Chers élèves,

Vous étiez près de 350, le 5 juin 2012, qui cherchiez à résoudre quatre des exercices ci-dessous (3 à 6 pour les élèves de première, 2 à 5 pour les secondes et 1 à 4 pour les collégiens), et 67 d'entre vous ont été sélectionnés pour le prochain stage olympique, du 20 au 30 août à l'Internat d'excellence de Montpellier (34). Les plus jeunes pourront participer à d'autres stages même s'ils n'ont pas été acceptés cette année.

Les mathématiques olympiques sont sensiblement différentes de ce que vous faites au lycée ou au collège, et certains des exercices proposés étaient réellement difficiles, même s'ils n'exigeaient pas de connaissances particulières. Mais j'espère que l'expérience a été profitable pour tout le monde ! Comme promis, nous vous renvoyons ci-joint vos copies corrigées ainsi que les solutions détaillées des six exercices.

L'association Animath tâche d'assurer gratuité ou la quasi-gratuité de l'ensemble de ses activités. Si vous souhaitez soutenir son action, vous pouvez adhérer à l'association (la cotisation annuelle est de 5 euros pour les moins de 18 ans et de 20 euros pour les plus de 18 ans) ou faire un don. Tous les renseignements sont en ligne à l'adresse :
http ://www.animath.fr/spip.php ?rubrique169

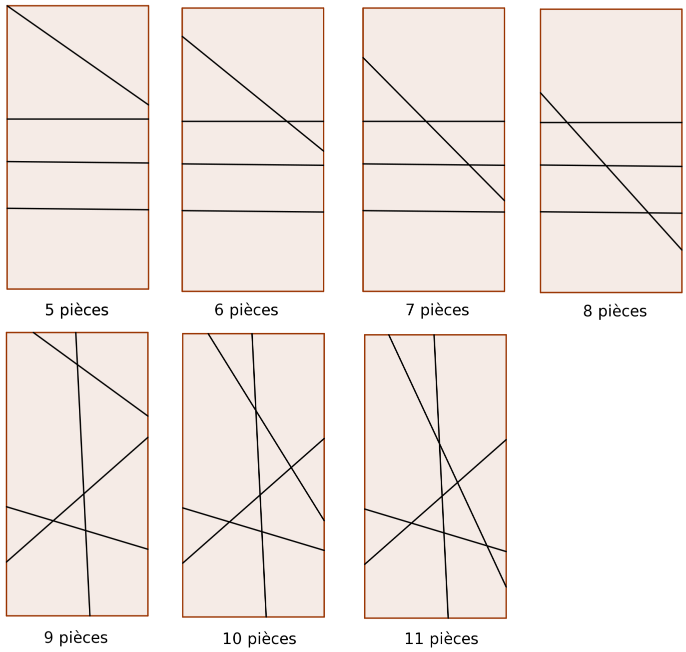
Amicalement,

François LO JACOMO

Exercice 1. Mathieu prend une feuille de papier rectangle et y trace à la règle quatre lignes droites distinctes, dont chacune va d'un côté à un autre côté (aucune de ces droites ne peut être un bord du rectangle). Ensuite, il coupe sa feuille de papier le long de chaque droite tracée. Combien de pièces peut-il obtenir ? Esquisser un exemple pour chaque nombre de pièces possible, et expliquez pourquoi il n'y a pas d'autre possibilité.

Solution

On va placer les 4 droites les unes après les autres. La première droite coupe nécessairement le rectangle en deux parties. La seconde peut traverser l'une de ces deux parties, ou chacune des deux : il faut pour cela qu'elle coupe la première. De même la troisième droite peut couper 0, 1 ou 2 des deux premières, donc traverser 1, 2 ou 3 des parties déjà présentes, créant 1, 2 ou 3 nouvelles parties. Et la quatrième crée 1, 2, 3 ou 4 nouvelles parties. En définitive, après découpage, nous aurons 2 + (1 ou 2) + (1 ou 2 ou 3) + (1 ou 2 ou 3 ou 4) pièces, soit toutes les possibilités entre 5 et 11. Plus précisément, le nombre de pièces est égal à 5 + nombre de points d'intersection (si des points d'intersection appartiennent à plus de deux droites, ils doivent être comptés plusieurs fois, mais on ne demandait pas de se préoccuper de ce cas particulier). La figure de la page suivante illustre chacun des cas.



