



Association pour l'animation mathématique

COUPE ANIMATH

Mardi 2 juin 2015

Durée : 3 heures (collégiens), 4 heures (lycéens)

## Instructions

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- ▷ On demande des solutions **complètement rédigées** (sauf pour l'exercice 1), où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

**Les collégiens traitent les exercices 1 à 5. Les lycéens traitent les exercices 4 à 8.  
Chaque exercice est noté sur 7 points.**

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

## Énoncés collègue

**Exercice 1.** On dispose de trois opérations sur les entiers :

- ▷ L'opération A qui consiste à multiplier par 2 et à ajouter 4 au résultat.
- ▷ L'opération B qui consiste à multiplier par 4 et à ajouter 16 au résultat.
- ▷ L'opération C qui consiste à multiplier par 5 et à ajouter 25 au résultat.

a) Déterminer un entier  $x$  tel qu'en partant de  $x$  et après avoir utilisé successivement les opérations A, B et C dans cet ordre, on obtienne 1945.

b) Déterminer tous les entiers  $x$  tels qu'en partant de  $x$  et en utilisant successivement deux opérations différentes, on obtienne 2015.

**Exercice 2.** Soit ABC un triangle rectangle en A. Déterminer le ou les points P du périmètre de ABC tel(s) que  $PA + PB + PC$  soit maximal.

**Exercice 3.** Pour tout entier  $n$ , on note  $f(n)$  l'entier écrit en inversant l'ordre des chiffres. Par exemple,  $f(2538) = 8352$ .

Déterminer tous les entiers  $n$  possédant 4 chiffres tels que  $f(n) = 4n + 3$ .

## Énoncés communs

**Exercice 4.** Soit ABC un triangle. On choisit M sur le côté [BC], N sur le côté [CA] et P sur le côté [AB] de sorte que  $BM = BP$  et  $CM = CN$ . On note  $D_B$  la droite passant par B et perpendiculaire à [MP] et  $D_C$  la droite passant par C et perpendiculaire à [MN]. On suppose que les droites  $D_B$  et  $D_C$  se rencontrent en I. Prouver que les angles  $\widehat{IPA}$  et  $\widehat{INC}$  sont égaux.

**Exercice 5.** 2015 entiers strictement positifs sont placés autour d'un cercle. Montrer qu'il est possible de trouver deux entiers voisins tels que, après les avoir supprimés, les nombres restants ne puissent pas être séparés en deux groupes de même somme.

## Énoncés lycée

**Exercice 6.** On note  $[x]$  la partie entière de  $x$ . Par exemple,  $[15/4] = 3$ . On note  $f(n) = \left[ \frac{n}{[\sqrt{n}]} \right]$ . Trouver tous les entiers  $n$  tels que  $f(n+1) > f(n)$ .

**Exercice 7.**  $n$  points sont placés sur un cercle de diamètre  $n/\pi$ . On suppose que la longueur de n'importe quel arc entre deux de ces  $n$  points est strictement plus grande que le nombre de points sur cet arc (sans compter les points sur les extrémités). Montrer que le cercle peut être subdivisé en  $n$  arcs de même longueur contenant exactement un point chacun.

**Exercice 8.** Soit  $p, q, r$  des nombres premiers tels que chacun des trois nombres  $pq + 1, pr + 1$  et  $qr - p$  est le carré d'un entier. Prouver que  $p + 2qr + 2$  est également le carré d'un entier.