter les preuves en première lecture, la plupart des résultats étant de toute façon assez intuitifs.

Les exercices de ce cours sont de difficultés variables mais rarement très faciles. Si vous bloquez sur un exercice, vous pouvez d'abord consulter les indications qui se trouvent avant les solutions. Il est conseillé d'avoir déjà lu un cours de géométrie de type olympique de niveau débutant avant d'aborder celui-ci.

Ce polycopié se suffit en principe à lui-même, mais le lecteur intéressé pourra également lire les livres "Geometric Transformations" de Yaglom (en anglais... ou en russe!). Les deux premiers tomes couvrent le contenu de ce cours et le troisième aborde un sujet plus avancé : les transformations projectives.

1 Symétries centrales et axiales, translations

Vous connaissez déjà certaines transformations du plan : la symétrie centrale, la symétrie axiale et, si vous êtes au moins en Seconde, la translation. Rappelons tout de même leurs définitions :

Définition 1.1. Soit (d) une droite. La *symétrie axiale* d'axe (d) est la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que (d) soit la médiatrice de $[MM']$.

Définition 1.2. Soit O un point. La *symétrie centrale* de centre O est la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que O soit le milieu de $[MM']$.

Définition 1.3. Un *vecteur*, noté \vec{v} , est un objet géométrique caractérisé par une direction, un sens et une longueur. On dessine un vecteur avec une flèche. Le vecteur partant du point A et allant jusqu'au point B est noté \overrightarrow{AB} .

Exemple 1.4. Sur la figure 1, on a $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ car \overrightarrow{AB} et \vec{v} ont la même direction (20° avec l'horizontale), le même sens (vers la droite) et la même longueur.

Définition 1.5. Soit \vec{v} un vecteur. La *translation* de vecteur \vec{v} est la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

Etant donnée une transformation géométrique, il est toujours intéressant de savoir quelles propriétés elle conserve :

Proposition 1.6. a) Les symétries centrales et axiales et les translations conservent les droites, les cercles, les angles, les longueurs.

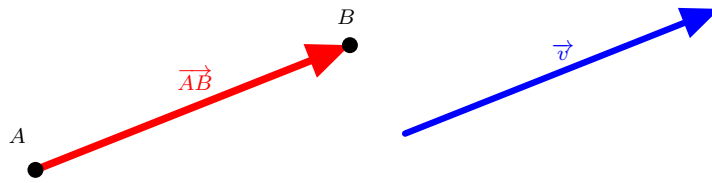


FIGURE 1 – Deux vecteurs égaux.

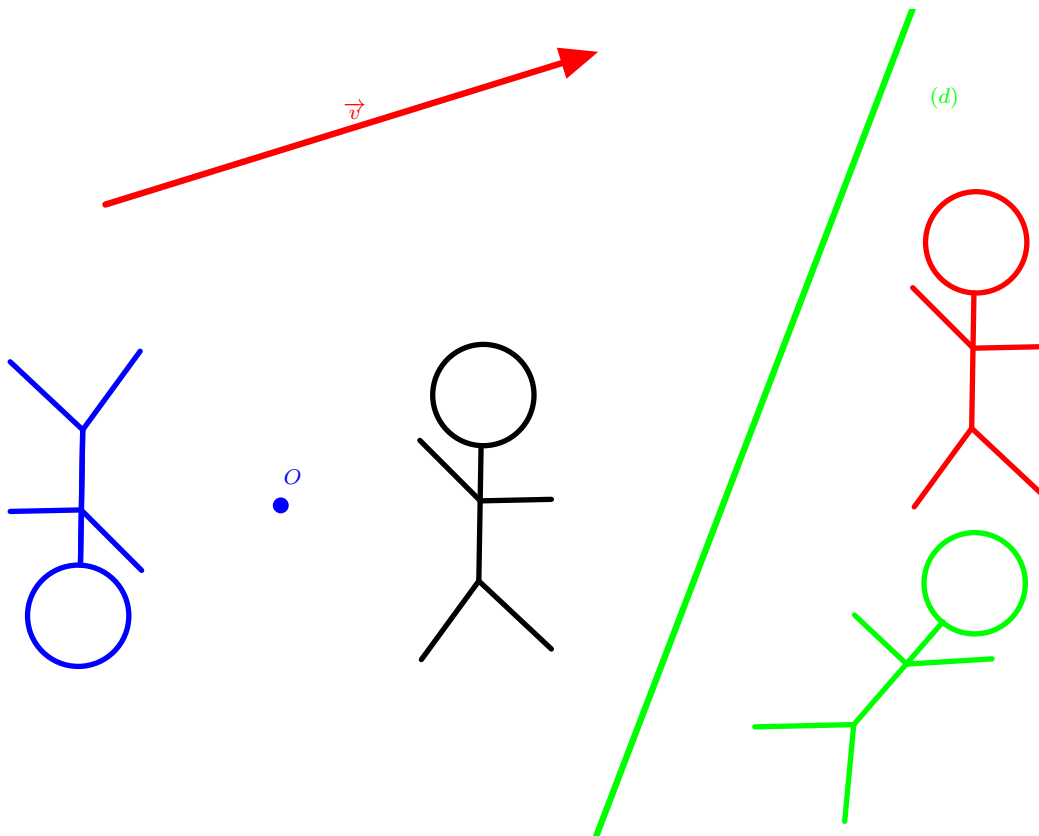


FIGURE 2 – Une figure et ses images par la symétrie centrale (en bleu), la symétrie axiale (en vert), et une translation (en rouge). Notons que l'image par la symétrie axiale lève le bras droit, car la symétrie axiale est la seule transformation qui inverse les angles orientés.

- b) Les symétries centrales et les translations conservent les angles orientés : si A, B et C ont pour image A', B' et C' , alors $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- c) Les symétries axiales inversent les angles orientés : si A, B et C ont pour image A', B' et C' , alors $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

Bien que très simples, ces transformations permettent déjà de résoudre certains exercices, notamment des problèmes de construction :

Exercice 1 On considère une rivière droite de largeur L et deux points A et B de part et d'autre de cette rivière. On veut construire un pont perpendiculaire à la rivière. Où le construire pour que le trajet de A à B soit le moins long possible ?

Exercice 2 Etant donnés deux points A et C et un cercle Γ , construire deux points B et D sur Γ tels que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 3 On se donne un cercle Γ de rayon r , une droite (d) et une longueur $a \leq 2r$. Construire une droite parallèle à (d) qui coupe Γ en X et Y telle que $XY = a$.

2 Homothéties

2.1 Définitions et propriétés de base :

Nous allons maintenant étudier une classe de transformations plus large et plus utile que celles que nous connaissons déjà : les homothéties. Les homothéties sont des "agrandissements" ou des "réductions". Avant de les définir, commençons par un complément sur les vecteurs :

Définition 2.1. Soient k un nombre réel et \vec{v} un vecteur :

- Si $k \geq 0$, on note $k\vec{v}$ le vecteur de même direction et de même sens que \vec{v} et dont la longueur est k fois celle de \vec{v} .
- Si $k \leq 0$, on note $k\vec{v}$ le vecteur de même direction que \vec{v} , de sens opposé à celui de \vec{v} et dont la longueur est $-k$ fois celle de \vec{v} .

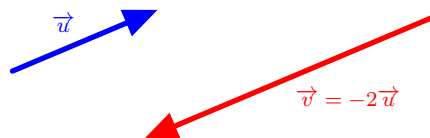


FIGURE 3 – Exemple de multiplication d'un vecteur par -2 .

Définition 2.2. Soient O un point du plan et k un nombre réel. L'homothétie de centre O et de rapport k est la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$.

Exemple 2.3. Les symétries centrales sont des homothéties de rapport -1 .

Les homothéties conservent aussi de nombreuses propriétés :

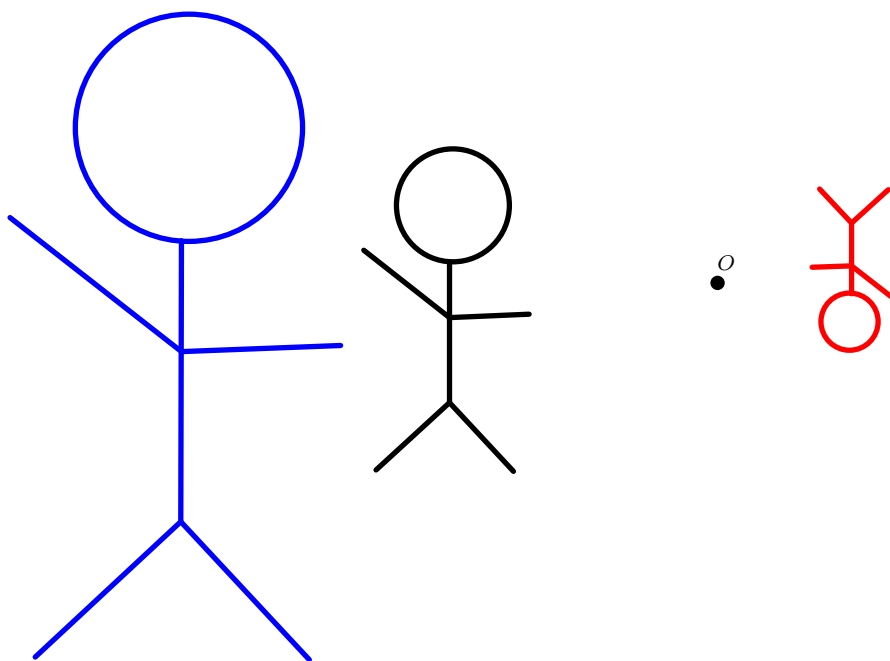


FIGURE 4 – Une figure et son image par les homothéties de centre O et de rapport 2 (en bleu) et $-\frac{1}{2}$ (en rouge).

- Proposition 2.4.**
- a) Les homothéties conservent les droites, les cercles, les angles orientés.
 - b) L'image d'une droite (d) par une homothétie est parallèle à (d) .
 - c) Une homothétie de rapport k multiplie toutes les longueurs par $|k|$. Elle conserve donc les rapports de longueurs.

Démonstration. b) Soient A et B deux points et A' et B' leurs images : on a $\frac{OA'}{OA} = |k| = \frac{OB'}{OB}$ donc d'après le théorème de Thalès $(A'B') \parallel (AB)$.

c) D'après b) et le théorème de Thalès, on a $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA} = |k|$.

a) Soit C un troisième point et C' son image : $(A'B') \parallel (AB)$ et $(B'C') \parallel (BC)$ donc on a $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$ donc l'homothétie conserve les angles, donc elle conserve toutes les propriétés qui peuvent s'exprimer avec des angles, comme l'alignement ou la cocyclicité.

□

Un intérêt important des transformations géométriques est la possibilité de les composer :

Définition 2.5. Soient t_1 et t_2 deux transformations : on note $t_2 \circ t_1$ la transformation qui à tout point M associe $t_2(t_1(M))$. Cela revient à appliquer t_1 puis t_2 .

Théorème 2.6. Soient h_1 et h_2 deux homothéties de centres O_1 et O_2 et de rapports k_1 et k_2 :

- a) Si $k_1 k_2 \neq 1$, alors $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport $k_1 k_2$ dont le centre est sur $(O_1 O_2)$.

b) Si $k_1 k_2 = 1$, alors $h_2 \circ h_1$ est une translation de vecteur parallèle à $(O_1 O_2)$.

Démonstration. a) On admet que la composée est une homothétie, cela peut se prouver soit avec du calcul vectoriel, soit comme cas particulier des résultats sur la composée de deux similitudes qu'on verra plus loin dans le cours. Comme h_1 multiplie les longueurs (algébriques) par k_1 et h_2 par k_2 , la composée les multiplie par $k_1 k_2$ donc son rapport est $k_1 k_2$. De plus, le centre de $h_2 \circ h_1$ est aligné avec O_1 et $h_2 \circ h_1(O_1) = h_2(O_1)$. Ce dernier point doit être sur $(O_1 O_2)$ donc le centre de $h_2 \circ h_1$ aussi.

b) On admet que la composée est une translation et on note $O_3 = h_2 \circ h_1(O_1) = h_2(O_1)$: O_3 est aligné avec O_1 et O_2 donc $\overrightarrow{O_1 O_3}$ est parallèle à $(O_1 O_2)$, mais c'est justement le vecteur de notre translation. □

Il est également utile de savoir quand on peut introduire une homothétie qui envoie un certain objet sur un autre :

Proposition 2.7. a) Soient A, B, A' et B' quatre points : il existe une homothétie ou translation qui envoie A sur A' et B sur B' si et seulement si $(AB) \parallel (A'B')$. De plus, dans ce cas, une telle transformation est unique.

b) Soient O, A et A' alignés : il existe une unique homothétie de centre O qui envoie A sur A' .

Démonstration. a) Si (AB) et $(A'B')$ ne sont pas parallèles, une telle homothétie ne peut pas exister.

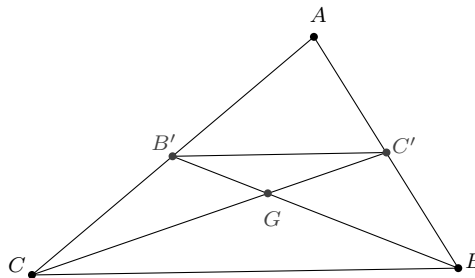
Si elles le sont, le centre doit être sur (AA') et sur (BB') : soit ces droites sont parallèles, et alors $AA'B'B$ est un parallélogramme et notre transformation est la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$, soit elles se coupent en X avec $\frac{XA'}{XA} = \frac{XB'}{XB}$ par Thalès, donc notre homothétie est celle de centre X et de rapport $\frac{XA'}{XA}$.

b) Il s'agit de l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{OA'}{OA}$ (en longueurs algébriques). □

2.2 Quelques applications classiques :

Commençons par ce résultat que vous connaissez certainement déjà :

Théorème 2.8. Les trois médianes d'un triangle sont concourantes. De plus, le point d'intersection se trouve aux deux tiers des médianes.



Démonstration.

On note A' , B' et C' les milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. On sait que $(B'C') \parallel (BC)$, donc il existe une homothétie h qui envoie B sur B' et C sur C' . De plus, le centre de h est $(BB') \cap (CC')$. On le note G . Ce point G est sur le segment $[BB']$ donc h est de rapport négatif, et $B'C' = \frac{1}{2}BC$ donc h est de rapport $-\frac{1}{2}$, donc $GB' = \frac{1}{2}GB$ donc $BG = \frac{2}{3}BB'$, et de même $CG = \frac{2}{3}CC'$.

Le point aux deux tiers de $[BB']$ est donc le même que le point aux deux tiers de $[CC']$. En faisant le même raisonnement sur A et B , on montre que ce point est aussi aux deux tiers de $[AA']$.

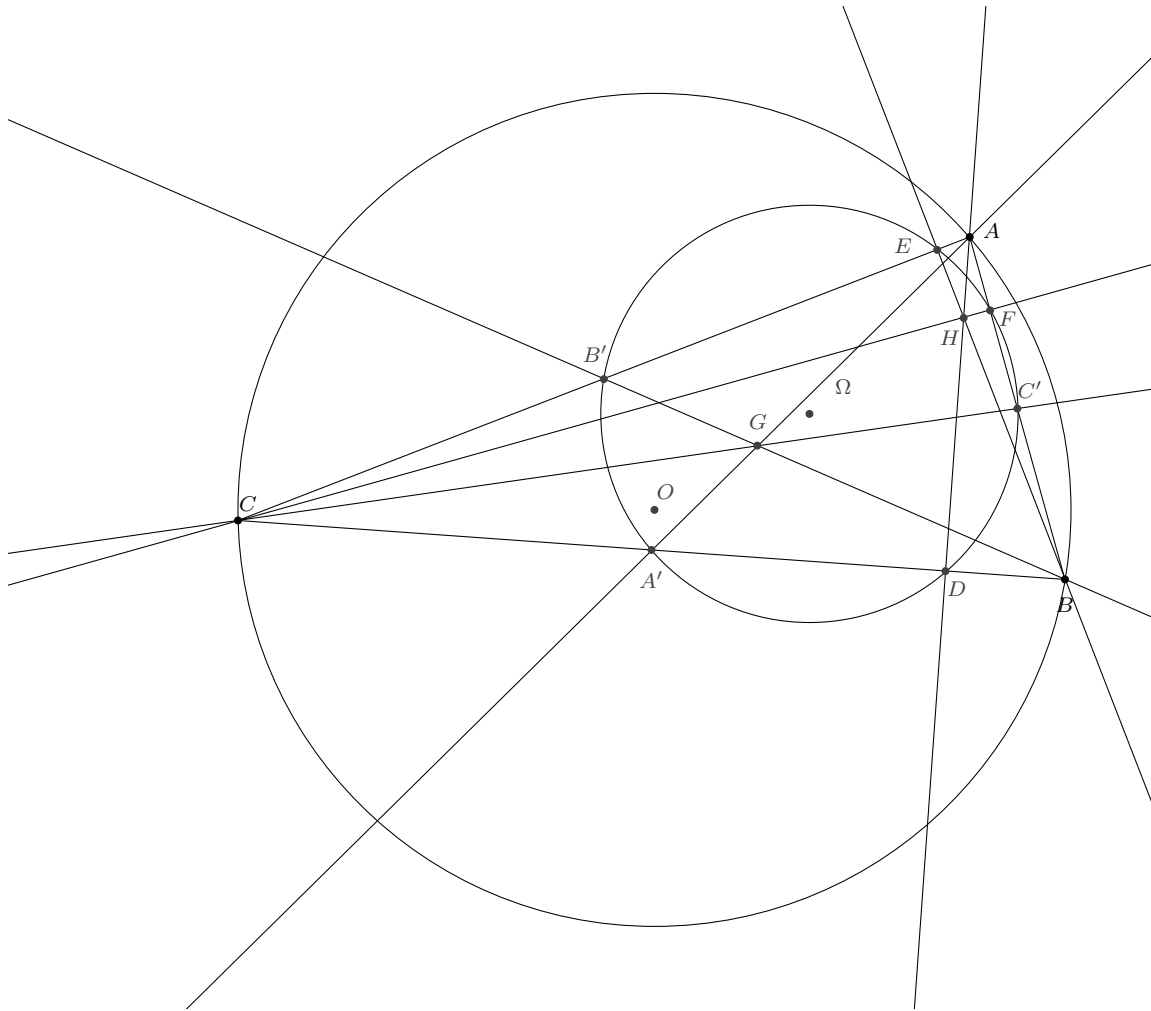
Remarquons que l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie donc chaque sommet de ABC sur le milieu du côté opposé. \square

Passons à la droite et au cercle d'Euler, deux autres applications classiques des homothéties :

Théorème 2.9. (Droite et cercle d'Euler)

Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit, G son centre de gravité (i.e le point d'intersection de ses médianes) et H son orthocentre (i.e le point d'intersection de ses hauteurs). On note A' , B' et C' les milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ et D , E , F les pieds des hauteurs issues de A , B et C . Alors :

- a) O , G et H sont alignés.
- b) Les points A' , B' , C' , D , E et F sont cocycliques.



Démonstration. a) Soit h l'homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$: on a $h(ABC) = A'B'C'$, donc h envoie H sur l'orthocentre de $A'B'C'$. Or, O est l'orthocentre de $A'B'C'$. En effet, (OA') est perpendiculaire à (BC) , donc à $(B'C')$ par le théorème de la droite des milieux, donc c'est la hauteur issue de A' dans $A'B'C'$.
 O, G et H sont donc alignés et, plus précisément, $\vec{GO} = -\frac{1}{2}\vec{GH}$.

b) Soit Ω le centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$: on sait que $\Omega = h(O)$ donc $G\Omega = \frac{1}{2}GO$ donc $O\Omega = \frac{3}{2}OG = \frac{1}{2}OH$, donc Ω est donc le milieu de $[OH]$.
Le point Ω est donc équidistant des droites (AD) et (OA') , donc $\Omega A' = \Omega D$. Pour montrer cela proprement, on peut par exemple introduire X le projeté orthogonal de Ω sur (BC) : par Thalès, X est le milieu de $[A'D]$ donc (ΩX) est la médiatrice de $[A'D]$.
On en déduit que D est sur le cercle circonscrit à $A'B'C'$, et de même pour E et F .