Exercice 2. Un prisonnier est au centre d'un cercle de rayon 10 mètres. Chaque minute, il annonce une direction qu'il veut prendre, et c'est au gardien de choisir entre cette direction et la direction opposée. Le prisonnier avance alors d'un mètre dans la direction choisie par le gardien. Le prisonnier a-t-il une stratégie garantissant qu'il sortira finalement du cercle, même si le gardien veut l'en empêcher ?

Solution

Nous allons montrer que le prisonnier possède une stratégie gagnante lui permettant de sortir du cercle. Notons O le centre du cercle et P_n la position du prisonnier après la $n^{\text{ième}}$ minute. Toutes les distances seront exprimées en mètres.

La stratégie que le prisonnier doit adopter est la suivante. À la première minute, il indique une direction quelconque, ce qui l'amènera à un point P_1 tel que $OP_1 = 1$. Puis à la $(n+1)^{\text{ième}}$ minute, le prisonnier, alors en P_n, va indiquer au gardien une direction perpendiculaire à la droite OP_n ; quel que soit le choix du gardien, le prisonnier se retrouvera alors en un point P_{n+1} tel que $P_nP_{n+1} = 1$ et tel que le triangle OP_nP_{n+1} soit rectangle en P_n ; en particulier, la distance OP_{n+1} ne dépendra pas du choix du gardien et sera strictement supérieure à OP_n.

On a donc trouvé une stratégie permettant au prisonnier, à chaque minute, d'augmenter strictement sa distance au centre du cercle. **Ceci ne suffit pas à conclure qu'il pourra en sortir** ; en effet, ce n'est pas parce que la distance OP_n est strictement croissante qu'elle dépassera forcément 10. (De façon analogue, la suite $u_n = 2 - \frac{1}{n}$ est strictement croissante, mais aucun de ses termes n'est supérieur à 10). Pour conclure, il faut calculer explicitement la distance OP_n ; comme $OP_1^2 = 1$ et comme, par le théorème de Pythagore, $OP_{n+1}^2 = OP_n^2 + 1$, on en déduit que pour tout n, $OP_n^2 = n$ et donc $OP_n = \sqrt{n}$. En particulier, $OP_{100} = 10$; le prisonnier sort donc du cercle au bout de la $100^{\text{ième}}$ minute.

Quelques remarques après correction. À chaque minute, le prisonnier doit annoncer une direction au gardien. Par *direction*, on entend n'importe quelle demi-droite d'origine la position actuelle P_n du prisonnier. En particulier, il n'y a pas que quatre, ni même huit directions possibles (haut, bas, gauche, droite, et les quatre directions inclinées de 45° par rapport aux précédentes), mais une infinité. D'ailleurs, il est possible de démontrer qu'aucune stratégie comprenant uniquement des mouvements dans les huit directions précédemment citées ne permet au prisonnier de sortir du cercle.

D'autre part, si vous annoncez qu'une stratégie permet au prisonnier de sortir du cercle quels que soient les choix du gardien, il faut le démontrer rigoureusement, et il ne suffit pas qu'elle *ait l'air* de marcher. Plusieurs d'entre vous ont ainsi proposé des stratégies et ont montré que les premières étapes de celles-ci permettaient au prisonnier de s'éloigner du centre du cercle ; puis ils ont dit (sans le démontrer) qu'en répétant les mêmes mouvements, le prisonnier allait continuer à progressivement s'éloigner du centre jusqu'à sortir du cercle. En fait, dans presque tous les cas, ces stratégies ne fonctionnaient pas. N'oubliez donc pas de démontrer rigoureusement tout ce que vous affirmez. Et si vous n'êtes vous-même pas convaincus que ce que vous dites est vrai, vous ne risquez pas de convaincre le correcteur.

