stage olympique de Grésillon

19 – 26 août 2010

collège

test de sélection du 3 juin 2010

Durée : 3 heures.

- *Vous devez démontrer ce que vous affirmez. N'hésitez pas à écrire les idées de démonstration que vous avez : même si la démonstration est incomplète, une idée juste peut faire gagner des points.*
- *Aucun document n'est autorisé, pas même les calculatrices.*
- ***Important** : chaque exercice sera corrigé par un correcteur différent. Ne faites **jamais deux exercices différents sur une même feuille**. Et n'oubliez pas d'écrire **sur chaque feuille vos nom, prénom et classe** ($1^{ère}$, 2^e, 3^e ou 4^e).*
- *Pour faciliter la correction (chaque correcteur corrige un exercice), les exercices destinés aux élèves de première sont numérotés de 3 à 6, ceux destinés aux élèves de seconde, de 2 à 5 et ceux destinés aux élèves de collège (quatrième et troisième), de 1 à 4.*

Exercice 1

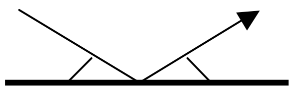
On rappelle qu'un nombre est dit "rationnel" s'il est quotient de deux entiers.

Soient $q > r > 0$ deux nombres rationnels tels que $\sqrt{q} - \sqrt{r}$ soit lui aussi rationnel *($\sqrt{q}$ désignant la racine carrée de q)*. Démontrer que, dans ce cas, $\sqrt{q}$ et $\sqrt{r}$ sont eux-mêmes des nombres rationnels.

Exercice 2

Soit $ABCD$ une table de billard rectangulaire, munie de rebords élastiques* et de trous aux sommets A, B, C, D du rectangle, dont les dimensions vérifient : $AB = CD = 200$ cm, $BC = DA = 150$ cm. Soit P le point du côté CD tel que $CP = 80$ cm, $PD = 120$ cm. Un joueur fait rouler une boule de A vers P. Démontrer qu'après six réflexions sur les côtés du rectangle, la boule tombe dans le trou C.

* *on suppose donc qu'à chaque réflexion (lorsque la boule touche un côté) les angles ci-contre sont égaux.*



Exercice 3

Trouver tous les nombres entiers x, y, z qui vérifient :

$1 < x < y < z$ et : $x + y + z + xy + yz + zx + xyz = 2009$.

Exercice 4

Huit équipes participent à un tournoi. Chaque équipe joue une et une seule fois contre chacune des autres équipes, et il n'y a pas de match nul.

Démontrer qu'il existe forcément quatre équipes A, B, C, D telles que A ait gagné contre B, C et D, B ait gagné contre C et D et C ait gagné contre D.

Peut-on affirmer la même chose s'il n'y a que sept équipes participant au tournoi ?