□

2.3 Homothéties et cercles :

Les homothéties font également très bon ménage avec les cercles, ce qui peut être utile dès que de nombreuses tangentes apparaissent dans un problème.

Proposition 2.10. (i) Soient \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 deux cercles. Il existe exactement deux homothéties

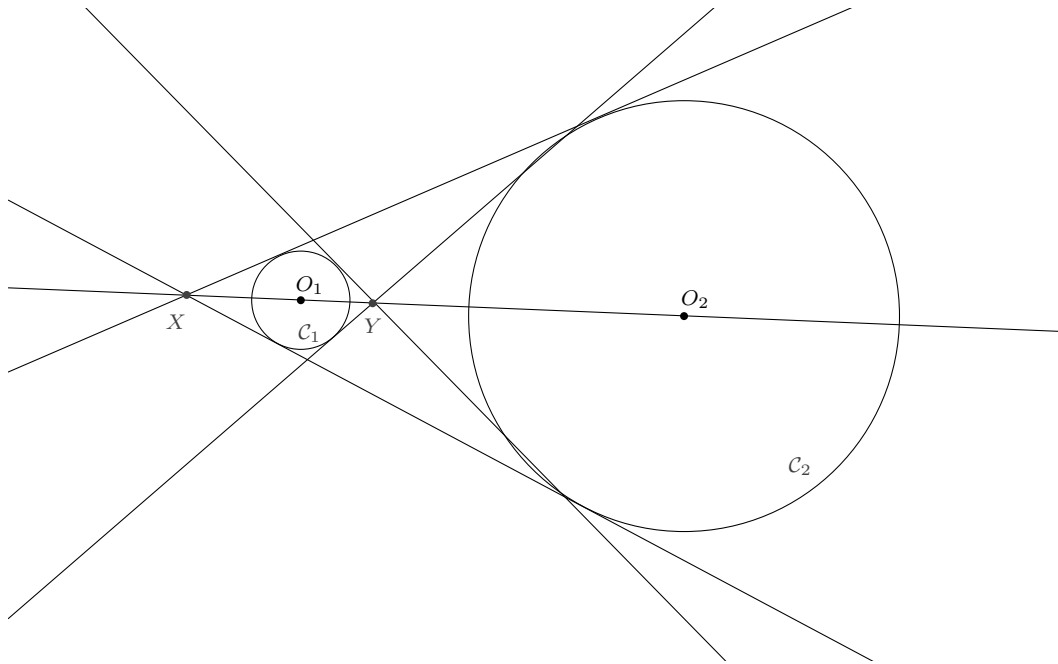


FIGURE 5 – Deux cercles \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 . X est le centre de l’homothétie positive qui envoie \mathcal{C}_1 sur \mathcal{C}_2 et Y le centre de l’homothétie négative.

qui envoie \mathcal{C}_1 sur \mathcal{C}_2 : une de rapport positif et une de rapport négatif. Si les deux cercles sont de même rayon, la première est une translation.

- (ii) Si aucun des deux cercles n’est à l’intérieur de l’autre, le centre de l’homothétie positive est le point d’intersection des tangentes communes extérieures à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .
- (iii) Si les deux cercles ne s’intersectent pas, le centre de l’homothétie positive est le point d’intersection des tangentes communes extérieures à \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 .

Remarque 2.11. Les points (ii) et (iii) ont des cas dégénérés intéressants : si les deux cercles sont tangents extérieurement, alors le point de tangence est le centre de l’homothétie négative qui envoie l’un sur l’autre. Si ils sont tangents intérieurement, le point de tangence est le centre de l’homothétie positive.

Démonstration. (i) Admis

- (ii) Soit h l’homothétie positive qui envoie \mathcal{C}_1 sur \mathcal{C}_2 et (t) une des deux tangentes communes : $h(t)$ est parallèle à t et tangente à \mathcal{C}_2 . Comme on veut une homothétie positive, elle doit de plus être du même côté de \mathcal{C}_2 que (t) de \mathcal{C}_1 , donc $h(t) = (t)$ donc le centre de h doit être sur t . Il en est de même pour l’autre tangente commune extérieure, donc le centre est l’intersection des tangentes communes extérieures.

- (iii) Similaire à (ii).

□

En combinant cette proposition avec le fait que le centre d’une composée d’homothéties est aligné avec les centres des deux homothéties (voir théorème 2.6), on obtient :

Théorème 2.12. (Théorème de Monge) Soient $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ et \mathcal{C}_3 trois cercles tels qu’aucun ne soit entièrement à l’intérieur d’un autre. On note X le point d’intersection des tangentes communes

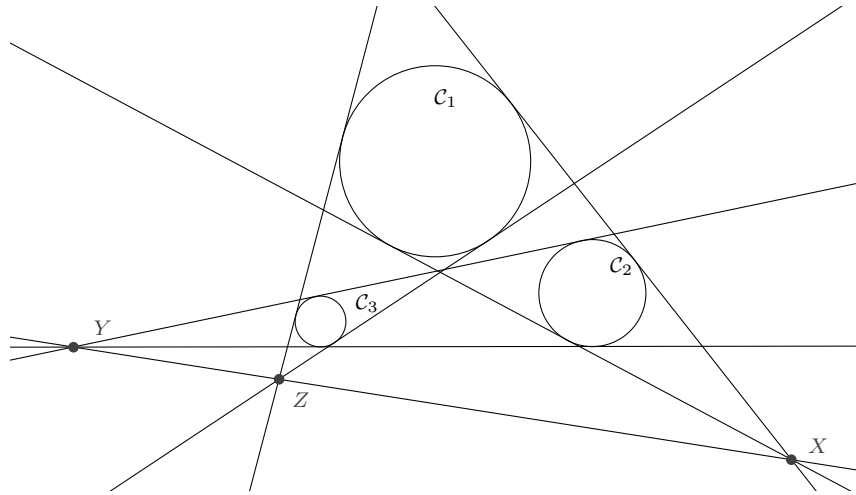


FIGURE 6 – Le théorème de Monge.

extérieures à C_1 et C_2 , Y celui de C_2 et C_3 ainsi que Z celui de C_3 et C_1 .
Alors X , Y et Z sont alignés.

Démonstration. X est le centre de l'homothétie positive h_1 qui envoie C_1 sur C_2 et Y celui de l'homothétie positive h_2 qui envoie C_2 sur C_3 . De même Z est le centre de l'homothétie positive h_3 qui envoie C_1 sur C_3 . Mais d'après la proposition précédente, il n'existe qu'une telle homothétie donc $h_3 = h_2 \circ h_1$, donc les centres des trois homothéties sont alignés. \square

Remarque 2.13. Ce théorème reste vrai si on remplace exactement deux fois les tangentes communes extérieures par les tangentes communes intérieures. La preuve est à peu près la même mais avec cette fois une homothétie négative qui est la composée d'une négative et d'une positive.

2.4 Chasse aux tangentes

Nous terminons cette section par une technique qui n'est pas directement reliée aux homothéties mais qui intervient souvent dans le même type de problèmes : la chasse aux tangentes, qui "remplace" la chasse aux angles dans certains problèmes.

La chasse aux angles, que vous connaissez déjà bien, consiste à exploiter le fait que des points soient sur des cercles pour obtenir des égalités d'angles et trouver d'autres points cocycliques. La chasse aux tangentes consiste à exploiter le fait que des droites soient tangentes à des cercles pour obtenir des égalités de longueur et trouver d'autres droites tangentes. L'idée est d'utiliser de manière répétée le résultat facile suivant :

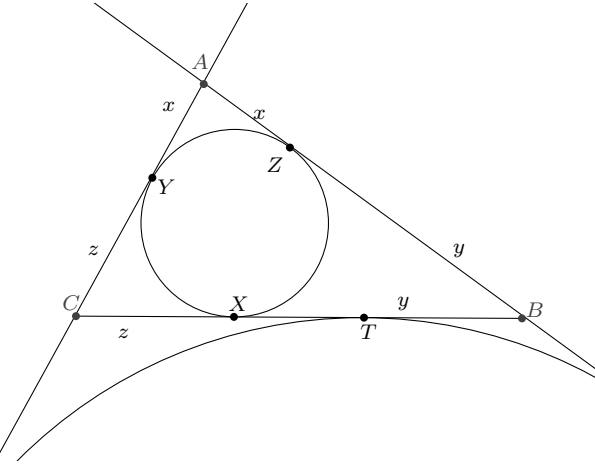
Lemme 2.14. Soit C un cercle et A un point extérieur à C . Les tangentes à C passant par A touchent C en X et Y .

Alors $AX = AY$.

Un premier résultat de chasse aux tangentes est le suivant, que vous connaissez peut-être déjà.

Proposition 2.15. Soit ABC un triangle. On pose $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. Le cercle inscrit à ABC touche $[BC]$ en X . Le cercle A -exinscrit à ABC touche $[BC]$ en T (rappelons que le cercle A -exinscrit est le cercle tangent au côté $[BC]$ et aux demi-droites $[AB)$ et $[AC)$ au-delà de B et C).

Alors $BX = CT = \frac{a+c-b}{2}$ et $CX = BT = \frac{a+b-c}{2}$.



Démonstration.

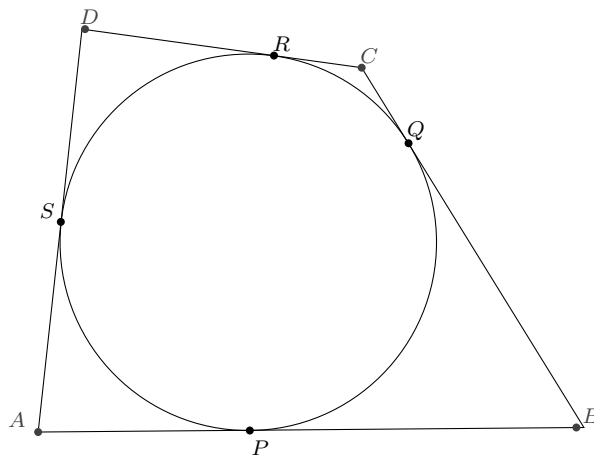
Notons Y et Z les points où le cercle inscrit touche $[CA]$ et $[AB]$: on pose $x = AY = AZ$, $y = BZ = BX$ et $z = CX = CY$. On a alors $y + z = a$, $z + x = b$ et $x + y = c$ d'où $\frac{a+c-b}{2} = \frac{y+z+x+y-z-x}{2} = y$ et, de même, $\frac{a+b-c}{2} = z$.

La preuve pour le cercle exinscrit est similaire (il faut introduire les points où il touche $[AB)$ et $[AC)$) et est laissée en exercice. □

Un autre résultat classique issu de la chasse aux tangentes est le suivant.

Proposition 2.16. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Alors $ABCD$ admet un cercle inscrit si et seulement si

$$AB + CD = BC + AD.$$



Démonstration.

Commençons par le sens direct : si $ABCD$ admet un cercle inscrit, on note P, Q, R et S les points de tangence comme sur la figure et on effectue une chasse aux tangentes :

$$AB + CD = AP + BP + CR + DR = AS + BQ + CQ + DS = AD + BC$$

Le sens inverse est moins évident : si $AB + CD = BC + AD$, soit ω un cercle tangent à $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$ (son centre sera l'intersection des bissectrices de \widehat{ABC} et \widehat{BAD}). Soit D' l'intersection de (AD) avec la deuxième tangente à ω passant par C : le quadrilatère $ABCD'$ est convexe et admet un cercle inscrit donc $AB + CD' = AD' + BC$ donc $AD' - CD' = AB - BC = AD - CD$ donc $AD' - AD = CD' - CD$. Si par exemple $AD' \geq AD$ alors comme A, D et D' sont alignés, on a alors $DD' = AD' - AD = CD' - CD$ donc $CD' = CD + DD'$ donc C, D et D' sont alignés, donc D' est sur (AD) et (CD) donc $D' = D$. Le cas $AD' \leq AD$ se traite similairement. \square

Remarque 2.17. La ressemblance est frappante entre ce théorème et la caractérisation " $ABCD$ admet un cercle circonscrit si et seulement si $\widehat{A} + \widehat{C} = \widehat{B} + \widehat{D}$ ".

2.5 Conseils pour les exercices

- Si il y a deux droites parallèles, il peut y avoir une homothétie intéressante qui envoie l'une sur l'autre.
- Si vous repérez plusieurs homothéties intéressantes, essayez de les composer !
- Dès que vous repérez deux tangentes communes à deux cercles, intéressez-vous à une homothétie qui envoie un cercle sur l'autre : vous connaissez son centre !
- Si il y a de nombreuses tangentes communes sur la figure, utilisez le théorème de Monge ! N'hésitez pas à introduire des cercles supplémentaires (cercles inscrits par exemple) pour pouvoir l'utiliser.
- Si il y a beaucoup de tangentes, pensez à la chasse aux tangentes !
- Si vous avez bien assimilé le cours, il peut être utile de retenir les exercices 7, 9 et 10 qui peuvent se retrouver dans des problèmes plus compliqués.

2.6 Exercices

Attention : les derniers exercices sont très difficiles !

Exercice 4 Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que (AB) soit parallèle à $(A'B')$, (BC) à $(B'C')$ et (CA) à $(C'A')$.

Montrer que les droites (AA') , (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.

Exercice 5 Soit ABC un triangle avec trois angles aigus.

Construire un carré qui a deux sommets sur $[BC]$, un sur $[AB]$ et un sur $[AC]$.

Exercice 6 Soient $ABCD$ un trapèze avec (AB) parallèle à (CD) , M le milieu de $[AB]$ et P un point de (BC) . On pose $X = (PD) \cap (AB)$, $Q = (PM) \cap (AC)$ et $Y = (PQ) \cap (AB)$.

Montrer que M est le milieu de $[XY]$.

Exercice 7 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que les cercles inscrits à ABC et ADC soient tangents.

Montrer que $ABCD$ admet un cercle inscrit.

Exercice 8 Deux cercles Γ_1 et Γ_2 sont tangents extérieurement en A , et une tangente commune extérieure est tangente à Γ_1 en B et à Γ_2 en C . Soit D le point diamétralement opposé à B dans Γ_1 .

Montrer que A, C et D sont alignés.

Exercice 9 Soit ABC un triangle. On note Γ son cercle inscrit et Γ_A son cercle A -exinscrit. Le cercle Γ touche $[BC]$ en I , et Γ_A touche $[BC]$ en J . Soit K le point de Γ diamétralement opposé à I .

Montrer que A, J et K sont alignés.

Exercice 10 Soient ω_1 et ω_2 deux cercles tangents en un point A avec ω_2 à l'intérieur de ω_1 . Soit $B \in \omega_2$ différent de A . La tangente à ω_2 en B recoupe ω_1 en X et Y .

Montrer que $\widehat{BAX} = \widehat{BAY}$.

Exercice 11 Soient ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. Soit Γ_A un cercle tangent à (AB) et (AC) , et tangent intérieurement à Γ en un point A' . On définit de manière similaire Γ_B, B', Γ_C et C' .

Montrer que les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes.

Exercice 12 Soient ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit, D le point de contact du cercle inscrit avec $[BC]$, J le centre du cercle A -exinscrit, E le pied de la hauteur issue de A et K le projeté orthogonal de I sur cette hauteur.

Montrer que (DK) et (EJ) sont parallèles.

Exercice 13 Soit ABC un triangle, D le point de contact du cercle inscrit avec $[BC]$, I le centre du cercle A -exinscrit et M le milieu de la hauteur issue de A .

Montrer que M, D et I sont alignés.

Exercice 14 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On suppose que les cercles inscrits aux triangles ABC, BCD, CDA et DAB ont un point commun.

Montrer que $ABCD$ est un losange.

Exercice 15 Soient Γ un cercle et Γ_1, Γ_2 deux cercles tangents intérieurement à Γ en A et B . On note (d_1) et (d_2) les tangentes à Γ_2 passant par A , et (d_3) et (d_4) les tangentes à Γ_1 passant par B .

Montrer que ces quatre droites forment un quadrilatère circonscriptible.

Exercice 16 Soit $ABCD$ un quadrilatère circonscriptible et ω son cercle inscrit, de centre O . On note X l'intersection de (AD) et (BC) . Le cercle ω_1 est tangent aux prolongements de $[AD]$ et $[BC]$ et au côté $[AB]$ en K . Le cercle ω_2 est tangent aux prolongements de $[AD]$ et $[BC]$ et au côté $[CD]$ en L . On suppose que X, K et L sont alignés.

Montrer que O , le milieu de $[AB]$ et le milieu de $[CD]$ sont alignés.

Exercice 17 (Shortlist 2007) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et P sur $[AB]$. On note ω, ω_1 et ω_2 les cercles inscrits à PCD, PAD et PBC . On note I le centre de ω . On suppose que ω_1 et ω_2 sont tangents à ω en K et L . On pose enfin $E = (AC) \cap (BD)$ et $F = (AK) \cap (BL)$.

Montrer que E, I et F sont alignés.

Exercice 18 (IMO 2008) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe avec $BA \neq BC$. On note ω_1 et ω_2 les cercles inscrits à ABC et ADC . On suppose qu'il existe Ω tangent à (BA) au-delà de A , à (BC) au-delà de C , à (AD) et à (CD) .

Montrer que les tangentes communes extérieures à ω_1 et ω_2 se coupent sur Ω .

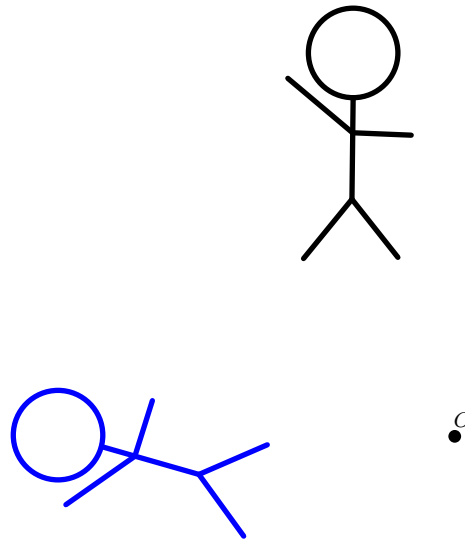


FIGURE 7 – Une figure et son image par la rotation de centre O et d'angle 75° .

3 Rotations

3.1 Cours

Définition 3.1. Soient O un point du plan et θ un angle. La *rotation* de centre O et d'angle (orienté) θ est la transformation qui à tout point M associe le point M' tel que $OM' = OM$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$.

Exemple 3.2. Les symétries centrales sont des rotations d'angle π .

Les rotations conservent toutes les propriétés géométriques intéressantes, y compris les longueurs :

Proposition 3.3.

- Les rotations conservent les longueurs.
- Les rotations conservent les droites, les cercles, les angles.
- L'image d'une droite (d) par une rotation d'angle θ fait un angle θ avec (d).

Démonstration.

a) Si une rotation de centre O envoie A sur A' et B sur B' , alors $OA = OA'$, $OB = OB'$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OB'})$ donc les triangles OAB et $OA'B'$ sont isométriques et $A'B' = AB$.

b) Comme une rotation conserve les longueurs, un triangle et son image sont isométriques donc ont les mêmes angles, et la rotation conserve les angles. Elle conserve donc toutes les propriétés pouvant s'exprimer avec des angles, comme l'alignement et la cocyclicité.

c) Soient A' et B' les images de A et B par une rotation de centre O . On utilise la relation de Chasles pour les angles orientés :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}) + (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{A'O}) - (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'O})$$

Comme les triangles OAB et $OA'B'$ sont directement isométriques, le premier et le dernier terme se simplifient tandis que le second vaut θ . \square

De même que les homothéties, il est intéressant de composer les rotations :

Proposition 3.4. Soient r_1 et r_2 deux rotations d'angles θ_1 et θ_2 :

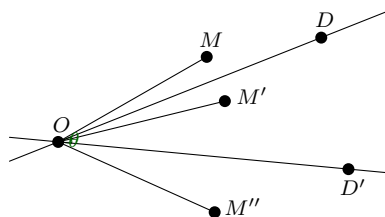
- a) Si $\theta_1 + \theta_2$ est un multiple de 360° , alors $r_2 \circ r_1$ est une translation.
- b) Sinon, $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

Remarque 3.5. Il est parfois possible dans les exercices d'identifier le centre d'une composée de rotation, mais on n'a pas de résultat général analogue au théorème de Monge pour les rotations.