Exercice 3. Monsieur et Madame Mathon se partagent un plateau de sept fromages. Ils désirent en prendre chacun trois en entier, et partager le septième de sorte que chacun reçoive le même poids total de fromage. Est-il possible, quels que soient les poids des sept fromages, de choisir les trois fromages de l'un, les trois fromages de l'autre et comment découper le septième fromage de sorte que leur désir soit satisfait ?

Solution

Soient $0 < a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_7$ les poids de fromages dans l'ordre croissant.

On donne les fromages de poids a_1, a_3 et a_5 à Monsieur Mathon et les fromages de poids a_2, a_4 et a_6 Màdame Mathon.

On a $a_1 \leq a_2$, $a_3 \leq a_4$ et $a_5 \leq a_6$, donc on a

$$a_1 + a_3 + a_5 \leq a_2 + a_4 + a_6.$$

Mais, on a $a_2 \leq a_3$, $a_4 \leq a_5$ et $a_6 \leq a_7$, donc on a

$$a_2 + a_4 + a_6 \leq a_3 + a_5 + a_7 < a_1 + a_3 + a_5 + a_7.$$

Donc, la différence de poids des fromages de deux personnes est

$$(a_2 + a_4 + a_6) - (a_1 + a_3 + a_5) < a_7.$$

Donc, le septième poids est suffisament lourd pour combler la différence, et une fois cette différence comblée, ce qui reste du septième fromage est distribué équitablement.

Remarque

On peut construire plusieurs autres solutions, mais c'est toujours le fromage le plus lourd qui sera découpé pour rétablir l'équilibre, car il se peut qu'à lui tout seul il pèse plus de la moitié du poids total P. Par exemple, on peut donner à Madame l'un quelconque des fromages a_1 ou a_2, l'un quelconque de a_3 et a_4, l'un quelconque de a_5 ou a_6 : si celui qui a la plus petite part prend tout le gros fromage, il a nécessairement plus que l'autre, donc on peut partager a_7 pour rétablir l'équilibre. Ou encore, les quatre nombres $p_1 = a_1 + a_2 + a_3$, $p_2 = a_1 + a_2 + a_6$, $p_3 = a_1 + a_5 + a_6$ et $p_4 = a_4 + a_5 + a_6$ vérifient : $p_1 \leq p_2 \leq p_3 \leq p_4$, $p_{i+1} < p_i + a_7$, et $p_1 < \frac{P}{2} < p_4 + a_7$ car $p_1 + p_4 + a_7 = P$. Si $p_i + a_7 \leq \frac{P}{2}$, $p_{i+1} < \frac{P}{2}$, ce qui permet d'en trouver un tel que $p_i < \frac{P}{2} < p_i + a_7$. Autre raisonnement : on distribue le plus équitablement possible les six fromages $a_1 \dots a_6$: si la différence entre les deux portions était supérieure à a_7, la distribution ne serait pas la plus équitable possible, car en échangeant le plus lourd fromage de celui qui a la plus grosse portion avec un fromage quelconque de l'autre, on obtiendrait une distribution plus équitable. Nous ne détaillerons pas davantage ces différentes variantes.

Exercice 4. Soient b et d des nombres réels non nuls tels que $b + d$ soit lui aussi non nul. Mathias affirme que l'identité $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ est vraie pour tous les nombres réels a et c : elle s'appelle "additivité des fractions". Mathilde pense que cette additivité des fractions est correcte si et seulement s'il existe un nombre réel m tel que $a = mb^2$ et $c = -md^2$. Leur professeur rappelle que l'on peut additionner des fractions comme Mathias le propose si et seulement si elles ont le même dénominateur, c'est-à-dire $b = d$. Un inspecteur affirme que cette "additivité des fractions" est toujours fausse. Qui a raison : Mathias, Mathilde, le professeur, l'inspecteur, ou aucun des quatre ? Justifiez soigneusement votre réponse.

Solution

Examinons successivement les affirmations des uns et des autres.

- celle de Mathias :

Il suffit de trouver un contre-exemple pour mettre en défaut une affirmation générale.

