première

stage olympique de Montpellier

20 - 30 août 2012

test de sélection
du 5 juin 2012

*Durée : **4 heures**.*

- ***Vous devez démontrer tout ce que vous affirmez**. N'hésitez pas à écrire les idées de démonstration que vous avez : même si la démonstration est incomplète, une idée juste peut faire gagner des points.*
- *Aucun document n'est autorisé, pas même les calculatrices.*
- ***Important** : chaque exercice sera corrigé par un correcteur différent. Ne faites **jamais deux exercices différents sur une même feuille**. Et n'oubliez pas d'écrire **sur chaque feuille vos nom, prénom et classe** (1ère. 2e, 3e, 4e ...).*
- *Pour faciliter la correction (chaque correcteur corrige un exercice), les exercices destinés aux élèves de première sont numérotés de 3 à 6, ceux destinés aux élèves de seconde, de 2 à 5 et ceux destinés aux élèves de collège, de 1 à 4.*

Exercice 3

Monsieur et Madame Mathon se partagent un plateau de sept fromages. Ils désirent en prendre chacun trois en entier, et partager le septième de sorte que chacun reçoive le même poids total de fromage. Est-il possible, quels que soient les poids des sept fromages, de choisir les trois fromages de l'un, les trois fromages de l'autre et comment découper le septième fromage de sorte que leur désir soit satisfait ?

Exercice 4

Soient b et d des nombres réels non nuls tels que $b+d$ soit lui aussi non nul. Mathias affirme que l'identité $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$ est vraie pour tous les nombres réels a et c : elle s'appelle "additivité des fractions". Mathilde pense que cette additivité des fractions est correcte si et seulement s'il existe un nombre réel m tel que $a=mb^2$ et $c=-md^2$. Leur professeur rappelle que l'on peut additionner des fractions comme Mathias le propose si et seulement si elles ont le même dénominateur, c'est-à-dire $b = d$. Un inspecteur affirme que cette "additivité des fractions" est toujours fausse. Qui a raison : Mathias, Mathilde, le professeur, l'inspecteur, ou aucun des quatre ? Justifiez soigneusement votre réponse.

Exercice 5

En région parisienne, les numéros de téléphone fixe se composent des chiffres 01 suivis de huit autres chiffres (par exemple 01.99.98.10.00 ou 01.00.00.35.77 etc.). Pour limiter les appels par erreur, on a décidé que si l'on compose un numéro de téléphone en ne se trompant que d'un seul chiffre, on tombe toujours sur un numéro non attribué : par exemple si 01.99.98.10.00 est attribué, alors 01.89.98.10.00 et 01.99.98.10.30 sont non attribués. Combien de numéros de téléphone différents peut-on attribuer au maximum en région parisienne ? Justifiez soigneusement votre réponse.

Exercice 6

Soit ABC un triangle d'aire S. On note $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ les longueurs de ses côtés, et $a' = AA'$, $b' = BB'$, $c' = CC'$ les longueurs de ses médianes, où A', B', C' sont les milieux respectifs de BC, CA, AB. Soit R le rayon du cercle circonscrit de ABC. Montrer que $aa'+bb'+cc'\leq 2S+R(a+b+c)$ si ABC est acutangle (c'est-à-dire si tous les angles de ABC sont inférieurs à 90°). Est-ce que cette inégalité est également vraie pour tous les triangles obtusangles (dont un angle est supérieur à 90°) ?