Démonstration. On admet que la composée est une rotation ou une translation. Pour l'angle de la composée, r_1 fait tourner les droites d'un angle θ_1 et r_2 de θ_2 , donc la composée les fait tourner de $\theta_1 + \theta_2$. \square

Notons également que les rotations apparaissent comme les composées de symétries axiales :

Proposition 3.6. Soient (d) et (d') deux droites qui se coupent en un point O et y font un angle θ . Soient s la symétrie axiale d'axe (d) et s' celle d'axe (d') . Alors $s' \circ s$ est la rotation de centre O et d'angle 2θ .



Démonstration.

Soit M un point du plan, $M' = s(M)$ et $M'' = s'(M')$: la droite (d) est la médiatrice de $[MM']$ donc $OM' = OM$ et (d') celle de $[M'M'']$ donc $OM'' = OM' = OM$. De plus, en prenant D sur (d) et D' sur (d') comme sur la figure, on a (il faudrait en toute rigueur utiliser des angles orientés)

$$\widehat{MOM''} = \widehat{MOD} + \widehat{DOM'} + \widehat{M'OD'} + \widehat{D'OM''} = 2\widehat{DOM'} + 2\widehat{M'OD'} = 2\widehat{DOD'} = 2\theta.$$

\square

Comme pour les homothéties, il peut être utile d'introduire une rotation qui envoie un objet sur un autre :

- Proposition 3.7.** a) Soient A, B, A' et B' quatre points : il existe une homothétie ou translation qui envoie A sur A' et B sur B' si et seulement si $AB = A'B'$. De plus, dans ce cas, une telle transformation est unique.
- b) Soient O, A et A' avec $OA = OA'$: il existe une unique rotation de centre O qui envoie A sur A' .

Démonstration. a) Si $ABB'A'$ est un parallélogramme, la transformation doit être une translation, qui fonctionne bien. Sinon, (AA') et (BB') ne sont pas parallèles donc leurs médiatrices non plus, donc il existe O tel que $OA = OA'$ et $OB = OB'$. Les triangles OAB et $OA'B'$ sont alors isométriques donc $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$, donc $\widehat{AOA'} = \widehat{BOB'} = \theta$, et la rotation de centre O et d'angle θ fonctionne.

- b) Le centre est déjà fixé, et l'angle de la rotation doit être $\widehat{AOA'}$. □

3.2 Conseils pour les exercices

- Les triangles équilatéraux ou isocèles rectangles dissimulent souvent (assez mal) des rotations.
- Comme pour les homothéties, si vous repérez plusieurs rotations intéressantes, essayez de les composer !

3.3 Exercices

Exercice 19 Soient $(\Delta_1), (\Delta_2)$ et (Δ_3) trois droites parallèles.

Construire un triangle équilatéral ayant un sommet sur chacune des trois droites.

Exercice 20 Soit ABC un triangle équilatéral et M sur son cercle circonscrit, sur l'arc entre B et C ne contenant pas A .

Montrer que $MB + MC = MA$.

Exercice 21 Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe et E, F, G et H tels que ABE, BCF, CDG et DAH soient équilatéraux avec ABE et CDG dirigés vers l'extérieur de $ABCD$ et BCF et DAH dirigés vers l'intérieur. Montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.

Exercice 22 Soit $A_1A_2A_3$ un triangle. On note $A_i = A_{i-3}$ pour tout $i \geq 4$, de sorte que $A_1 = A_4 = A_7 = \dots, A_2 = A_5 = A_8 = \dots$ et $A_3 = A_6 = A_9 = \dots$. Soit $(P_i)_{i \geq 0}$ une suite de points telle que pour tout i , il existe un point Q_i tel que le triangle $Q_iP_iP_{i+1}$ est équilatéral direct et a pour centre A_i .

On suppose que $P_{2014} = P_1$. Montrer que $A_1A_2A_3$ est équilatéral.

Exercice 23 (Point de Fermat) Soit ABC un triangle dont tous les angles sont inférieurs à 120° .

- a) Montrer qu'il existe un unique point F à l'intérieur de ABC tel que $\widehat{AFB} = \widehat{BFC} = \widehat{CFA} = 120^\circ$.

- b) Montrer que pour tout X à l'intérieur de ABC , on a $AX + BX + CX \geq AF + BF + CF$.

Exercice 24 (Théorème de Napoléon) Soient ABC un triangle et A', B' et C' tels que $A'BC, AB'C$ et ABC' soient équilatéraux, extérieurs à ABC . Soient A_1, B_1 et C_1 les centres de ces triangles équilatéraux.

Montrer que $A_1B_1C_1$ est équilatéral.

Exercice 25 Soient ABC et AMN deux triangles directement semblables, tous deux isocèles en A . On note O le centre du cercle circonscrit à ABM .

Montrer que O, C, N et A sont cocycliques si et seulement si ABC est équilatéral.

4 Similitudes directes

On va maintenant s'intéresser à une classe de transformations plus large, qui contient les précédentes. Cette section contient en particulier les preuves de certains résultats admis dans les parties précédentes.

Il est possible de sauter toutes les preuves dans un premier temps si vous n'êtes pas très à l'aise. Dans ce cas, vous pouvez définir directement une similitude directe comme la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre comme dans 4.10, et admettre les théorèmes importants 4.4, 4.8 (dont la preuve reste simple), 4.12 et 4.13.

L'essentiel de cette section est issue du cours donné par Jean-François Martin au stage olympique de Montpellier 2013. Le cours original se trouve dans le photocopié du stage, aux pages 87 à 101, accessible ici :

http://www.animath.fr/IMG/pdf/poly_2013-2.pdf

4.1 Définitions et propriétés de base

Définition 4.1. On appelle *similitude directe* toute transformation (i.e. fonction bijective dans lui-même) du plan qui conserve les angles orientés, c'est-à-dire telle que pour tous points A, B et C , si on note A', B' et C' leurs images, on a $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$. De manière équivalente, une similitude directe envoie les triangles sur des triangles directement semblables.

Exemple 4.2. Les translations, rotations et homothéties sont des similitudes directes. De plus, il est évident que la composée de deux similitudes est une similitude.

Remarques 4.3. — L'équivalence entre conservation des angles orientés et des triangles directement semblables n'est pas immédiatement évidente pour les triangles plats. Toutefois, étant donné trois points A, B et C alignés, pour montrer que le rapport AB/AC est conservé, il suffit de considérer un point P en dehors de la droite et de considérer les triangles ABP et ACP , prouvant que les rapports AB/AP et AP/AC seront conservés. Une astuce du même genre permettra de toujours mettre de côté ce genre de cas résiduels. C'est un bon exercice pour le lecteur pointilleux de remplir les trous...

— Dans la suite, s'il n'y a pas d'ambiguïté, on dira "similitude" pour "similitude directe". Les similitudes indirectes sont évoquées à la fin du cours.

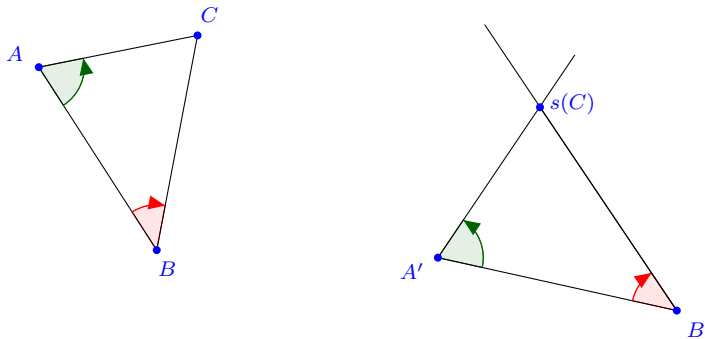
Théorème 4.4. Étant donnés quatre points $A \neq B$ et $A' \neq B'$, il existe une unique similitude s telle que :

$$s : \begin{array}{l} A \mapsto A' \\ B \mapsto B'. \end{array}$$

Démonstration. On pourrait raisonner directement dans l'esprit du théorème 4.11, mais la preuve naturelle a son intérêt.

Unicité :

Montrons que pour tout point C du plan, cette condition fixe l'image de C par s . On suppose $C \notin (AB)$. Par conservation des angles orientés, l'image de C doit être sur la droite formant en B' un angle $(\overrightarrow{B'A}, \overrightarrow{B'C})$ avec le vecteur $\overrightarrow{B'A'}$. De même, elle doit être sur la droite formant en A' un angle $(\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C})$ avec $\overrightarrow{A'B'}$. L'intersection de ces deux droites, uniquement déterminée, est donc le point recherché.



Existence :

On va exhiber une similitude avec cette propriété en composant différentes similitudes classiques (translations, rotations, homothéties...) de manière à s'approcher de plus en plus du but souhaité.

Dans un premier temps, afin d'envoyer déjà A sur A' , on utilise la translation t de vecteur $\overrightarrow{AA'}$:

$$t : \begin{aligned} A &\longmapsto A' \\ B &\longmapsto B'' \end{aligned}$$

On utilise ensuite la rotation ρ de centre A' et d'angle $\widehat{B''A'B'}$:

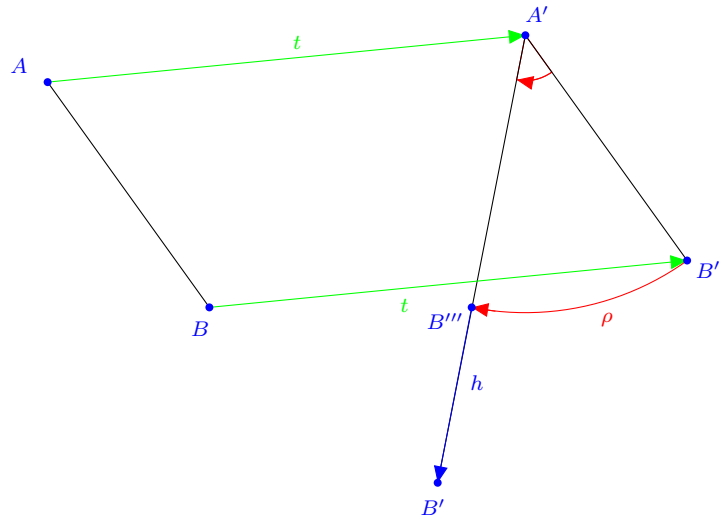
$$\rho : \begin{aligned} A' &\longmapsto A' \\ B'' &\longmapsto B''' \end{aligned}$$

Comme par construction $B''' \in (A'B')$, on peut finalement utiliser l'homothétie h de centre A' et de rapport $A'B'/A'B'''$:

$$h : \begin{array}{l} A' \mapsto A' \\ B''' \mapsto B' \end{array}$$

□

Finalement, $s = h \circ \rho \circ t$ convient par construction.



Remarquons que les homothéties ou les rotations peuvent également être définies comme les transformations conservant certaines grandeurs ou propriétés. Cependant, la définition usuelle avec le centre est plus explicite et plus utilisable dans les exercices. On va donc s'intéresser à la notion de centre chez les similitudes.

4.2 Centre d'une similitude

Définition 4.5. On appelle centre d'une similitude un point fixe de cette similitude.

Exemple 4.6. Une translation de vecteur non nul n'a aucun centre, une rotation ou une homothétie en a un et la transformation identité admet tous les points du plan comme centre.

Remarques 4.7. — L'unicité du théorème précédent appliquée au cas $A = A'$ et $B = B'$ montre que, hormis l'identité, toute similitude a au plus un point fixe.

— Il n'est pas évident a priori que toute similitude a un centre. Cela découle du théorème suivant.

Le théorème suivant, essentiel, montre que l'on connaît bien le centre d'une similitude :

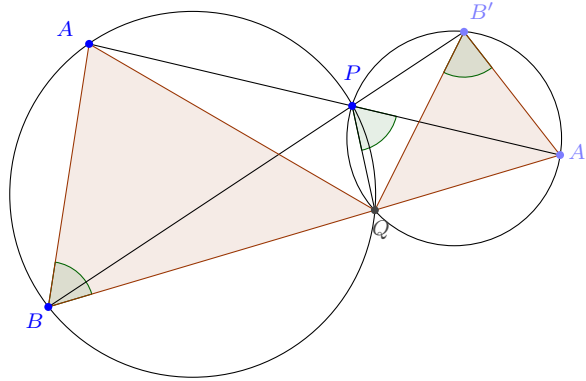
Théorème 4.8. Soient A, B, A' et B' supposés en position générale (un couple ne peut être obtenu à partir de l'autre par translation ou homothétie). Soit P le point d'intersection de (AA') et (BB') . Soit \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 les cercles circonscrits à PAB et $PA'B'$ et Q leur deuxième point d'intersection.

Alors, Q est le centre de la similitude envoyant A et B sur A' et B' .

Démonstration. Soit s l'unique similitude envoyant A et B sur A' et B' . On cherche à montrer que s envoie Q sur lui-même. D'après la démonstration de l'unicité de cette similitude, il suffit de vérifier que ABQ et $A'B'Q$ sont directement semblables. On procède par chasse aux angles. Il suffit de montrer que $\widehat{ABQ} = \widehat{A'B'Q}$, l'égalité $\widehat{BAQ} = \widehat{B'A'Q}$ se montrant de manière similaire :

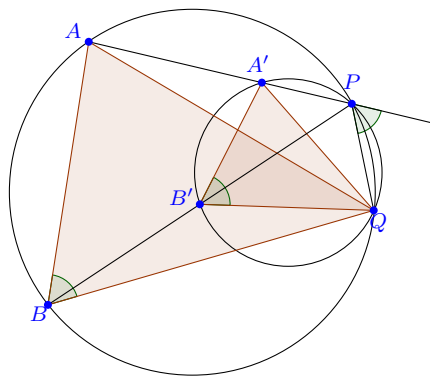
$$\widehat{ABQ} = 180^\circ - \widehat{APQ} = \widehat{A'PQ} = \widehat{A'B'Q}.$$

□



Remarques 4.9. — Si les points ne sont pas en position générale, la construction marche toujours en considérant que deux droites parallèles se coupent "à l'infini" et que le cercle passant par A , B et l'infini n'est autre que la droite (AB) . On pourra vérifier que Q est à l'infini ssi $ABB'A'$ est un parallélogramme, ce qui correspond au cas où s est une translation.

— Bien sûr, il faudrait écrire cette démonstration en termes d'angles orientés. Ce que le lecteur pointilleux est invité à faire. Il est d'ailleurs important de se familiariser avec les deux configurations :



On remarque de plus en utilisant les triangles semblables de la démonstration précédente que la composée d'une rotation d'angle $\widehat{AQA'} = \widehat{BQB'}$ et d'une homothétie de rapport $QA'/QA = QB'/QB$, toutes deux de centre Q , envoie A sur A' et B sur B' .

Définition 4.10. Une similitude directe est dite *centrée* si elle est la composée d'une rotation et d'une homothétie de même centre.

Soit donc s une similitude directe et Q son centre : on a obtenu une similitude centrée s' qui, comme s , envoie A sur A' et B sur B' . Grâce à l'unicité dans le théorème 4.4 on a donc $s = s'$ d'où le théorème important suivant :

Théorème 4.11. Toute similitude directe soit est une translation soit est centrée.

Ainsi, les similitudes qui ne sont pas des translations sont décrites par un centre, un rapport et un angle.

A ce stade, on peut se demander pourquoi on n'a pas commencé le cours en donnant la définition 4.10, ce qui nous aurait épargné le besoin de prouver le théorème 4.11. Un avantage de la définition 4.1 est qu'elle rend trivial le fait que la composée de deux similitudes directes est une similitude directe, ce qui n'est pas évident avec 4.10. On obtient ainsi le théorème suivant :

Théorème 4.12. Soient s_1 et s_2 deux similitudes directes de rapports k_1 et k_2 , et d'angles θ_1 et θ_2 . Alors $s_2 \circ s_1$ est une similitude directe de rapport $k_1 k_2$ et d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

Remarquons que les propositions 2.6 et 3.4 en sont des cas particuliers (le cas $\theta_1 = \theta_2 = 0$ pour la première, le cas $k_1 = k_2 = 1$ pour la seconde). On a donc finalement prouvé les parties de ces deux théorèmes qu'on avait admis.

4.3 Deux similitudes pour le prix d'une

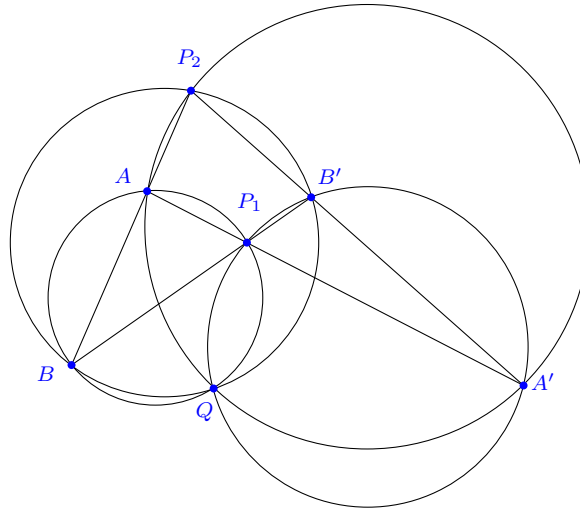
Reprenons la figure du théorème 4.8 : grâce aux mêmes triangles semblables on obtient que la similitude directe de centre Q , d'angle $\widehat{AQB} = \widehat{A'QB'}$ et de rapport $QB/QA = QB'/QA'$ envoie A sur B et A' sur B' . En laissant au lecteur le cas particulier des homothéties, on obtient le théorème important suivant.

Théorème 4.13. Si une similitude directe envoie A sur A' et B sur B' , alors la similitude envoyant A sur B et A' sur B' a le même centre.

En appliquant le théorème 4.8 aux deux similitudes précédentes, on obtient le résultat bien connu suivant, qui (pour l'intersection des cercles) se démontre également par chasse aux angles (exercice!) :

Théorème 4.14. Soit A, B, A' et B' en position générale. Soit $P_1 = (AA') \cap (BB')$ et $P_2 = (AB) \cap (A'B')$. Alors les cercles circonscrits à $P_1AB, P_1A'B', P_2AA'$ et P_2BB' sont concourants en un point Q , appelé point de Miquel du quadrilatère complet $AA'BB'$.

Il est le centre de la similitude directe envoyant A sur A' et B sur B' ainsi que de celle envoyant A sur B et A' sur B' .



Remarque 4.15. On considérera essentiellement ce point comme centre des similitudes directes précédentes. Mais il est également d'une importance primordiale en géométrie projective unidimensionnelle complexe en tant que centre de l'involution échangeant les 6 sommets du quadrilatère complet (pour comprendre la phrase précédente ... allez au club de mathématiques discrètes de Lyon!).

Remarque 4.16. Il peut souvent être intéressant de regarder les similitudes d'un point de vue complexe : il s'agit en fait juste des fonctions affines.

4.4 Similitudes indirectes

Nous terminons ce cours par quelques mots sur les similitudes indirectes.

Définition 4.17. Une similitude indirecte est une transformation du plan qui envoie chaque angle orienté sur son opposé.

Exemple 4.18. Les symétries axiales sont des similitudes indirectes. La composée d'une symétrie axiale avec une similitude directe est une similitude indirecte.

Les similitudes indirectes conservent de nombreuses propriétés : rapports de longueur, angles non orientés, alignement, cocyclicité, parallélisme, orthogonalité... Elles sont cependant moins intéressantes que les similitudes directes car beaucoup n'admettent pas de centre (considérer par exemple la composée d'une symétrie axiale et d'une translation parallèle à son axe). Les puissants théorèmes 4.8 et 4.13 n'ont donc pas d'analogue pour les similitudes indirectes.

4.5 Conseils pour les exercices :

Voici quelques conseils généraux qui peuvent servir dans les exercices qui suivent et dans bien d'autres :

- Les exercices où un point varie et où on cherche à déterminer le lieu d'un autre point ou bien à montrer qu'un autre point reste fixe font souvent appel à des transformations.
- N'oubliez pas la chasse aux angles, qui permet souvent de "démarrer" un exercice, par exemple en trouvant deux triangles semblables, ou de le conclure une fois qu'on a trouvé de nombreux cercles.
- Quand vous trouvez deux triangles semblables (éventuellement plats), intéressez-vous à la similitude qui envoie l'un sur l'autre : existe-t-il d'autres points dont on connaît bien l'image ? Si la similitude est directe, peut-on trouver son centre ? Si le centre est bien connu, le théorème 4.8 donne des points cocycliques !
- L'apparition des figures du théorème 4.8 doit donner envie d'introduire des similitudes !
- Quand cette figure apparaît, n'oubliez pas que vous avez en fait trouvé deux similitudes directes intéressantes de même centre : celle qui envoie A sur A' et B sur B' , et celle qui envoie A sur B et A' sur B' . Essayez les deux et utilisez celle qui paraît la plus utile.

