première

stage olympique de Grésillon

19 – 26 août 2010

test de sélection du 3 juin 2010

Durée : 3 heures.

- *Vous devez démontrer ce que vous affirmez. N'hésitez pas à écrire les idées de démonstration que vous avez : même si la démonstration est incomplète, une idée juste peut faire gagner des points.*
- *Aucun document n'est autorisé, pas même les calculatrices.*
- ***Important*** *: chaque exercice sera corrigé par un correcteur différent. Ne faites* ***jamais deux exercices différents sur une même feuille****. Et n'oubliez pas d'écrire* ***sur chaque feuille vos nom, prénom et classe*** *(1ère, 2e, 3e ou 4e).*
- *Pour faciliter la correction (chaque correcteur corrige un exercice), les exercices destinés aux élèves de première sont numérotés de 3 à 6, ceux destinés aux élèves de seconde, de 2 à 5 et ceux destinés aux élèves de collège (quatrième et troisième), de 1 à 4.*

Exercice 3

Trouver tous les nombres entiers x, y, z qui vérifient :
$1 < x < y < z$ et : $x + y + z + xy + yz + zx + xyz = 2009$.

Exercice 4

Huit équipes participent à un tournoi. Chaque équipe joue une et une seule fois contre chacune des autres équipes, et il n'y a pas de match nul.

Démontrer qu'il existe forcément quatre équipes A, B, C, D telles que A ait gagné contre B, C et D, B ait gagné contre C et D et C ait gagné contre D.

Peut-on affirmer la même chose s'il n'y a que sept équipes participant au tournoi ?

Exercice 5

Soit n un entier strictement positif, qui n'est pas un carré parfait (*c'est-à-dire : qui n'est pas le carré d'un entier*). En regardant l'écriture décimale de $\sqrt{n}$, on constate que les k premières décimales ont toutes la même valeur v (*par exemple, si n = 48273160, dans* $\sqrt{n} = 6947{,}88888800044067\ldots$, *les six premières décimales sont égales à 8, donc k = 6 et v = 8*).

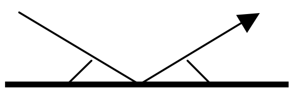
a) si $v = 0$ ou $v = 9$, démontrer que $\sqrt{n} > \dfrac{10^k}{2}$

b) pour toutes les valeurs de v, démontrer que : $\sqrt{n} > \dfrac{10^k}{144}$.

Exercice 6

Soit ABC une table de billard triangulaire, munie de rebords élastiques* et de trous aux sommets A, B, C du triangle, dont les dimensions vérifient : $AB = BC = CA = 200$ cm. Soit P le point du côté BC tel que $BP = 160$ cm, $PC = 40$ cm. Un joueur fait rouler une boule de A vers P. Démontrer qu'après sept réflexions sur les côtés du triangle, la boule tombe dans le trou A.

* *on suppose donc qu'à chaque réflexion (lorsque la boule touche un côté) les angles ci-contre sont égaux.*



Question supplémentaire (à traiter uniquement si vous avez résolu tous les autres problèmes du test) : démontrer que deux points de la table de billard ABC *sont traversés trois fois chacun par la boule.*