



Association pour l'animation mathématique

COUPE ANIMATH

Mardi 6 juin 2017

Durée : 3 heures (collégiens), 4 heures (lycéens)

## Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées** (sauf pour l'exercice 1), où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

**Les collégiens traitent les exercices 1 à 5. Les lycéens traitent les exercices 3 à 7.**

**Chaque exercice est noté sur 7 points.**

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

### Énoncés collègue

*Exercice 1.* N.B. Dans cet exercice, et uniquement celui-ci, on demande une réponse sans justification.

Soit  $m > n > p$  trois nombres (entiers positifs) premiers tels que  $m + n + p = 74$  et  $m - n - p = 44$ . Déterminer  $m, n$  et  $p$ .

(Un nombre premier est un entier strictement plus grand que un, et dont les seuls diviseurs sont un et lui-même.)

*Exercice 2.* Montrer que si  $n$  est un nombre entier à cinq chiffres, et  $m$  le nombre obtenu en renversant l'ordre des chiffres (par exemple si  $n = 34170$  alors  $m = 07143$ ), alors l'écriture de  $n + m$  comporte au moins un chiffre pair.

### Énoncés communs

*Exercice 3.* Soit  $ABC$  un triangle tel que  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . La médiatrice de  $[AC]$  coupe  $(AB)$  en  $P$ , et la médiatrice de  $[AB]$  coupe  $(AC)$  en  $Q$ . Montrer que  $PQ = BC$ .

*Exercice 4.* On donne cinq nombres dans l'ordre croissant, qui sont les longueurs des côtés d'un quadrilatère (non croisé, mais non nécessairement convexe, c'est-à-dire qu'une diagonale n'est pas nécessairement à l'intérieur du polygone) et d'une de ses diagonales  $D$ . Ces nombres sont 3, 5, 7, 13 et 19. Quelle peut être la longueur de la diagonale  $D$  ?

*Exercice 5.* On a écrit un nombre au tableau. À chaque étape, on lui ajoute le plus grand de ses chiffres (par exemple, si on a écrit 142, le nombre suivant sera 146). Quel est le plus grand nombre possible de nombres impairs que l'on peut écrire consécutivement en procédant de la sorte ?

### Énoncés lycée

*Exercice 6.* Déterminer tous les entiers  $n \geq 2$  tels que pour tout entier  $d \geq 2$ , si  $d$  est un diviseur de  $n$  alors  $d - 1$  est un diviseur de  $n - 1$ .

*Exercice 7.* Un stage de mathématiques contient exactement un million d'élèves, certains d'entre eux étant amis (si  $A$  est un ami de  $B$ , alors  $B$  est un ami de  $A$ ).

- On suppose que chaque élève a au plus deux amis. Montrer qu'il est possible d'aligner les élèves de telle manière que si deux élèves sont amis, il y a au plus 2017 élèves entre eux.
- On suppose maintenant que chaque élève a au plus trois amis. Montrer que ce n'est plus forcément possible.