4.6 Exercices

Exercice 26 Soit $ABCD$ un quadrilatère, E et F sur $[AD]$ et $[BC]$ respectivement tels que $AE/ED = BF/FC$. Soit $S = (EF) \cap (AB)$ et $T = (EF) \cap (CD)$.

Montrer que les cercles circonscrits aux triangles SAE , SBF , TCF et TDE sont concourants.

Exercice 27 Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui se coupent en deux points A et D . La tangente à Γ_1 en A recoupe Γ_2 en B , et la tangente à Γ_2 en A recoupe Γ_1 en C . Soit $E \in [AB]$ tel que $BE = AB$, et F la deuxième intersection de $[AC]$ avec le cercle circonscrit Ω à ADE . Montrer que $AC = AF$.

Exercice 28 Soit $ABCDE$ un pentagone convexe vérifiant les relations $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{DCA} = \widehat{EDA}$. Soit $P = (BD) \cap (CE)$.

Montrer que la droite (AP) coupe le segment $[CD]$ en son milieu.

Exercice 29 Soit $ABCD$ un quadrilatère avec $AD = BC$ et P l'intersection de ses diagonales. Soit F et E des points variables sur les segments $[AD]$ et $[BC]$ respectivement de manière à avoir $BE = DF$. On note R et Q les points d'intersections de (EF) avec (AC) et (BD) respectivement.

Montrer que le cercle circonscrit à PQR a un deuxième point fixe quand E et F varient.

Exercice 30 Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ , P un point variable sur le l'arc AB qui ne contient pas C . Soient I et J les centres des cercles inscrits des triangles ACP et BCP respectivement. On considère Q le point d'intersection de Γ et du cercle circonscrit au triangle PIJ .

Montrer que Q reste fixe quand P varie.

Exercice 31 Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en P et Q . Soit A_1 et B_1 deux points variables sur Γ_1 et A_2 et B_2 les deuxièmes points d'intersection de Γ_2 avec (A_1P) et (B_1P) respectivement. Soit $C = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$.

Montrer que le centre O du cercle circonscrit au triangle CA_1A_2 reste sur un cercle fixe quand A_1 et A_2 varient.

L'exercice suivant est important per se et souvent utilisé (il faut par contre penser à le redémontrer ... ou citer ce poly!).

Exercice 32 Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O , P le point d'intersection des diagonales et Q le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles APD et BPC .

Montrer que $\widehat{OQP} = 90^\circ$.

Exercice 33

- a) Soit T une similitude directe. Montrer qu'il existe une similitude directe de même centre envoyant tout point M sur le milieu de M et $T(M)$.
- b) Soit $ABCD$ un quadrilatère, M et N les milieux de ses diagonales et P leur intersection. Soit O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits de ABP et CDP . Montrer que le milieu du segment $[O_1O_2]$ est le centre du cercle circonscrit de PMN .

Exercice 34 Soit Γ_1, Γ_2 et Γ_3 trois cercles avec $\{A, B\} = \Gamma_1 \cap \Gamma_2$, $\{C, D\} = \Gamma_2 \cap \Gamma_3$ et $\{E, F\} = \Gamma_3 \cap \Gamma_1$. On considère P_1 sur Γ_1 et on note P_2 le deuxième point d'intersection de (P_1A) et Γ_2 , P_3 le deuxième d'intersection de (P_3C) et Γ_3 , P_4 le deuxième point d'intersection de (P_3E) et Γ_1 , P_5 le deuxième point d'intersection de (P_4B) et Γ_2 , P_6 le deuxième point d'intersection de (P_5D) et Γ_3 et enfin P_7 le deuxième point d'intersection de (P_6F) et Γ_1 .

Montrer que $P_7 = P_1$.

Exercice 35 Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles se coupant en deux points A et B . Les tangentes à Γ_1 en A et B se coupent en K . Soit M un point variable sur Γ_1 , distinct de A et B . On note P le second point d'intersection de (MA) et Γ_2 , C le second point d'intersection de (MK) et Γ_1 et Q le second point d'intersection de (AC) avec Γ_2 .

- a) Montrer que (PQ) passe par un point fixe quand M varie.
- b) Montrer que le milieu de $[PQ]$ est sur la droite (MK) .

Exercice 36 Soit $ABCDEF$ un hexagone inscriptible vérifiant $AB = CD = EF$. Soit $Z = (AC) \cap (BD)$, $X = (CE) \cap (DF)$ et $Y = (EA) \cap (FB)$.

Montrer que XYZ et BDF sont semblables.

Exercice 37 Soit ABC un triangle, E et D des points sur les côtés $[AB]$ et $[AC]$ de manière à avoir $BE = CD$. Soit P l'intersection des diagonales du quadrilatère $BEDC$ et Q le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits à EPB et DPC . Soit K et L les milieux respectifs de $[BE]$ et $[CD]$ et R le point d'intersection de la perpendiculaire à (QK) passant par K et de la perpendiculaire à (QL) passant par L .

Montrer que :

- a) Q est sur la bissectrice de l'angle \widehat{BAC} .
- b) R est sur le cercle circonscrit au triangle ABC .

Exercice 38 (BMO 2009) Soit ABC un triangle. Une droite parallèle à (BC) coupe $[AB]$ en M et $[AC]$ en N . Soit P le point d'intersection de (BN) et (CM) . Les cercles circonscrits à BMP et CNP se recoupent en Q .

Montrer que $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$.

Exercice 39 Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. On considère trois points A_1, B_1 et C_1 sur les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$ respectivement. On note A_3, B_3 et C_3 les symétriques de A_1, B_1 et C_1 par rapport aux milieux de leurs côtés respectifs. On note A_2, B_2 et C_2 les

deuxièmes points d'intersection de Γ avec les cercles circonscrits à AB_1C_1 , BC_1A_1 et CA_1B_1 respectivement.

Montrer que les triangles $A_2B_2C_2$ et $A_3B_3C_3$ sont semblables.

5 Indications pour les exercices

Exercice 1: Quelle est la transformation qui permet d'"écraser" la rivière?

Exercice 2: Si B décrit Γ et D est le point tel que $ABCD$ soit un parallélogramme, quel ensemble décrit D ?

Exercice 3: Si X décrit le cercle et Y est tel que $XY = a$ et (XY) est parallèle à (d) , quel ensemble décrit Y ?

Exercice 4: Trouver une homothétie qui envoie ABC sur $A'B'C'$.

Exercice 5: Coller un carré au triangle par le côté $[BC]$. Quel est son lien avec le carré qui nous intéresse?

Exercice 6: Trouver deux homothéties intéressantes sur la figure et les composer.

Exercice 7: Chasse aux tangentes.

Exercice 8: Une homothétie h de centre A envoie Γ_1 sur Γ_2 . Il suffit de montrer $h(D) = C...$

Exercice 9: Une homothétie de centre A envoie Γ_A sur $\Gamma...$

Exercice 10: L'homothétie à utiliser est évidente. Quelle est l'image de B ?

Exercice 11: Trouver deux homothéties de centres A et A' et appliquer le théorème de Monge.

Exercice 12: L'homothétie à utiliser est évidente. Introduire les images de E et J par cette homothétie.

Exercice 13: Utiliser l'homothétie "évidente", puis trouver une homothétie de centre D qui envoie M sur I .

Exercice 14: Identifier le point d'intersection des quatre cercles. Une chasse aux tangentes permet de faire apparaître un nouveau cercle...

Exercice 15: Introduire un cercle tangent à trois droites sur les quatre, et essayer d'appliquer Monge.

Exercice 16: L'exercice 9 donne deux nouveaux points sur (KL) .

Exercice 17: Utiliser Monge pour exprimer E et F comme centres de deux homothéties. On aura besoin de cercles supplémentaires...

Exercice 18: Introduire P et Q , points où ω_1 et ω_2 touchent $[AC]$. Que dire de ces deux points?

Exercice 19: Fixer A_1 . Quand A_2 décrit (Δ_2) , quel ensemble décrit le troisième sommet du triangle équilatéral?

Exercice 20: Pour faire apparaître $BM + CM$, placer N sur (BM) tel que $MN = CM$. Quelle rotation apparaît?

Exercice 21: Trouver des rotations de 60° sur la figure...

Exercice 22: Quelle transformation permet de passer de P_i à P_{i+1} ? Et de P_1 à P_{2014} ?

Exercice 23: A l'aide d'une rotation bien choisie, "reporter" les distances BF et CF sur la droite (AF) au-delà de F . Que donne la même construction avec un X quelconque?

Exercice 24: Composer des rotations de 120° .

Exercice 25: La rotation à utiliser est évidente. Introduire l'image de O .

Exercice 26: Les triangles plats peuvent aussi être semblables...

Exercice 27: La construction du centre d'une similitude marche toujours dans le cas limite où P est confondu avec un des quatre points...

Exercice 28: Des triangles semblables sautent aux yeux. Terminer la construction du centre...

Exercice 29: Une similitude fixe envoie E sur F . Le point fixe qu'on cherche est son centre!

Exercice 30: Introduire les points nécessaires pour que la construction de Q soit celle du centre d'une similitude. Que dire de son angle et de son rapport?

Exercice 31: Commencer par éliminer B_1 et B_2 . Tester des cas particuliers pour A_1 permet d'identifier le cercle.

Exercice 32: Introduire des milieux pour faire apparaître des angles droits.

Exercice 33:

a) Deux similitudes pour le prix d'une!

b) K l'intersection des cercles circonscrits des triangles ABP et PCD . Chercher à appliquer a)...

Exercice 34: Quelle est la transformation qui permet de passer de P_i à P_{i+1} ? Et de P_1 à P_7 ?

Exercice 35:

a) (PQ) est l'image d'une droite bien connue par une similitude de centre B .

b) Introduire les centres des cercles. Les angles droits donnent des points cocycliques.

Exercice 36: Cette fois, la similitude intéressante est une rotation!

Exercice 37:

a) Une similitude saute aux yeux. Quel est son rapport?

b) Montrer que A, K, L, Q et R sont sur un même cercle. Que dire de l'intersection de ce cercle et du cercle circonscrit à ABC ?

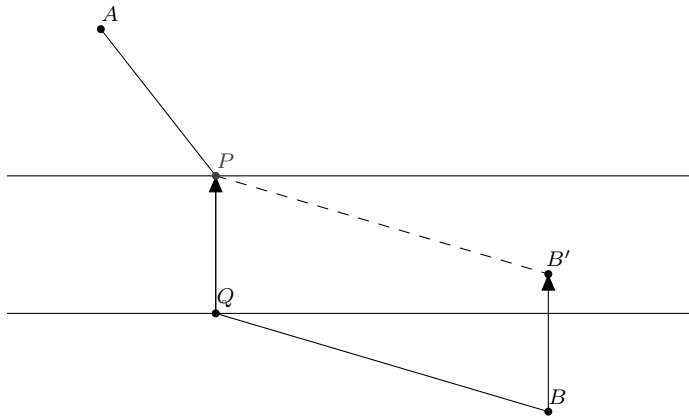
Exercice 38: La droite (AP) est connue. S'intéresser aux distances de Q à $[AB]$ et $[AC]$...

Exercice 39: Montrer que C_2AB et CB_3A_3 sont semblables.

6 Solutions des exercices

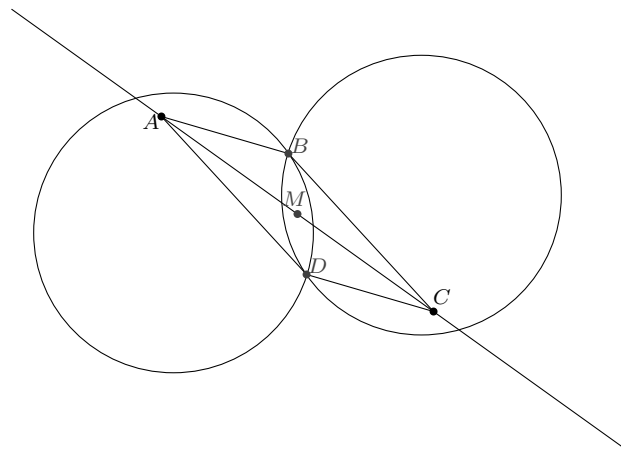
Solution de l'exercice 1

Soit \vec{v} le vecteur perpendiculaire à la rivière dirigé vers A et de longueur L , et B' l'image de B par la translation de vecteur \vec{v} : si le pont va de P à Q , la longueur du trajet vaut $AP + PQ + QB = AP + PB' + L$. On veut donc rendre $AP + PB'$ le plus petit possible, donc



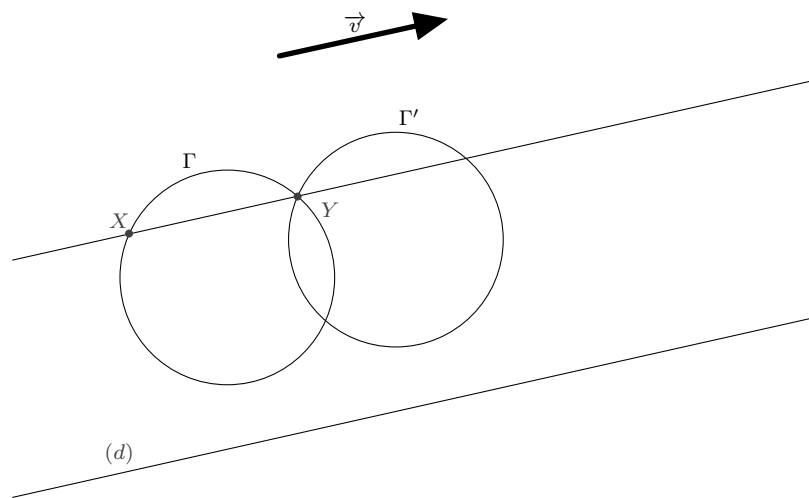
P doit être aligné avec A et B' . Il faut donc que P soit l'intersection de (AB') et de la rive du côté de A .

Solution de l'exercice 2



Soit M le milieu de $[AC]$: $ABCD$ est un parallélogramme ssi M est le milieu de $[BD]$ ssi B est le symétrique de D par rapport à M . Pour que D soit sur Γ , il faut donc que B soit sur le symétrique Γ' de Γ par rapport à M , ce qui permet de le tracer. D est alors l'autre intersection des deux cercles.

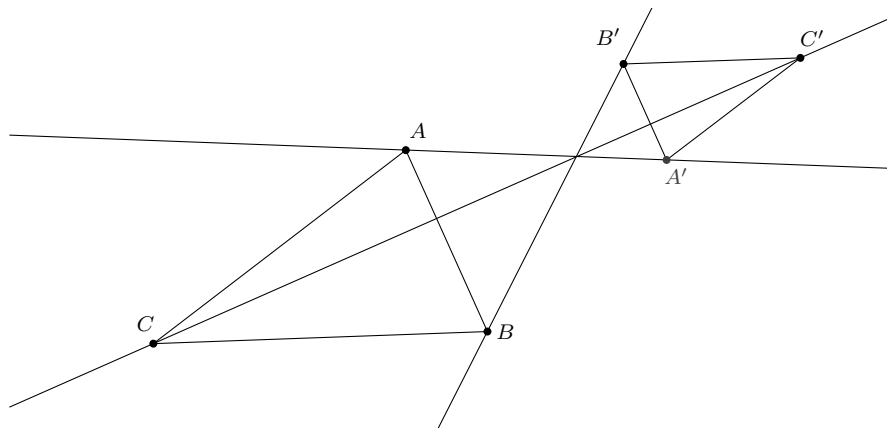
Solution de l'exercice 3



Soit \vec{v} un vecteur parallèle à (d) et de longueur a : si on a la construction qu'on veut, alors $\overrightarrow{XY} = \vec{v}$ ou $\overrightarrow{YX} = \vec{v}$. Quitte à échanger X et Y , on suppose qu'on est dans la première situation. Alors $Y \in \Gamma$, et $X \in \Gamma$ donc Y est sur l'image de Γ par la translation de vecteur \vec{v} , qu'on note Γ' .

On trace donc Γ' , puis on prend Y à l'intersection de Γ et Γ' . On peut ensuite tracer la droite parallèle à (d) passant par Y et placer X .

Solution de l'exercice 4

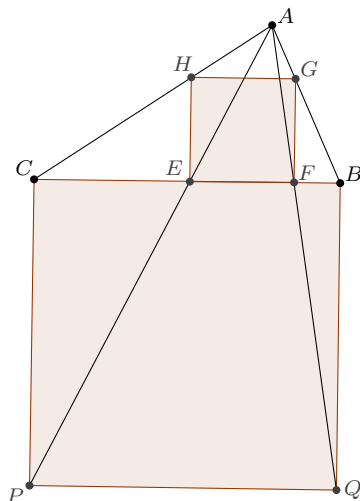


On note X le point d'intersection de (AA') et (BB') s'il existe. D'après le théorème de Thalès, on peut poser $k = \frac{XA'}{XA} = \frac{XB'}{XB}$. L'homothétie h de centre X et de rapport k envoie alors A sur A' et B sur B' . La droite $h((AC))$ passe par A' et est parallèle à (AC) donc à $(A'C')$, d'où $h((AC)) = (A'C')$ et, de même $h((BC)) = (B'C')$. On a donc $h(C) = C'$, donc X, C et C' sont alignés, d'où le résultat.

Si (AA') et (BB') sont parallèles, $ABB'A'$ est un parallélogramme donc il existe une translation t qui envoie A sur A' et B sur B' et, comme ci-dessus, on montre qu'elle envoie C sur C' , donc (CC') est parallèle à (AA') et (BB') .

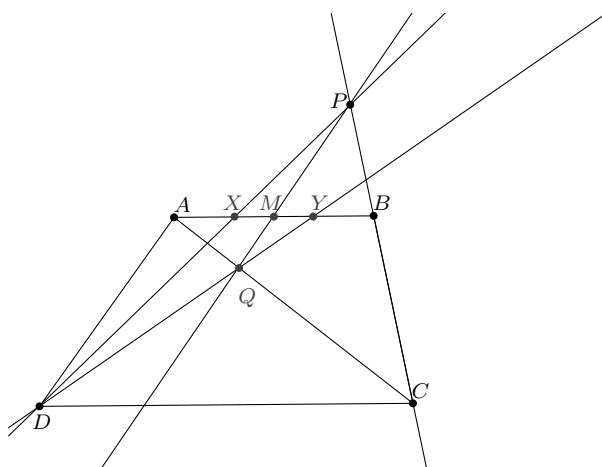
Remarque 6.1. On a trouvé une condition nécessaire et suffisante sur deux triangles pour qu'il existe une homothétie envoyant l'un sur l'autre.

Solution de l'exercice 5



Supposons construit notre carré $EFGH$, et plaçons sur la figure P et Q tels que $BCPQ$ soit un carré, situé de l'autre côté de $[BC]$ par rapport à A . Comme (GH) est parallèle à (BC) , il existe une homothétie h de centre A qui envoie G sur B et H sur C . h envoie donc $EFGH$ sur $PQBC$, et en particulier P sur E . E est donc sur (AP) donc E est l'intersection de $[BC]$ et (AP) , et de même F est celle de $[BC]$ et (AQ) . Une fois qu'on a E et F , il est facile de construire G et H .