Pour $a = b = c = d = 1$, on a $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 2$ alors que $\frac{a+c}{b+d} = 1$. Il n'y a pas égalité, donc l'affirmation de Mathias est fausse.

- celle du Professeur :

Celui-ci fait également une affirmation générale, et le même contre-exemple (puisque $b = d$) montre qu'il a tort lui aussi.

- celle de l'Inspecteur :

Cette fois, pour mettre en défaut l'affirmation de l'Inspecteur, il suffit de trouver des valeurs pour lesquelles l'additivité des fractions est vraie. Par exemple, on peut choisir $a = c = 0$ et $b = d = 1$, puisqu'alors $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 0 = \frac{a+c}{b+d}$. Ainsi, l'Inspecteur a tort.

- celle de Mathilde :

C'est la seule des quatre qui puisse être juste, encore faut-il le prouver.

Dans un premier temps, considérons des nombres a, b, c, d, m tels que b, d et $b + d$ soient non nuls, et avec $a = mb^2$ et $c = -md^2$.

On a d'une part : $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = mb - md = m(b - d)$.

d'autre part : $\frac{a+c}{b+d} = \frac{mb^2-md^2}{b+d} = \frac{m(b^2-d^2)}{b+d} = \frac{m(b-d)(b+d)}{b+d} = m(b - d)$.

On constate donc que, dans ces conditions, l'additivité des fractions est vraie.

Mais, attention, cela ne suffit pas encore pour pouvoir conclure que Mathilde a raison. En effet, Mathilde affirme non seulement que l'additivité des fractions est vraie si l'on choisit les nombres de la façon indiquée, mais aussi qu'elle n'est vraie que dans ce cas là. Il nous faut maintenant prouver la réciproque du résultat ci-dessus, à savoir que si a, b, c, d sont des nombres pour lesquels b, d et $b + d$ ne sont pas nuls et $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ alors il existe un réel m tel que $a = mb^2$ et $c = -md^2$.

Si quatre nombres a, b, c, d (avec b, d et $b+d$ non nuls) vérifient $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ (1), multiplions tout par $bd(b+d)$ afin d'éliminer les dénominateurs : l'égalité (1) devient $ad(b+d)+cb(b+d) = (a + c)bd$, soit : $ad^2 + cb^2 = 0$, qui s'écrit aussi $\frac{a}{b^2} = -\frac{c}{d^2}$.

Posons alors $m = \frac{a}{b^2}$. On a clairement $a = mb^2$. Mais aussi, d'après (2), $m = -\frac{c}{d^2}$, donc $c = -md^2$.

Nous avons atteint notre objectif et nous pouvons maintenant affirmer que Mathilde a effectivement raison.

Exercice 5. En région parisienne, les numéros de téléphone fixe se composent des chiffres 01 suivis de huit autres chiffres (par exemple 01.99.98.10.00 ou 01.00.00.35.77 etc.). Pour limiter les appels par erreur, on a décidé que si l'on compose un numéro de téléphone en ne se trompant que d'un seul chiffre, on tombe toujours sur un numéro non attribué : par exemple si 01.99.98.10.00 est attribué, alors 01.89.98.10.00 et 01.99.98.10.30 sont non attribués. Combien de numéros de téléphone différents peut-on attribuer au maximum en région parisienne ? Justifiez soigneusement votre réponse.

Remarques préliminaires

Lorsque l'on pose une question du type "quelle est la plus grande quantité de...", la démonstration comporte *deux étapes* : il faut montrer d'une part qu'il est possible d'en obtenir un certain nombre (la plupart du temps en donnant un exemple), et d'autre part qu'il est impossible d'en obtenir plus. Peut-être certains ont-ils pensé que les mots "au maximum" voulaient dire qu'il fallait juste trouver une borne supérieure. Cette interprétation ne tient pas la route : il aurait alors suffi de dire 10^8 pour résoudre l'exercice !

La première partie valait 3 points et la deuxième partie, 4 points. Mais certaines erreurs grossières justifiaient à elles seules un 0 : réponse non-entière ou supérieure à la quantité totale de numéros disponibles, erreurs de manipulation des opérations arithmétiques de base... Les idées sont parfois si confuses que localiser précisément l'erreur s'avère très difficile, d'autant plus qu'il y en a souvent plusieurs !