Solution de l'exercice 6

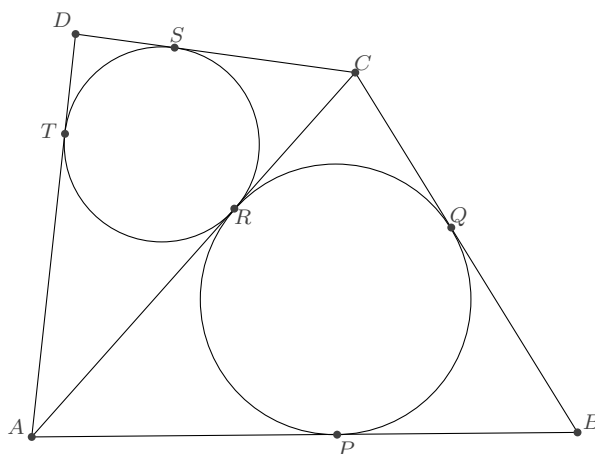


Les droites parallèles donnent envie de chercher des homothéties qui les envoient l'une sur l'autre. Deux sont intéressantes : celle de centre Q qui envoie A sur C et Y sur D , qu'on note h_Q et celle de centre P qui envoie C sur B et D sur X , qu'on note h_P .

$h_P \circ h_Q$ est alors une homothétie qui envoie A sur B et Y sur X . Son centre est sur (AB) et sur (PQ) (car c'est le centre d'une composée d'homothéties de centres P et Q), donc c'est M et, comme M est le milieu de $[AB]$, $h_P \circ h_Q$ est la symétrie centrale de centre M , donc $MX = MY$.

Remarque 6.2. Il est aussi possible de résoudre l'exercice en appliquant le théorème de Ménelaüs dans ABC .

Solution de l'exercice 7

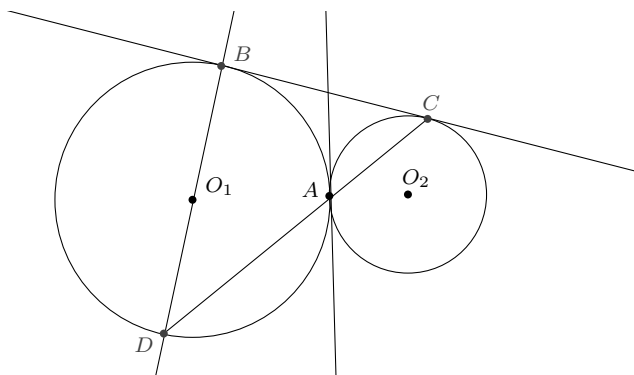


Les deux cercles inscrits sont situés de part et d'autre de $[AC]$ donc ils sont tangents en un point de $[AC]$, qui est forcément le point où ils touchent $[AC]$. On donne des noms aux différents points de tangence comme sur la figure et on effectue une chasse aux tangentes :

$$AB + CD = AP + BP + CS + DS = AR + BQ + CR + DT = AT + BQ + CQ + DT = AD + BC$$

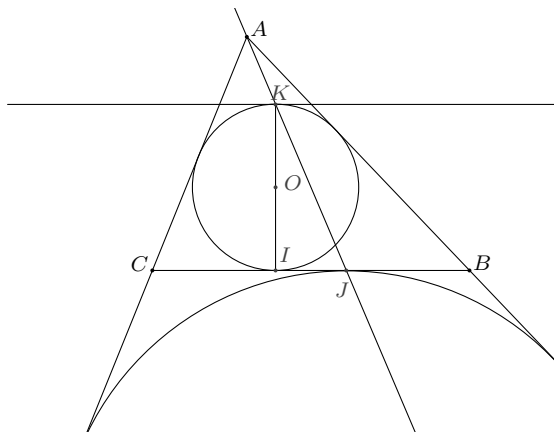
donc $ABCD$ admet un cercle inscrit.

Solution de l'exercice 8



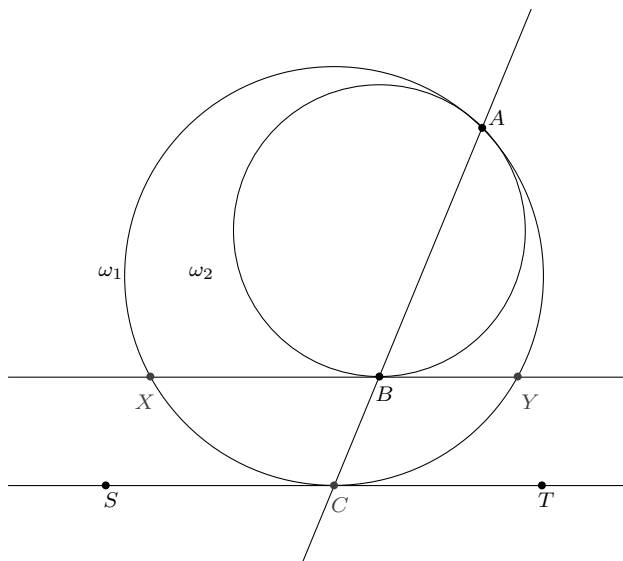
A est le centre d'une homothétie négative h qui envoie Γ_2 sur Γ_1 . De plus, D est diamétralement opposé à B donc la tangente à Γ_1 en D est parallèle à (BC) . On a donc $h(C) = D$, donc A, C et D sont alignés.

Solution de l'exercice 9



A est l'intersection des tangentes communes extérieures à Γ et Γ_A , donc c'est le centre de l'homothétie positive h qui envoie Γ_A sur Γ . De plus, K est diamétralement opposé à I sur Γ donc la tangente à Γ en K est parallèle en I à (BC) . Or, la tangente à Γ_A en J est (BC) , donc son image par h est tangente à Γ , différente de (BC) et parallèle à (BC) . Il s'agit donc de la tangente à Γ en K , donc $K = h(J)$ et A, J et K sont alignés.

Solution de l'exercice 10

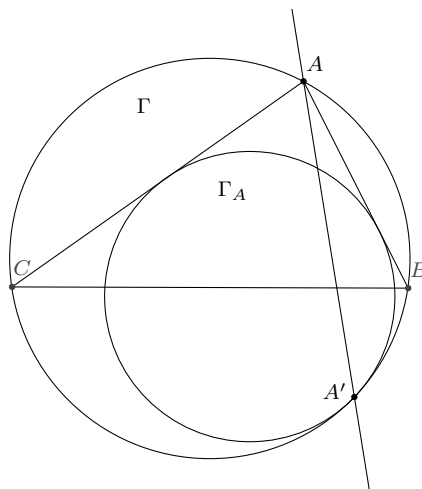


On veut montrer que (AB) est la bissectrice de \widehat{XAY} . Soit C la deuxième intersection de (AB) avec ω_1 : il suffit de montrer que C est le milieu de l'arc XY . Soit h l'homothétie de centre A qui envoie ω_2 sur ω_1 : on a $h(B) = C$ donc la tangente à ω_1 en C est parallèle à (XY) . En notant (ST) la tangente comme sur la figure, on peut écrire, en utilisant le cas tangent du théorème de l'angle inscrit puis le fait que (XY) et (ST) soient parallèles :

$$\widehat{CXY} = \widehat{YCT} = \widehat{CYX}$$

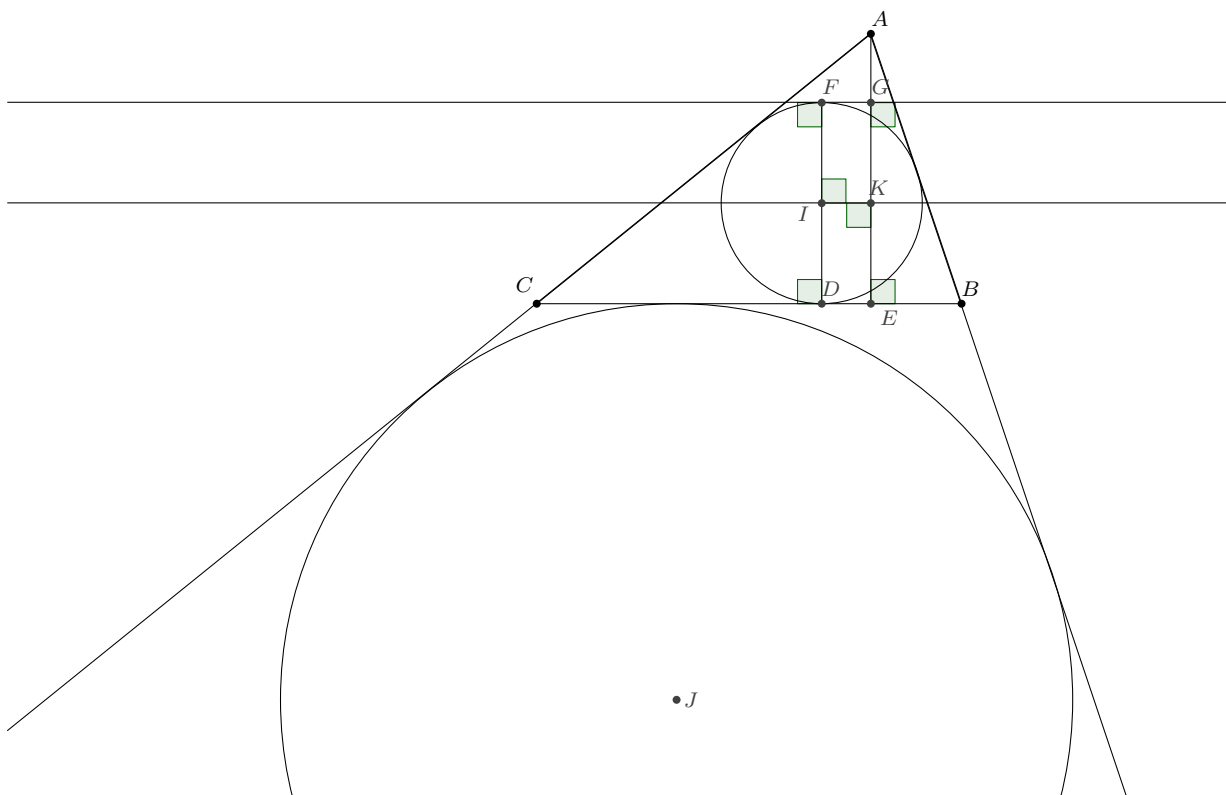
donc C est bien le milieu de l'arc XY de ω_1 , d'où le résultat.

Solution de l'exercice 11



Soient ω le cercle inscrit à (ABC) et X le centre de l'homothétie positive qui envoie Γ sur ω : le point A' est le centre de l'homothétie positive qui envoie Γ sur Γ_A et A est celui de l'homothétie positive qui envoie Γ_A sur ω , donc $X \in (AA')$ et, de même, $X \in (BB')$ et $X \in (CC')$ d'où le résultat.

Solution de l'exercice 12

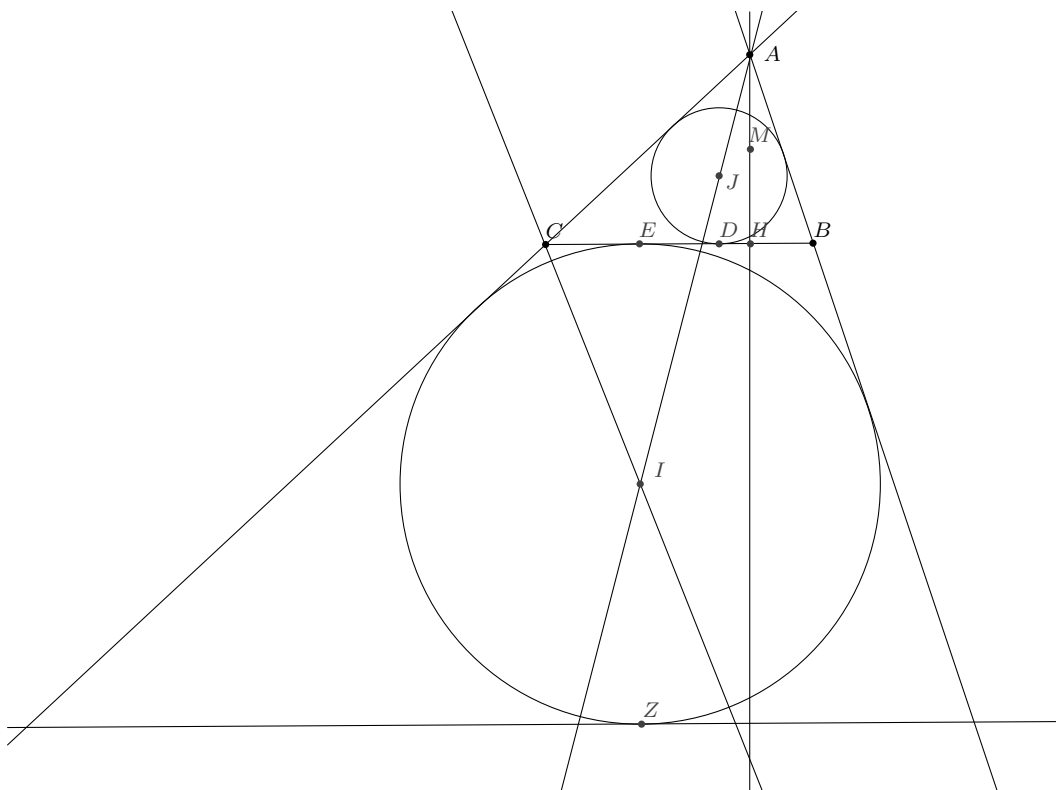


Soit h l'homothétie de centre A qui envoie le cercle A -exinscrit sur le cercle inscrit ω : on s'intéresse à l'image de (EJ) . On a $h(J) = I$. De plus $h(BC)$ est parallèle à (BC) , différente de

(BC) et tangente à ω . Si on note F le point de ω diamétralement opposé à D , $h(BC)$ est donc la tangente à ω en F , donc $h(E)$ est l'intersection de cette tangente avec (AE) , qu'on note G . On a donc $(EJ) \parallel (GI)$.

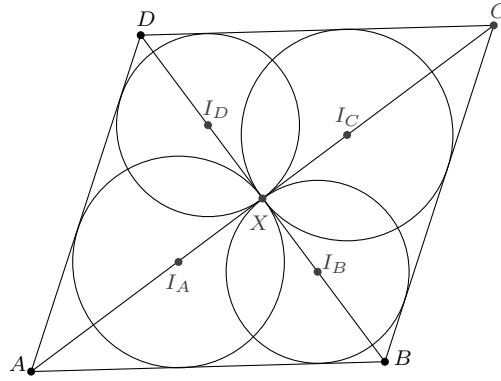
Il suffit donc de montrer que $(DK) \parallel (GI)$, donc de montrer que $DIGK$ est un parallélogramme, donc il suffit de montrer $DI = GK$ car (DI) et (GK) sont toutes deux perpendiculaires à (BC) . Or $GK = FI$ car $FGKI$ est un rectangle, et $FI = DI$ est le rayon de ω , d'où le résultat.

Solution de l'exercice 13



Soit Z le point "en bas" du cercle exinscrit : l'homothétie de centre A qui envoie le cercle inscrit sur le cercle exinscrit envoie D sur Z , donc A, D et Z sont alignés, donc il existe h de centre D qui envoie A sur Z . Elle envoie (BC) sur elle-même, donc la hauteur issue de A sur la droite (IZ) , donc le pied H de la hauteur est envoyé sur le point de contact E du cercle exinscrit avec $[BC]$, donc le milieu de la hauteur M est envoyé sur le milieu de $[EZ]$, c'est-à-dire I . D étant le centre de cette homothétie, on en déduit que D, M et I sont alignés.

Solution de l'exercice 14



On note ω_A le cercle inscrit à DAB et ainsi de suite. Les cercles ω_B et ω_D sont situés de part et d'autre de (AC) , donc ils ne peuvent s'intersecter que sur (AC) . De même, ω_A et ω_C ne peuvent s'intersecter que sur (BD) , donc l'intersection des 4 cercles ne peut être que l'intersection des diagonales, qu'on note X .

De plus, notons R et S les points de tangence de ω_B avec $[AB]$ et $[BC]$, et T et U les points de contact de ω_D avec $[CD]$ et $[DA]$. On a :

$$AB + CD = AR + BR + CT + DT = AX + BS + CX + DU = AU + BS + CS + DU = AD + BC$$

donc $ABCD$ est circonscriptible : il existe un cercle à l'intérieur de $ABCD$ tangent à tous les côtés, qu'on note ω .

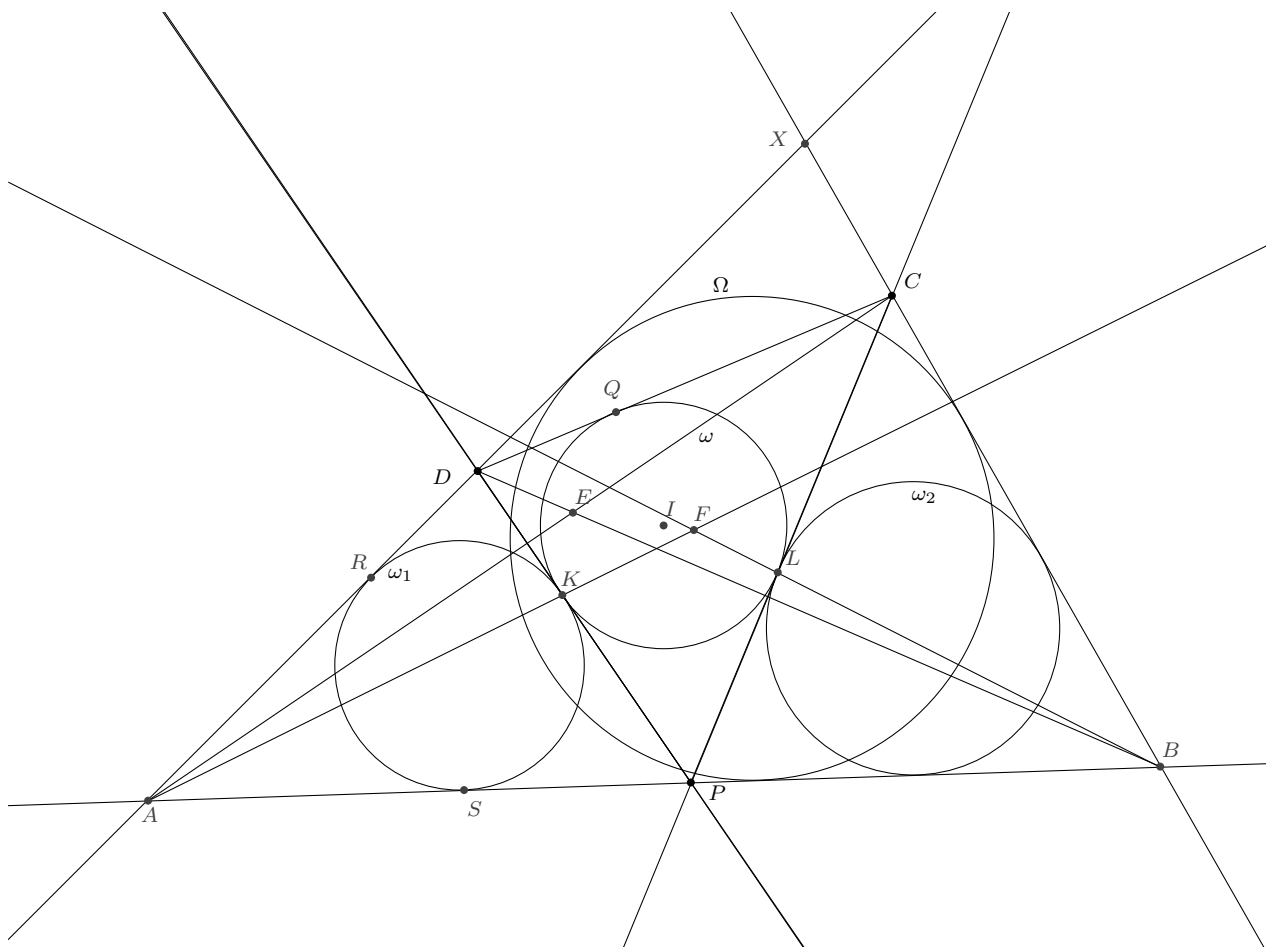
Le centre de l'homothétie négative qui envoie ω_A sur ω_C est X , donc est sur (AC) . De plus, A est le centre de l'homothétie positive qui envoie ω_A sur ω , et C est le centre de l'homothétie positive qui envoie ω sur ω_C , donc le centre de l'homothétie positive qui envoie ω_A sur ω_C est aussi sur (AC) , donc les centres de ω_A et ω_C sont sur (AC) , donc (AC) est la bissectrice de \widehat{BCD} et \widehat{DAB} , donc le quadrilatère est symétrique par rapport à (AC) d'où $AB = AD$ et $CB = CD$. On a de même $BA = BC$ et $DA = DC$, donc $ABCD$ est un losange.

Solution de l'exercice 15

Solution de l'exercice 16 Sans perte de généralité, on suppose que $A \in [DX]$ et $B \in [CX]$. On note P et Q les points de tangence de ω avec $[AB]$ et $[CD]$. D'après l'exercice 9 appliqué au triangle XCD , la droite (XL) passe par le point de ω diamétralement opposé à Q , qu'on note Y . Dans l'exercice 9, on peut intervertir les rôles du cercle inscrit et du cercle exinscrit (la preuve est exactement la même). Appliqué au triangle XAB , cela montre que (XK) passe par le point de ω diamétralement opposé à P . On note ce point Z : les points X, K, Y, Z et L sont alignés dans cet ordre. De plus, $PQZY$ est un rectangle donc (PQ) est parallèle à (KL) . Comme $\widehat{KPQ} = \widehat{LQP}$ (cas tangent du théorème de l'angle inscrit), $PQLK$ est donc un trapèze isocèle donc $PK = QL$.

De plus, notons M et N les milieux de $[AB]$ et de $[CD]$: une rapide chasse aux tangentes montre que $BP = AK = \frac{AB+AX-BX}{2}$ et $CQ = DL = \frac{CD+CX-DX}{2}$ (résultats connus sur les points de contact du cercle exinscrit) donc M et N sont aussi les milieux de $[PK]$ et $[QL]$. Or, on sait que PYZ est rectangle en Y donc PYK est rectangle en Y donc M est le centre du cercle circonscrit à PYK . En particulier, M est sur la médiatrice de $[PY]$ donc (OM) est la médiatrice de $[PY]$. De même, (ON) est la médiatrice de $[QZ]$. Comme $PQZY$ est un rectangle, ces médiatrices sont confondues, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 17

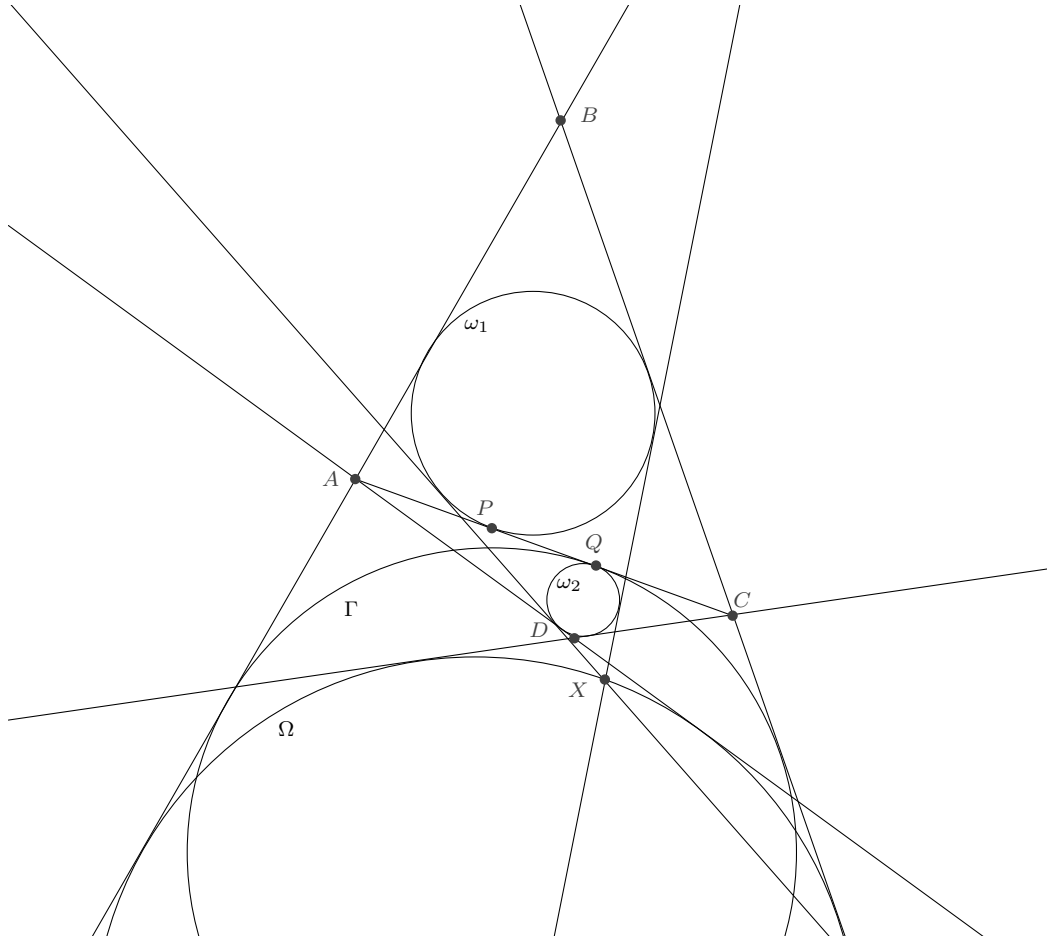


Soit $X = (AD) \cap (BC)$ et Ω le cercle inscrit à ABX : A est le centre de l'homothétie positive qui envoie Ω sur ω_1 et K le centre de l'homothétie négative qui envoie ω_1 sur ω , donc le centre de l'homothétie négative qui envoie Ω sur ω est sur (AK) . De même, il est sur (BL) donc il

s'agit de F . Pour que E, I et F soient alignés, il suffit donc de montrer que E est le centre de l'homothétie positive qui envoie Ω sur ω .

D'autre part, d'après l'exercice 7, comme ω et ω_1 sont tangents, le quadrilatère $APCD$ est circonscriptible : on note Γ_1 son cercle inscrit (qui n'est pas sur la figure par souci de lisibilité). De même, $BPDC$ est circonscriptible, on note Γ_2 son cercle inscrit. A est le centre de l'homothétie positive qui envoie Ω sur Γ_1 et C le centre de celle qui envoie Γ_1 sur ω , donc le centre de l'homothétie positive qui envoie Ω sur ω est sur (AC) et par le même raisonnement avec Γ_2 , il est sur (BD) donc il s'agit de E , d'où le résultat.

Solution de l'exercice 18



Une chasse aux tangentes exploitant l'existence de Ω donne $AB + AD = CB + CD$ (la preuve est la même que celle du théorème 2.16, mais le résultat légèrement différent car le cercle n'est pas à l'intérieur de $ABCD$). Si P et Q sont les points de tangence de ω_1 et ω_2 avec $[AC]$, on trouve donc :

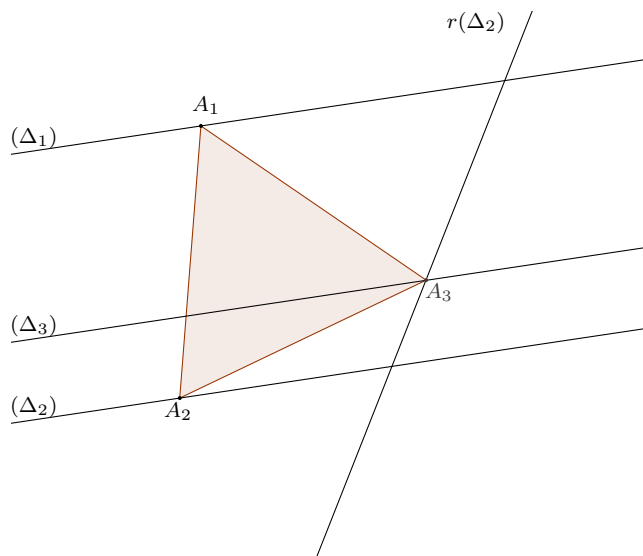
$$AP = \frac{AB + AC - BC}{2} = \frac{CD + AC - AD}{2} = CQ$$

Cela donne envie d'introduire Γ , cercle B -exinscrit à ABC : il est tangent à $[AC]$ en Q d'après les résultats du théorème 2.15 sur le cercle exinscrit.

On note X le point d'intersection des tangentes communes extérieures : d'après le théorème de Monge avec ω_1, ω_2 et Γ , il est sur (BQ) . De même, en introduisant Γ' , cercle D -exinscrit à ACD , on obtient $X = (BQ) \cap (DP)$.

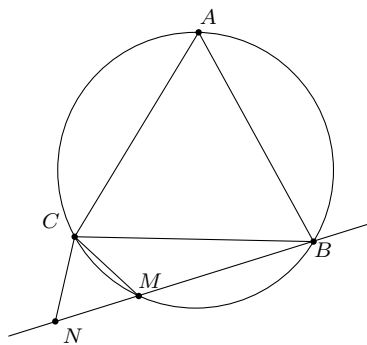
Il faut maintenant identifier le point X : une bonne figure suggère que la tangente à Ω en X est parallèle à (AC) . Soit donc Y le point de Ω le plus proche de (AC) en lequel la tangente à Ω est parallèle à (AC) : en utilisant l'homothétie de centre B qui envoie Γ sur Ω , on voit que B, Q est Y sont alignés. De même, en utilisant l'homothétie de centre D qui envoie Γ' sur Ω , on voit que D, P est Y sont alignés, d'où $X = Y$ et $X \in \Omega$.

Solution de l'exercice 19



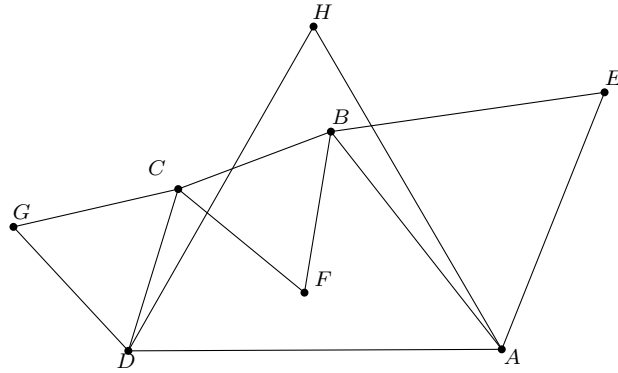
On choisit A_1 arbitrairement sur (Δ_1) . Pour tout point A_2 , le point A_3 tel que $A_1A_2A_3$ soit équilatéral est l'image de A_2 par la rotation r de centre A_1 et d'angle 60° . A_3 doit donc appartenir à (Δ_3) et à $r(\Delta_2)$ (qui s'intersectent car Δ_2 et Δ_3 sont parallèles et r tourne Δ_2 de 60°), ce qui permet de placer A_3 et donc de tracer le triangle.

Solution de l'exercice 20



En géométrie, il est plus facile de manipuler des sommes de longueurs quand les points considérés sont alignés. Soit donc N le point de (MB) sur la demi-droite issue de M ne contenant pas B , tel que $MN = MC$: par chasse aux angles $\widehat{CMN} = 60^\circ$, donc CMN est équilatéral. On veut maintenant montrer $AM = BN$. Or, soit r la rotation de centre C et d'angle 60° : elle envoie A sur B et M sur N , d'où $AM = BN = BM + MN = BM + CM$.

Solution de l'exercice 21



On suppose $ABCD$ direct (c'est-à-dire que l'ordre alphabétique des sommets suit le sens trigonométrique) : soient r_1 la rotation de centre A et d'angle 60° et r_2 la rotation de centre C et d'angle -60° . On a :

$$r_2 \circ r_1(E) = r_2(B) = F$$

et

$$r_2 \circ r_1(H) = r_2(D) = G$$

donc $EH=FG$ et on montre de même $EF=GH$.

Solution de l'exercice 22 Pour tout i , A_i est le centre du triangle équilatéral $Q_i P_i P_{i+1}$ donc $A_i P_i P_{i+1}$ est isocèle avec un angle de 120° en A_i , donc P_{i+1} est l'image de P_i par la rotation de centre A_i et d'angle 120° .

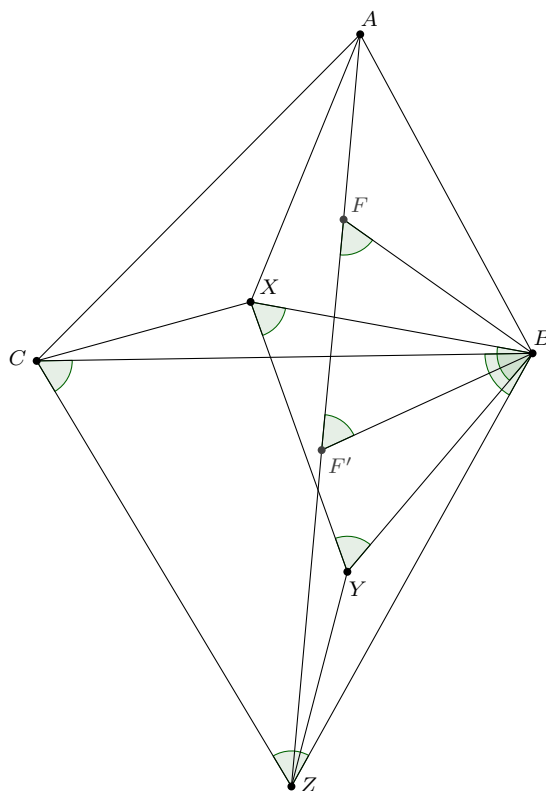
Si on note r_i la rotation de centre A_i et d'angle 120° , on a donc

$$P_{2014} = r_{2013} \circ r_{2012} \circ \dots \circ r_1(P_1) = (r_3 \circ r_2 \circ r_1)^{671}(P_1),$$

car $r_{3i} = r_3, r_{3i+1} = r_1$ et $r_{3i+2} = r_2$ pour tout i .

Or, nos trois rotations ont pour angle 120° , donc la somme des angles vaut 360° donc la composée est une translation. On note \vec{v} son vecteur : on a $\overrightarrow{P_1 P_{2014}} = 671 \vec{v}$ car P_{2014} est l'image de P_1 par la translation de vecteur \vec{v} , appliquée 671 fois. Si $P_{2014} = P_1$ alors \vec{v} doit être le vecteur nul (c'est-à-dire le vecteur de longueur 0) donc $r_3 \circ r_2 \circ r_1$ doit être l'identité, donc $r_3 \circ r_2 \circ r_1(A_1) = A_1$, soit $r_3 \circ r_2(A_1) = A_1$. Notons $B = r_2(A_1)$: alors $A_2 A_1 B$ et $A_3 B A_1$ sont isocèles avec un angle de 120° et partagent le côté $A_1 B$ donc sont isométriques, donc $A_2 A_1 B A_3$ est un losange avec deux angles de 60° et deux de 120° , et $A_1 A_2 A_3$ est équilatéral.

Solution de l'exercice 23



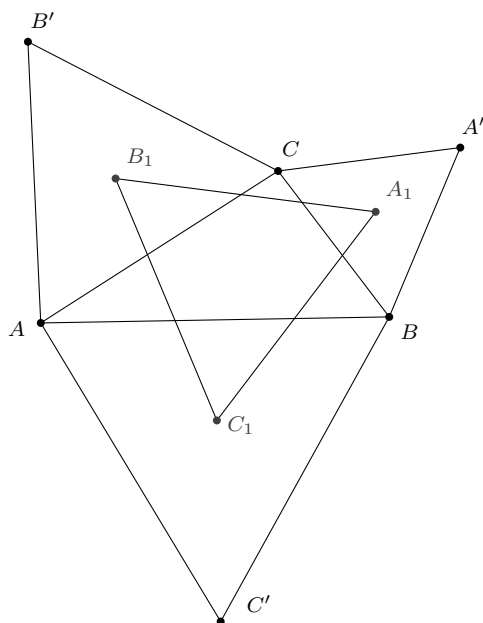
a) D'après le théorème de l'angle inscrit, l'ensemble des points P qui sont du même côté de (AB) que C et tels que $\widehat{APB} = 120^\circ$ est un arc de cercle passant par A et B , et de même l'ensemble des points du même côté de (AC) que B et tels que $\widehat{APC} = 120^\circ$ est un arc de cercle passant par A et C . La condition "tous les angles sont inférieurs à 120° " garantit que les arcs de cercles se recoupent dans le triangle en un point F . On a alors $\widehat{BFC} = 360^\circ - \widehat{AFB} - \widehat{AFC} = 120^\circ$.

b) Soit X un point dans ABC : l'idée est de faire apparaître les trois distances AX , BX et CX "à la suite", c'est-à-dire de trouver deux points Y et Z tels que $BX = XY$ et $CX = YZ$, de manière à majorer la somme par AZ . Mais l'énoncé nous dit que quand le minimum est atteint, on doit avoir $\widehat{AXB} = 120^\circ$ donc $\widehat{BXY} = 60^\circ$, d'où l'idée d'utiliser une rotation pour "reporter" les longueurs.

Soit donc r la rotation de centre B et d'angle 60° . On note $Z = r(C)$, $F' = r(F)$ et $Y = r(X)$: on a $XY = XB$ (car BXY est équilatéral) et $YZ = XC$ (car r conserve les longueurs). On a donc $AX + BX + CX \geq AZ$. D'autre part, $\widehat{AFB} = 120^\circ$ et $\widehat{BFF'} = 60^\circ$ donc A, F et F' sont alignés et $\widehat{BF'Z} = \widehat{BFC} = 120^\circ$ (car r conserve les angles) donc F, F' et Z sont alignés d'où :

$$AF + BF + CF = AF + FF' + F'Z = AZ \leq AX + BX + CX$$

Solution de l'exercice 24



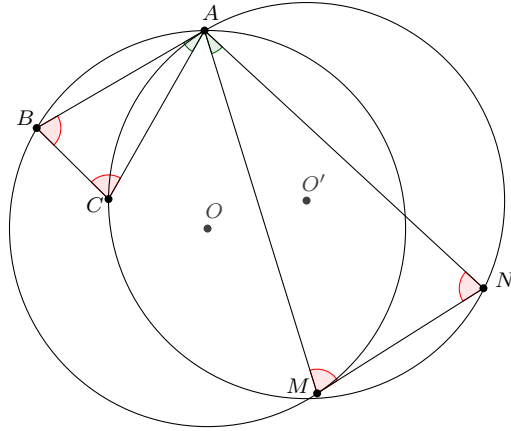
On suppose ABC direct : la figure présentant des triangles équilatéraux, il est naturel de considérer des rotations de 60° ou 120° . On veut les composer pour aboutir à quelque chose de simple, comme une translation. Soient donc r_A, r_B et r_C les rotations de centres A_1, B_1 et C_1 et d'angle 120° : leur composée est une translation car $3 \times 120^\circ = 360^\circ$. De plus, on a

$$r_A \circ r_B \circ r_C(B) = r_A \circ r_B(A) = r_A(C) = B,$$

d'où $r_A \circ r_B \circ r_C = Id$. En particulier, $r_A \circ r_B(C_1) = C_1$. Soit donc $D = r_B(C_1)$: on a $r_A(D) = C_1$. On a donc $B_1D = B_1C_1$ et $A_1C_1 = A_1D$. De plus, $\widehat{C_1B_1D} = \widehat{C_1A_1D} = 120^\circ$, donc B_1C_1D et A_1C_1D sont isométriques et isocèles avec un angle de 120° . On en déduit que $A_1DB_1C_1$ est un losange avec un angle en C_1 de 60° , donc $A_1B_1C_1$ est bien équilatéral.

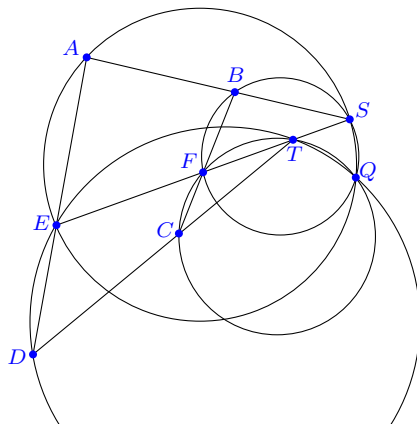
Remarque 6.3. Notons que la fin de la preuve est la même que pour l'exercice 22).