En revanche, dès lors qu'une copie ne contenait pas d'erreur grossière de ce genre et contenait au moins une affirmation juste (sans compter la remarque qu'il y a 10^8 numéros au total), elle méritait un point. Beaucoup ont cru que comme il existait 72 façons de se tromper sur un numéro, on ne pouvait pas attribuer plus d'un numéro sur 73. Ce n'est là qu'un des résultats, parmi plus de trente différents, trouvés dans les copies, et c'est faux car un numéro erroné peut correspondre à plusieurs numéros attribués. Toutefois, ceux qui ont fait ce raisonnement, mais qui ont remarqué et expliqué leur erreur (et qui n'en ont pas fait d'autre), ont gagné un point supplémentaire.

Quelques conseils

Soyez précis et détaillés dans votre rédaction. Faites clairement apparaître la structure logique, pour qu'on sache quels arguments servent à démontrer quelles affirmations. Définissez toujours clairement les objets que vous manipulez. Evitez les périphrases, introduisez plutôt des notations et des définitions. Attention aux pronoms, aux "ce", "cela" et autres mots ambigus de ce genre. Attention aux "de la même façon", "de même", "par analogie"... A chaque fois que vous écrivez de telles formulations vagues ou elliptiques, posez-vous deux questions. La plus importante : "suis-je bien certain que j'ai une idée claire de ce que je suis en train d'écrire ?" Et ensuite "le correcteur va-t-il comprendre la même chose ?" Mais n'oubliez pas : *ce qui se conçoit bien s'énonce clairement.*

Lorsque la réponse est "non", essayez de détailler. Dites-vous que plus vous détaillez, plus vous avez de chances d'attraper une erreur que vous n'aviez pas vue et donc d'obtenir un résultat juste à la fin. Dans le corrigé ci-dessous, volontairement très détaillé, *absolument chaque phrase*, et *presque chaque mot*, sert à quelque chose. Quand vous rédigez vous-même, vous pouvez vous permettre de sauter certaines étapes dans votre copie, mais certainement pas dans votre pensée.

Solution

Le 01 n'a aucune importance ici ; on va donc le laisser tomber, et traiter les numéros comme s'ils ne contenaient que 8 chiffres. On dira que deux numéros sont *adjacents* s'ils ne diffèrent qu'en une seule position, en appelant "position" l'une des 8 positions où sont situés les chiffres d'un numéro.

Montrons d'abord qu'il est effectivement possible d'attribuer 10 000 000 numéros.

Choisissons arbitrairement les 7 premiers chiffres du numéro, ce qui représente bien 10^7, soit dix millions de possibilités distinctes. A chacune d'elles, associons un huitième chiffre de sorte que la somme des huit chiffres soit divisible par 10. Par exemple, à 44 27 66 7, qui vérifie : $4+4+2+7+6+6+7 = 36$ on associe 4 de sorte que $(4+4+2+7+6+6+7)+4 = 40$ soit divisible par 10, et on décide que parmi les numéros commençant par 44 27 66 7 c'est 44 27 66 74 qui sera attribué : c'est bien toujours possible quels que soient les sept premiers chiffres. Or si l'on change un et un seul des huit chiffres, on augmente ou diminue la somme d'une différence de deux chiffres distincts, nécessairement comprise entre 1 et 9. La nouvelle somme ne peut pas être divisible par 10, donc le numéro obtenu ne peut pas être attribué. Cet exemple montre à lui seul qu'il est possible d'attribuer 10 000 000 numéros distincts vérifiant la condition de l'énoncé. Et ce n'est pas le seul exemple !

Montrons maintenant qu'il n'est jamais possible d'attribuer plus de 10 000 000 numéros.

Variante A

Considérons un ensemble de numéros attribués conforme aux conditions de l'énoncé. Deux d'entre eux ne peuvent jamais avoir les mêmes chiffres dans les 7 premières positions (qui suivent le 01), car alors ces numéros seraient adjacents (ils ne différeraient que par la dernière position). Donc, pour chaque suite de 7 chiffres, il y a au plus un numéro attribué qui commence par cette suite-là. Il y a donc au plus 10 000 000 numéros attribués.