Solution de l'exercice 25



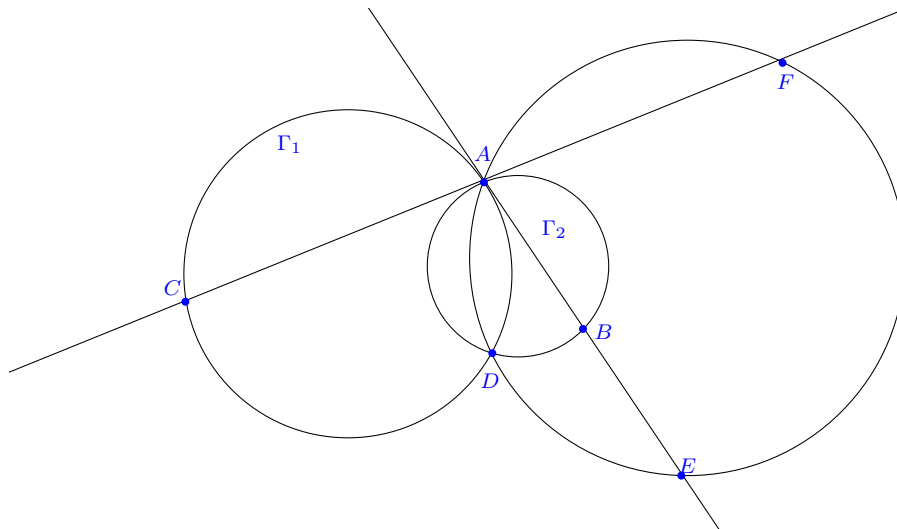
On note $\alpha = \widehat{BAC} = \widehat{MAN}$ et r la rotation de centre A et d'angle α : on a $r(B) = C$ et $r(M) = N$. De plus, $r(O) = O'$, le centre du cercle circonscrit à ACN . On a donc O, C, N et A cocycliques ssi O est sur le cercle de centre O' qui passe par A, C et N ssi $O'O = O'A$. Or, $O' = r(O)$ donc $O'O A$ est isocèle en A avec $\widehat{OAO'} = \alpha$ d'où : $O'O = O'A$ ssi $O'O A$ est équilatéral ssi $\alpha = 60^\circ$ ssi ABC est équilatéral.

Solution de l'exercice 26



D'après l'égalité sur les rapports de longueur, la similitude directe envoyant A sur B et D sur C envoie également E sur F . En utilisant le théorème 4.14 pour les couples de points $(E, D) \mapsto (F, C)$, on obtient que son centre est sur les cercles circonscrits à TCF et TDE . En l'utilisant sur les couples de points $(A, E) \mapsto (B, F)$, ce centre est également sur les cercles circonscrits à SAE et SBF . D'où la conclusion.

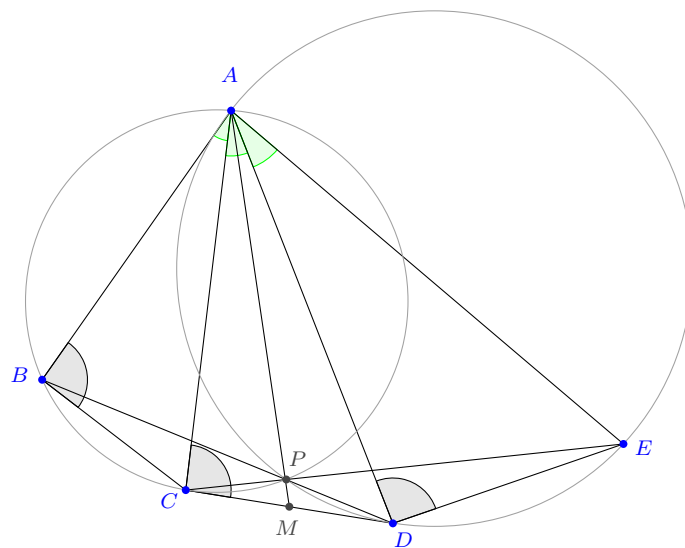
Solution de l'exercice 27



D'après la construction du centre d'une similitude appliquée aux cercles Γ_1 et Γ_2 , D est le centre de la similitude directe s_1 qui envoie C sur A et A sur B . En regardant les cercles Γ_1 et Ω , D est le centre de la similitude directe qui envoie C sur F et A sur E , donc le centre de la similitude directe s_2 qui envoie C sur A et F sur E .

Or, comme il existe une unique similitude directe de centre D qui envoie C sur A (car le rapport est forcément $\frac{DA}{DC}$ et l'angle forcément \widehat{ADC}), on a $s_1 = s_2$, donc on a une similitude qui envoie C sur A , A sur B et F sur E . Comme B est le milieu de $[AE]$, on en déduit que A est le milieu de $[CF]$.

Solution de l'exercice 28



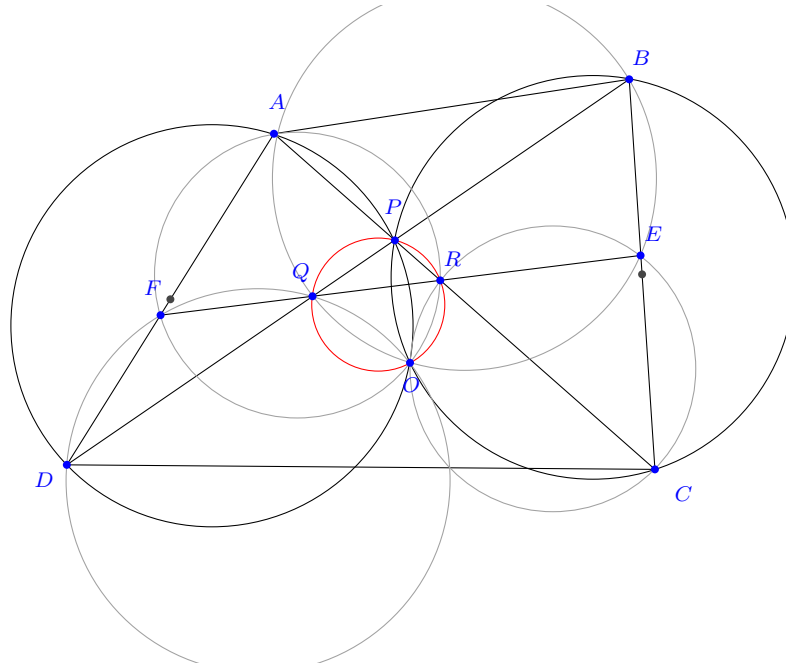
On se rend immédiatement compte qu'il existe une similitude de centre A qui envoie B sur C , C sur D et D sur E .

Donc, d'après le théorème 4.14 appliqué au couple de point $(B, D) \mapsto (C, E)$, A est sur le cercle circonscrit Γ_1 à PBC et Γ_2 à PDE . Ici, l'exercice commence à avoir bien la tête d'un

exercice utilisant la puissance d'un point. On essaye donc de montrer que Γ_1 est tangent à (CD) . Or c'est vrai d'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit comme $\widehat{ABC} = \widehat{DCA}$. De même, comme $\widehat{DEA} = 180^\circ - \widehat{EAD} - \widehat{EDA} = 180^\circ - \widehat{CAD} - \widehat{ACD} = \widehat{CDA}$, le cercle Γ_2 est également tangent à (CD) .

Finalement, en notant $M = (AP) \cap (CD)$, M est sur l'axe radical de Γ_1 et Γ_2 et on peut donc écrire $MC^2 = \mathcal{P}_{\Gamma_1}(M) = \mathcal{P}_{\Gamma_2}(M) = MD^2$ et la conclusion.

Solution de l'exercice 29

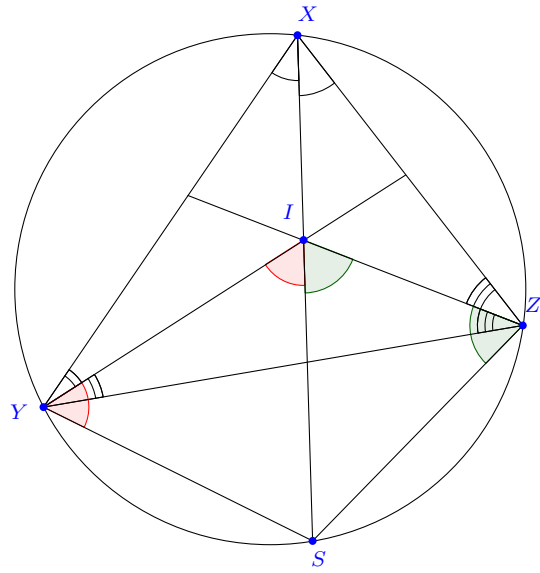


Il existe clairement en utilisant les égalités de longueur une similitude (et même une rotation!) envoyant les points A, F et D sur les points C, E et B respectivement.

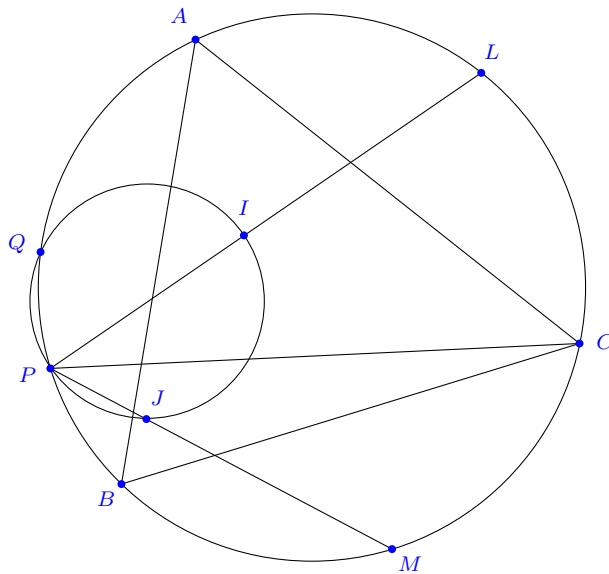
Il est naturel d'introduire son centre O et quelques dessins peuvent nous convaincre que c'est vraisemblablement le point recherché. En utilisant successivement le théorème principal pour les couples $(A, F) \mapsto (C, E)$, $(F, D) \mapsto (E, B)$ et $(D, A) \mapsto (B, C)$, on sait que O est sur le cercle circonscrit aux triangles ARF, ERC, FQD, BQE, APD et BPC . En particulier (en utilisant les deux derniers triangles), il est fixe. Il est donc suffisant (et probablement raisonnablement aisé au vu de tous les autres cercles...) de démontrer que O, P, Q et R sont cocycliques.

Or, le théorème de Miquel appliqué au quadrilatère $AFPQ$ prouve qu'il suffit de démontrer que O est sur le cercle circonscrit à ARF, DPA et DFQ . D'où la conclusion.

Solution de l'exercice 30 On rappelle le théorème du pôle Sud, visiblement pertinent dans cet exercice et démontrable grâce à une chasse aux angles élémentaire (exercice!).



Si XYZ est un triangle inscrit dans un cercle \mathcal{C} , I son centre du cercle inscrit et S le deuxième point d'intersection de (XI) avec \mathcal{C} . Alors, S est le milieu de l'arc YZ et, plus précisément, $SY = SI = SZ$.

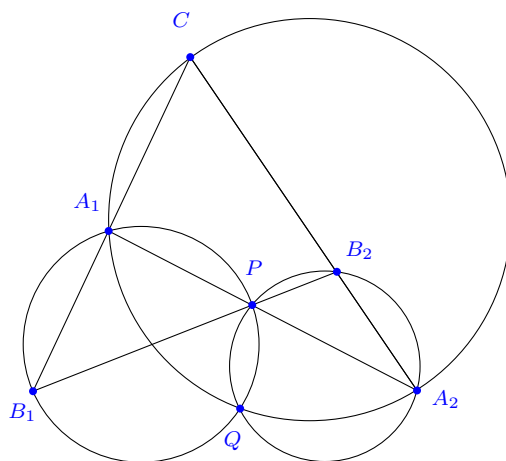


On est dans la situation classique avec deux cercles qui s'intersectent, on connaît bien un des points d'intersection et c'est l'autre qui nous intéresse. On cherche donc à compléter le quadrilatère. De manière naturelle, on introduit donc les points fixes L et M , milieux respectifs des petits arcs AC et BC . D'après le théorème du pôle Sud, P, I et L ainsi que P, J et M sont alignés.

D'après le théorème 4.14, Q est le centre de la similitude S envoyant I sur J et L sur M . (Comme toujours se pose la question de quelle similitude choisir : pourquoi pas celle envoyant

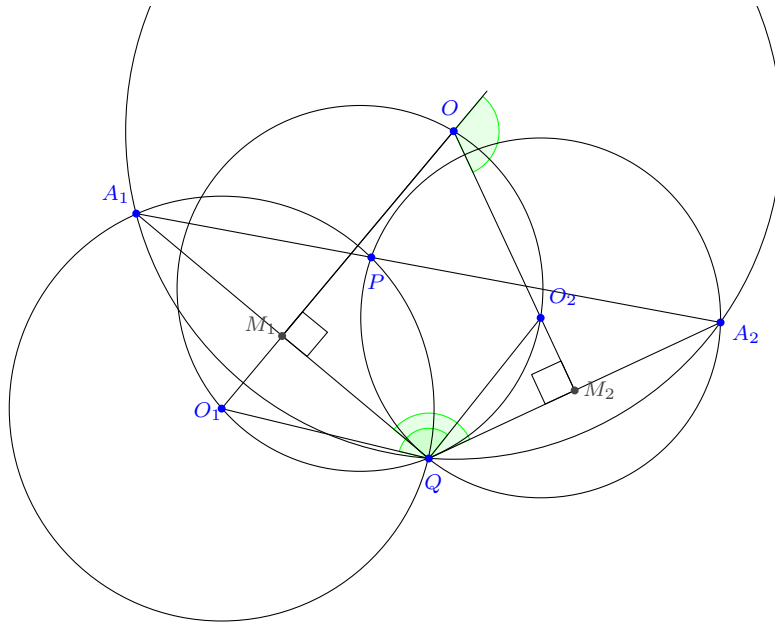
I sur L et J sur M ? Et comme souvent la réponse sera qu'on connaît mieux la première similitude parce que l'on maîtrise bien les longueurs impliquées.) Cette similitude envoyant le point fixe L sur le point fixe M , pour prouver qu'elle est fixe (et donc Q également), il suffit de montrer que son angle de rotation et son rapport de dilatation sont fixes (un petit dessin convaincra le lecteur sceptique...). Or, l'angle vaut \widehat{LQM} qui est fixe d'après le théorème de l'angle inscrit et le rapport de dilatation vaut JM/IL qui vaut CM/CL d'après le théorème du pôle Sud, d'où la conclusion.

Solution de l'exercice 31



On voit qu'on est naturellement dans une situation du type théorème de Miquel dans le quadrilatère $A_1B_1A_2B_2$. En particulier, le cercle circonscrit à CA_1A_2 passe par Q .

Cette remarque est positive pour de nombreuses raisons : on se rend compte que les points B_1 et B_2 sont inutiles (O peut être défini comme le centre du cercle circonscrit à A_1QA_2), ce qui permet de simplifier la figure et de perdre un degré de liberté.



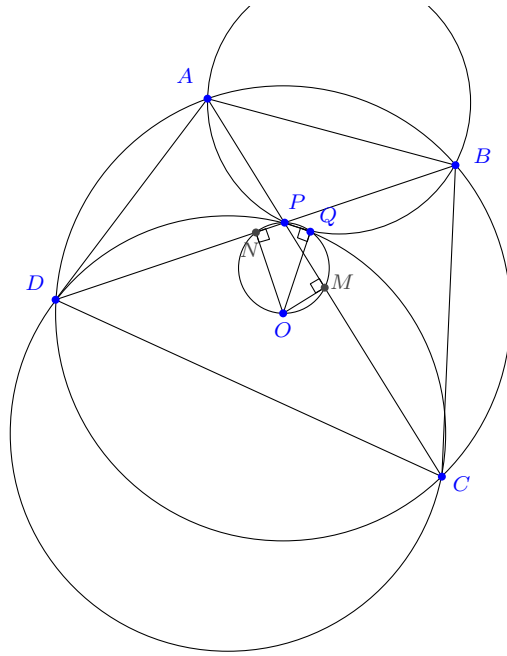
La question naturelle est maintenant : quel va être ce cercle que parcourra O ? Le plus simple est de considérer les cas limites : quand A_1 tend vers Q , A_2 et donc O également. Quand A_1 tend vers P , A_2 tend vers un point de Γ_2 et O devient donc le centre O_2 du cercle Γ_2 . De même, quand A_2 tend vers P , O tend vers le centre O_1 de Γ_1 .

On cherche donc à montrer que O, O_1, O_2 et Q sont cocycliques. Il faut naturellement travailler avec des angles orientés, mais on s'en passera (exercice...).

Notons M_1 et M_2 les milieux respectifs de $[A_1Q]$ et $[A_2Q]$. En utilisant les angles droits dus aux médiatrices, M_1, O, M_2 et Q sont cocycliques, d'où $\widehat{O_1OO_2} = 180^\circ - \widehat{A_1QA_2}$.

Or, la similitude de centre Q qui envoie A_1 sur A_2 envoie O_1 sur O_2 (d'après par exemple le théorème 4.14 appliqué à $(A_1, B_1) \mapsto (A_2, B_2)$). D'où $\widehat{A_1QA_2} = \widehat{O_1QO_2}$, ce dont on déduit $\widehat{O_1OO_2} = 180^\circ - \widehat{O_1QO_2}$, et la conclusion par le théorème de l'angle inscrit.

Solution de l'exercice 32 Il est naturel pour obtenir des angles droits de considérer les milieux M et N de $[AC]$ et $[BD]$.

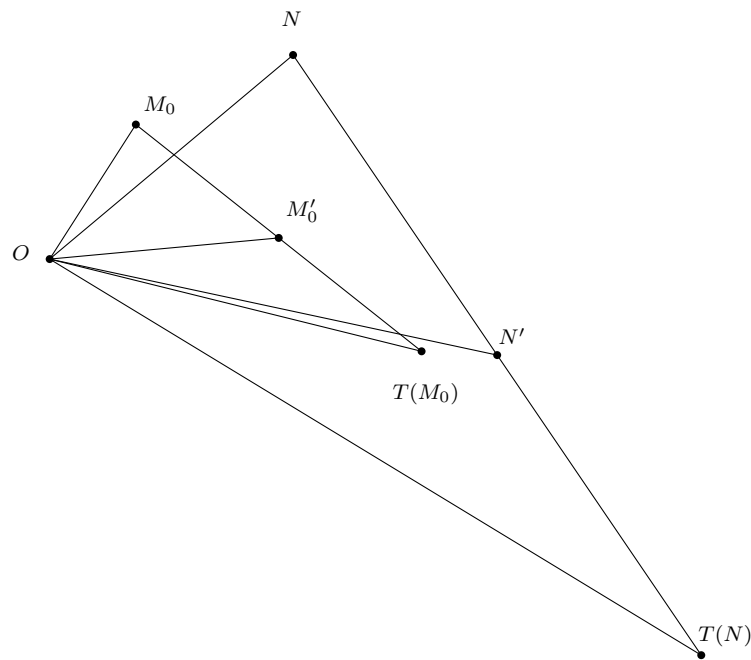


On considère la similitude de centre Q qui envoie A sur B et C sur D . Elle envoie le segment $[AC]$ sur le segment $[BD]$ et en particulier M sur N . En utilisant le théorème 4.14 avec les couples $(A, M) \mapsto (B, N)$, M, N, P et Q sont cocycliques. Or, en utilisant l'angle droit des médiatrices, il est clair que M, N, P et O sont cocycliques.

D'où finalement M, N, P, Q et O cocycliques et $\widehat{OQP} = 90^\circ$ par le théorème de l'angle inscrit.

Solution de l'exercice 33

a)

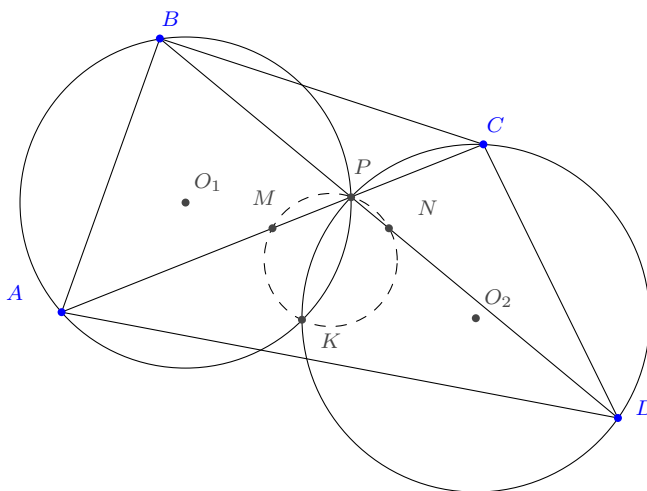


Soit O le centre de la similitude t . Pour un point M , notons M' le milieu de M et de $T(M)$. Fixons un point M_0 (différent de O) et considérons la similitude directe S de

centre O qui envoie M_0 sur M'_0 . Soit N un autre point et montrons qu'elle envoie N sur N' . Les triangles $OM_0t(M_0)$ et $ONt(N)$ étant semblables, les triangles $OM_0M'_0$ et ONN' sont semblables. Il existe donc une similitude directe de centre O notée s_2 envoyant M_0 sur M'_0 et N sur N' . On en déduit que $s = s_2$, ce qui implique bien que s envoie N sur N' .

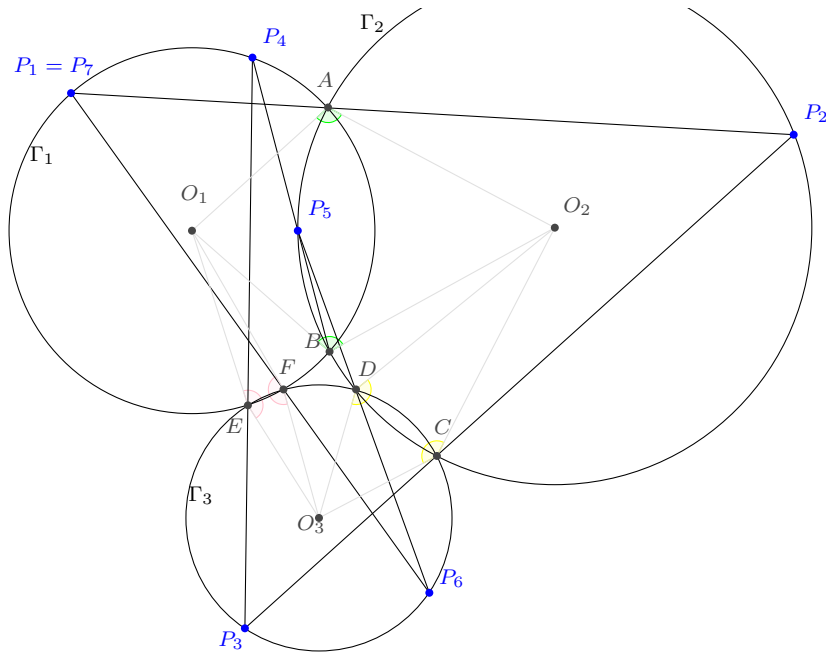
Remarque 6.4. Il est possible de résoudre facilement cette question en utilisant les nombres complexes. En effet, toute similitude directe f de centre O (où O est l'origine) est de la forme $f(z) = az$ avec a et z deux nombres complexes. Pour résoudre la question, il suffit donc de vérifier que $(z + f(z))/2$ est de cette forme. Comme $(z + f(z))/2 = (1 + a)/2 \cdot z$, $z \rightarrow (z + f(z))/2$ est une similitude directe de centre O qui vérifie les conditions de l'énoncé.

b) Soit K l'intersection des cercles circonscrits des triangles ABP et PCD .



On sait que K est le centre de la similitude directe t qui envoie $[AC]$ sur $[BD]$, et donc M sur N et O_1 sur O_2 . On en déduit que M, P, N, K sont cocycliques. Considérons la nouvelle similitude s de centre K envoyant tout point U sur le milieu de $[Ut(U)]$ (qui existe par (i)). Elle envoie donc A sur M , B sur N et K sur K . Elle envoie donc le cercle circonscrit de ABP sur le cercle passant par M, P, N, K . Comme O_1 est envoyé sur le milieu de $[O_1O_2]$, on en déduit que le milieu de $[O_1O_2]$ est le centre du cercle passant par M, P, N, K .

Solution de l'exercice 34

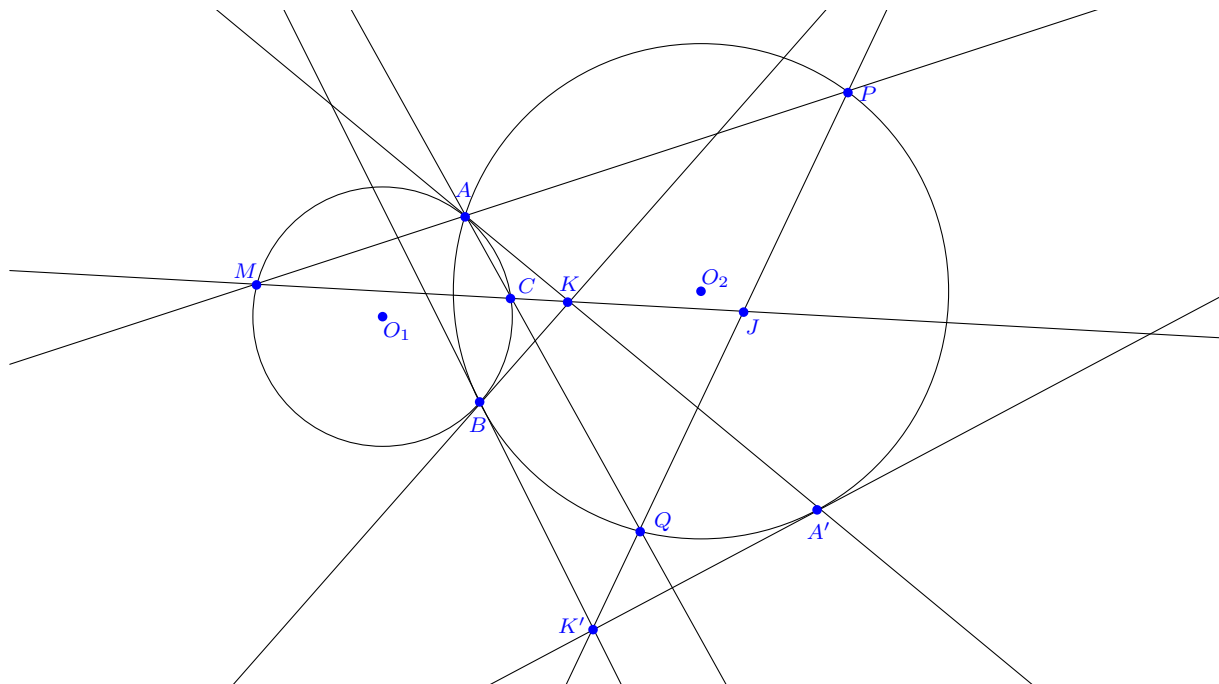


On considère ϕ_B la similitude de centre B qui envoie P_1 sur P_2 et Γ_1 sur Γ_2 . De même, on considère ϕ_D la similitude de centre D qui envoie P_2 sur P_3 et Γ_2 sur Γ_3 . on définit de manière similaire ϕ_F, ϕ_A, ϕ_C et ϕ_E .

On note $\Phi = \phi_F \circ \phi_D \circ \phi_B \circ \phi_E \circ \phi_C \circ \phi_A$. On a alors $P_7 = \Phi(P_1)$. Or, l'angle de rotation de Φ vaut $(AO_1, AO_2) + (CO_2, CO_3) + (EO_3, EO_1) + (BO_1, BO_2) + (DO_2, DO_3) + (FO_3, FO_1) = 0$ en éliminant les termes correspondants (voir figure). De même, le facteur de dilatation de Φ vaut $r_2/r_1 \cdot r_3/r_2 \cdot r_1/r_3 \cdot r_2/r_1 \cdot r_3/r_2 \cdot r_1/r_3 = 1$.

Φ est donc une translation qui envoie Γ_1 sur lui-même, donc est l'identité, d'où la conclusion.

Solution de l'exercice 35



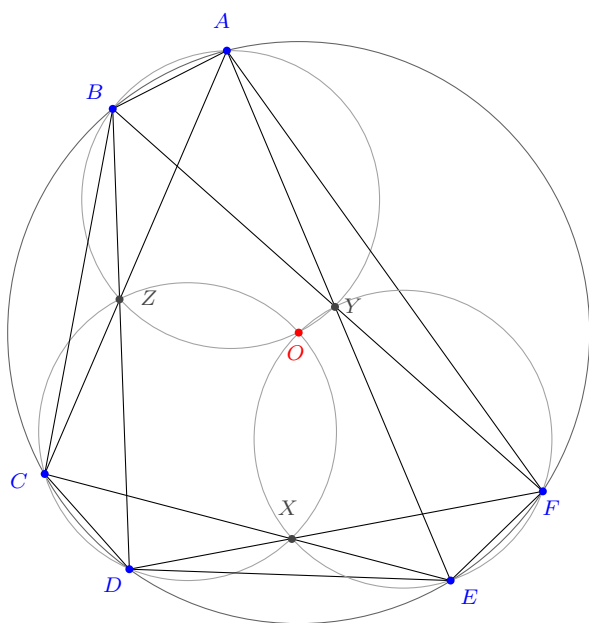
- a) D'après la construction du centre d'une similitude, B est le centre d'une similitude directe s qui envoie M sur P , C sur Q , le cercle Γ_1 sur Γ_2 . Par conséquent, s envoie (MC) sur (PQ) donc, comme (MC) passe par un point fixe K , (PQ) passe par $s(K)$, noté K' . De plus, on peut construire K' : c'est l'intersection des tangentes à Γ_2 en B et A' , où $A' = s(A)$. Or, A' est la seconde intersection de Γ_2 avec la tangente à Γ_1 en A (cela correspond au cas limite de $s(M)$ quand M tend vers A).
- b) On note O_1 et O_2 les centres des deux cercles, et J le milieu de $[PQ]$: les angles $\widehat{O_2JK'}$, $\widehat{O_2A'K'}$ et $\widehat{O_2BK'}$ sont droits donc O_2, K', A', B et J sont cocycliques sur le cercle de diamètre $[O'K']$. De plus, en utilisant que BAA' et BKK' sont semblables :

$$\widehat{K'KO_1} = \widehat{K'KB} + \widehat{BKO_1} = \widehat{A'AB} + \frac{1}{2}\widehat{BKA} = \frac{1}{2}\widehat{KAB} + \frac{1}{2}\widehat{BKA} = 90^\circ$$

donc K est aussi sur ce cercle.

On a donc $\widehat{BKJ} = 180 - \widehat{BK'J} = 180 - \widehat{BK'P} = 180 - \widehat{BKM}$ donc J, K et M sont alignés, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 36



On a clairement une rotation (donc une similitude) de centre le centre du cercle O qui envoie A sur B , C sur D et E sur F .

En utilisant le théorème 4.14 sur le couple $(A, C) \mapsto (B, D)$, A, B, Z et O sont cocycliques. Or, de même, en l'utilisant sur le couple $(A, E) \mapsto (B, F)$, A, B, Y et O sont cocycliques.

Ainsi, A, B, Z, O, Y sont cocycliques, et de la même manière également C, Z, O, X, D et E, X, O, Y, F .

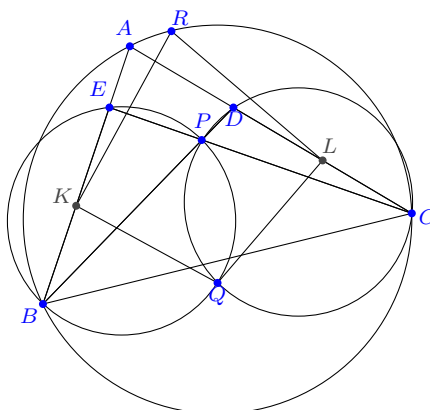
Encore une fois, philosophiquement parlant, avec tant de cercles on connaît tous les angles,

donc une simple chasse aux angles devrait suffire pour terminer. Effectivement :

$$\begin{aligned}
 \widehat{ZXY} &= \widehat{ZXO} + \widehat{OXY} \\
 &= \widehat{ODZ} + \widehat{OFY} \\
 &= \widehat{ODB} + \widehat{OFB} \\
 &= \widehat{OBD} + \widehat{OBF} \\
 &= \widehat{DBF}.
 \end{aligned}$$

On conclut cycliquement.

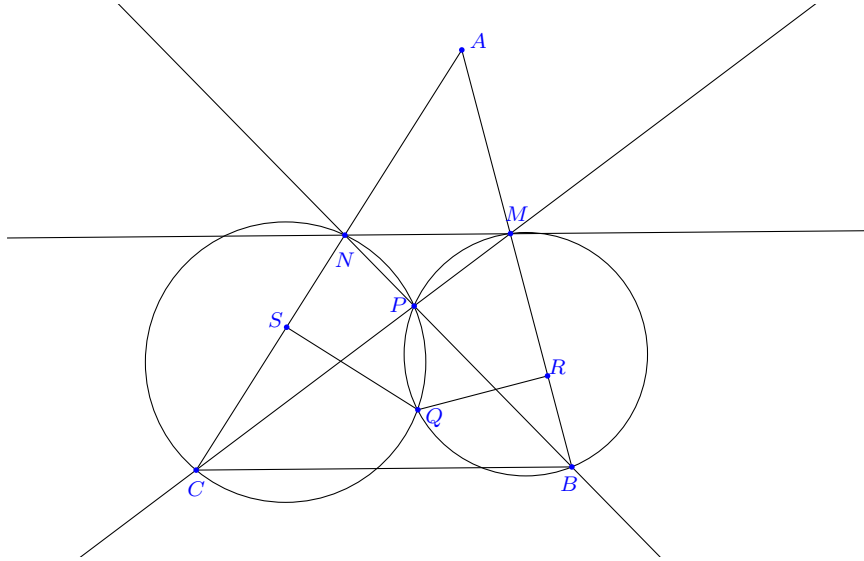
Solution de l'exercice 37



- a) Q est le centre de la similitude ρ envoyant B sur D et E sur C . Comme $BE = CD$, son facteur de dilatation est 1 i.e. c'est une rotation. En particulier, en appelant Q_1 et Q_2 les projections de Q sur (AB) et (CD) , comme ρ envoie Q_1 sur Q_2 , $QQ_1 = QQ_2$, i.e. Q est sur la bissectrice (le lecteur attentif remarquera qu'il faut vérifier que c'est bien la bissectrice intérieure, ce qui se fait facilement par un argument de continuité en regardant le cas extrémal).
- b) On remarque dans un premier temps que ρ envoie K sur L . En particulier, $QK = QL$, d'où également $RK = RL$ par Pythagore. De plus, l'angle de la rotation est \widehat{KQL} mais est également, la droite (EB) étant envoyé sur la droite (CD) , l'angle entre les droites (BA) et (CA) . En particulier, A, K, Q et L sont cocycliques d'après le théorème de l'angle inscrit. Comme il est également clair que K, Q, L et R sont cocycliques, K, Q, L, A et R sont cocycliques.

Le but de l'exercice est donc de montrer que R est le centre de la similitude envoyant K sur L et B sur C . Soit R' le centre de cette similitude. R' comme R est sur le cercle circonscrit à KQL . De plus, comme $KB = LC$, cette similitude est une rotation, d'où, comme pour R , $R'K = R'L$. Ainsi, R et R' font partie des deux points d'intersection de la médiatrice de $[KL]$ et du cercle circonscrit à KAL et un argument fumeux de positionnement (le lecteur pointilleux remarquera que c'est formalisable sans trop de difficulté) montre que c'est en fait les mêmes. D'où la conclusion.

Solution de l'exercice 38



Commençons par nous occuper de P : d'après le théorème de Ceva et celui de Thalès, (AP) est une médiane de ABC , ce qui signifie que \widehat{PAB} ne pourra pas s'exprimer de manière simple. On va donc utiliser de la trigonométrie.

On remarque que Q est le centre de la similitude directe s qui envoie B sur N et M sur C . Pour pouvoir faire des calculs trigonométriques sur \widehat{QAB} et \widehat{QAC} , on introduit les projetés orthogonaux R et S de Q sur (AB) et (AC) . On a $s(R) = S$ donc $\frac{QS}{QR}$ est égal au rapport de s , soit $\frac{NC}{BM} = \frac{AC}{AB}$ par Thalès. On en déduit $\frac{\sin \widehat{QAC}}{\sin \widehat{QAB}} = \frac{QS/QA}{QR/QA} = \frac{AC}{AB}$.

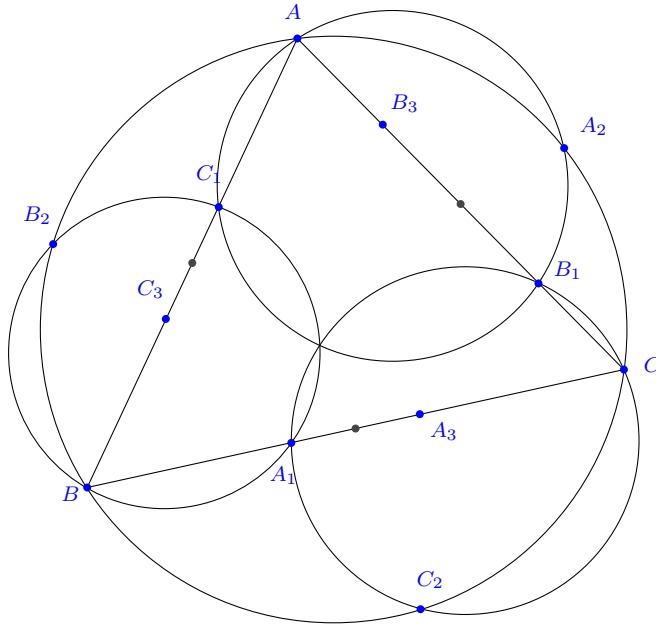
D'un autre côté, si M est le milieu de $[BC]$, on a en utilisant plusieurs fois la loi des sinus :

$$\frac{\sin \widehat{PAB}}{\sin \widehat{PAC}} = \frac{\sin \widehat{MAB}}{\sin \widehat{MAC}} = \frac{\frac{BM}{AM} \sin \widehat{ABM}}{\frac{CM}{AM} \sin \widehat{ACM}} = \frac{\sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{ACB}} = \frac{AC}{AB} = \frac{\sin \widehat{QAC}}{\sin \widehat{QAB}}$$

Autrement dit, $f(\widehat{PAB}) = f(\widehat{QAC})$ avec $f(x) = \frac{\sin x}{\sin(\widehat{BAC}-x)}$. On peut vérifier que cette fonction est strictement croissante, par exemple en la dérivant (exercice), d'où $\widehat{PAB} = \widehat{QAC}$.

Remarque 6.5. La trigonométrie est une méthode très puissante. Pour passer de formules sur des rapports de sinus (obtenues grâce à la loi des sinus et au théorème de Ceva trigonométrique) à des égalités d'angles, le fait que f soit strictement croissante est très utile et à retenir!

Solution de l'exercice 39



On a visiblement de nombreuses similitudes naturelles dans cette figure et qui dit similitudes dit triangles semblables. Après étude de quelques figures, il semble que l'on puisse montrer que $C_2AB \sim CB_3A_3$.

Effectivement, $\widehat{AC_2B} = \widehat{B_3CA_3}$ d'après le théorème de l'angle inscrit. Comme A_3 et B_3 sont plutôt défini en termes de longueur, on cherche également à démontrer que $CB_3/CA_3 = C_2A/C_2B$. Or, le rapport de dilatation de la similitude de centre C_2 envoyant B sur A et A_1 sur B_1 vaut selon la manière de le calculer C_2A/C_2B ou AB_1/BA_1 qui vaut exactement CB_3/CA_3 . On a donc bien $C_2AB \sim CB_3A_3$. Cycliquement, on sait que $A_2BC \sim AC_3B_3$ et $B_2CA \sim BA_3C_3$.

On connaît maintenant très bien tous les angles. Philosophiquement, on sait donc qu'il suffit de faire une chasse aux angles. Effectivement :

$$\begin{aligned} \widehat{B_2A_2C_2} &= \widehat{B_2AC_2} = \widehat{BAC_2} + \widehat{B_2AC} - \widehat{BAC} \\ &= \widehat{A_3B_3C} + \widehat{BC_3A_3} - \widehat{BAC} = \widehat{B_3A_3C_3}. \end{aligned}$$

D'où la conclusion en raisonnant cycliquement.