Variante B

On remarque d'abord que chaque numéro est adjacent à exactement 72 autres numéros. En effet, considérons un numéro X. Si X' est un autre numéro adjacent à X, X' est entièrement déterminé par le choix de la position i par laquelle il diffère de X, et du chiffre qui occupe cette i-ième position, à condition que celui-ci soit différent du i-ième chiffre de X (sinon on aurait $X' = X$) ; réciproquement, chacun de ces choix fournit un numéro adjacent à X. Etant donné qu'il y a 8 positions, et que quelle que soit la position choisie, 9 chiffres peuvent l'occuper, il y a donc $8 \times 9 = 72$ possibilités au total.

Considérons un ensemble de numéros attribués conforme aux conditions de l'énoncé. Soit a le nombre de numéros attribués, $n = 10^8$ le nombre de numéros total. On appelle m le nombre de couples (A, B) où A est un numéro attribué et B un numéro qui lui est adjacent (donc qui n'est pas attribué). Estimons m de deux façons différentes :

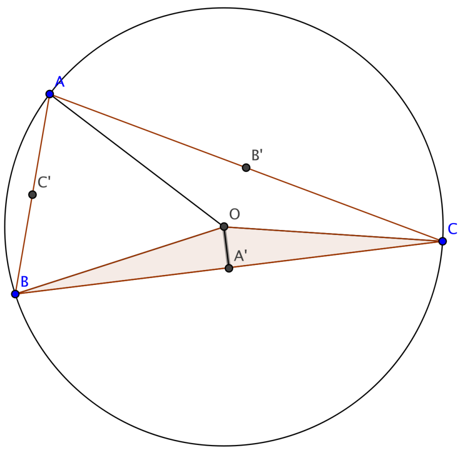
- Il y a a façons de choisir A. D'après ce qui précède, pour chaque valeur de A, il y a 72 façons de choisir B. Donc $m = 72a$.
- Il y a $n-a$ façons de choisir B. Fixons la valeur de B, et choisissons une position i. Alors parmi les numéros qui sont adjacents à B par la position i, au plus un est attribué (car ces 9 numéros sont tous adjacents entre eux). Il y a donc au plus 8 numéros attribués adjacents à B. Attention ! rien ne permet d'affirmer a priori qu'il y en a exactement 8.

Mais on a $m \leq 8(n-a)$. En rassemblant les deux conditions, il vient : $72a \leq 8(n-a)$, soit $80a \leq 8n$, donc $a \leq \frac{n}{10} = 10\ 000\ 000$.

Exercice 6. Soit ABC un triangle d'aire S. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ les longueurs de ses côtés, et $a' = AA'$, $b' = BB'$, $c' = CC'$ les longueurs de ses médianes, où A', B',C' sont les milieux respectifs de BC, CA, AB. Soit R le rayon du cercle circonscrit de ABC. Montrer que $aa' + bb' + cc' \leq 2S + R(a+b+c)$ si ABC est acutangle (c'est-à-dire si tous les angles de ABC sont inférieurs à 90°). Est-ce que cette inégalité est également vraie pour tous les triangles obtusangles (dont un angle est supérieur à 90°) ?

Solution

Notons O le centre du cercle circonscrit. Commençons par traiter le cas du triangle acutangle. Dans ce cas O est à l'intérieur du triangle ABC. Pour le voir on peut appliquer la loi de l'angle inscrit/l'angle au centre : par exemple $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$. Or, comme ABC est acutangle, $\widehat{BAC} < 90^\circ$, donc $\widehat{BOC} < 180^\circ$, ce qui signifie que O se trouve du même côté de la droite (BC) que A. On procède de même pour les côtés AB et AC et on conclut que O est à l'intérieur de ABC.



On peut donc écrire que : $S = |AOB| + |BOC| + |COA|$ en notant $|XYZ|$ l'aire du triangle XYZ. Par ailleurs, en appliquant la formule *aire du triangle* $= \frac{1}{2} \times$ *base* $\times$ *hauteur* dans chacun des triangles AOB, BOC et COA, on obtient : $|AOB| = \frac{1}{2}AB \times OC'$, $|BOC| = \frac{1}{2}BC \times OA'$, $|COA| = \frac{1}{2}AC \times OB'$. D'où $2S = aOA' + bOB' + cOC'$. L'inégalité à démontrer est donc équivalente à

$$aa' + bb' + cc' \leq aOA' + bOB' + cOC' + R(a+b+c)$$

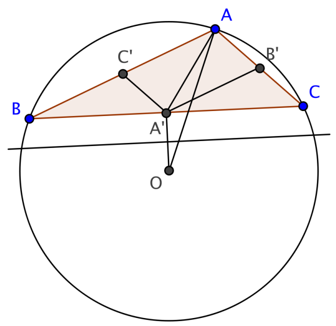
Pour démontrer cette dernière inégalité, remarquons que dans le triangle AOA', l'inégalité triangulaire donne $AA' \leq AO + OA'$, soit $a' \leq OA' + R$. En multipliant cette inégalité par a, on obtient

$$aa' \leq aOA' + Ra$$

De même : $bb' \leq bOB' + Rb$, et $cc' \leq cOC' + Rc$. On obtient le résultat en sommant ces trois inégalités.

Contrairement à ce que beaucoup ont imaginé, le cas d'égalité ne correspond pas aux triangles rectangles mais au triangle équilatéral. Pour le prouver (même si ce n'était pas demandé), on remarque que l'on a égalité si et seulement si $AA' = OA+OA'$, $BB' = OB+OB'$ et $CC' = OC+OC'$, ou encore si et seulement si A', O, A sont alignés dans cet ordre, ainsi que B', O, B et C', O, C. Si ces trois conditions sont satisfaites, alors A est sur la médiatrice (OA') du segment $[BC]$, donc ABC est isocèle en A. De même ABC est isocèle en B (et en C), donc ABC est équilatéral. Réciproquement, le triangle équilatéral vérifie ces trois conditions.

La démonstration ci-dessus reste valable lorsque ABC est rectangle, mais plus lorsqu'il est obtusangle, car O ne se trouve plus à l'intérieur du triangle ABC et on ne peut plus écrire que $S = |AOB| + |BOC| + |COA|$. Néanmoins, l'inégalité reste vraie. Quitte à renommer les points, on peut supposer que c'est l'angle $\widehat{A}$ qui est obtus. Alors O est dans le demi-plan délimité par la droite (BC) et qui ne contient pas A. On a donc : $a' = AA' < R$ (pour bien justifier cette inégalité, on peut par exemple évoquer la position de A par rapport à la médiatrice du segment $[OA']$, ou écrire la loi des sinus ou le théorème d'Al Kashi dans le triangle OAA' qui est obtus en A').



Par ailleurs : $BB' < BA' + A'B' = \frac{a+c}{2}$, et : $CC' < CA' + A'C' = \frac{a+b}{2}$. Il suffit donc de montrer que

$$aR + (b+c)\frac{a}{2} + bc \leq 2S + R(a+b+c)$$

Or $2S = bc.\sin\widehat{A}$ et $\frac{a}{2} = R.\sin\widehat{A}$ par la loi des sinus dans le triangle ABC. L'inégalité équivaut donc à

$$bc(1-\sin\widehat{A}) \leq R(b+c)(1-\sin\widehat{A})$$

ou encore, après division par $1-\sin\widehat{A}$ (qui est un nombre strictement positif)

$$bc \leq R(b+c)$$

Pour conclure, on remarque que les inégalités $b \leq 2R$ et $c \leq 2R$ entraînent $\frac{1}{2}bc \leq Rc$ et $\frac{1}{2}bc \leq Rb$. On obtient le résultat en sommant ces deux dernières inégalités.

Remarques

Personne n'a résolu la deuxième question. c'est pourquoi il suffisait de traiter parfaitement le cas acutangle et de remarquer que la même preuve ne marchait plus dans le cas obtusangle pour avoir 7/7.