Corrigé du test de sélection

4 juin 2009

Exercice 1. *Soit n un entier naturel. Montrer que :*

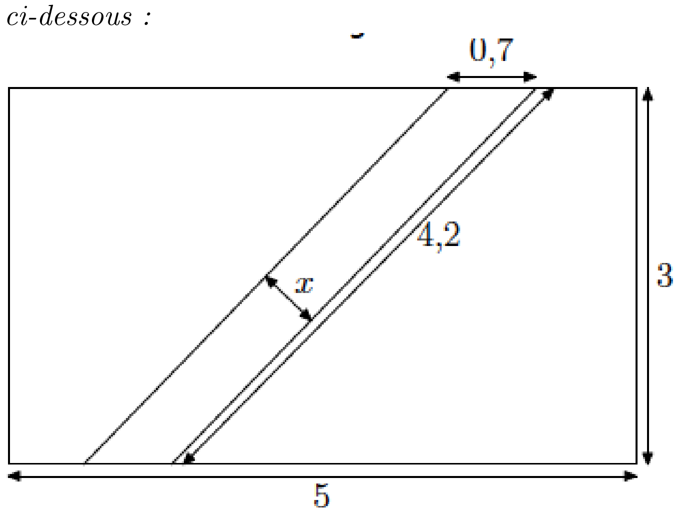
a) si n est la somme des carrés de deux entiers naturels consécutifs, alors $2n-1$ est le carré d'un entier.

b) si $2n-1$ est le carré d'un entier, alors n est la somme des carrés de deux entiers consécutifs.

Solution de l'exercice 1. *a) Si n est la somme des carrés de deux entiers naturels consécutifs k et $k+1$, $n = k^2 + (k+1)^2 = 2k^2 + 2k + 1$, donc $2n-1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2$ est bien le carré d'un entier.*

b) Si $2n-1$ est le carré d'un entier, c'est nécessairement le carré d'un entier impair $2k+1$, car le carré d'un entier pair serait pair. Donc $2n-1 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1$ d'où l'on déduit : $n = 2k^2+2k+1 = k^2+(k+1)^2$ est la somme des carrés de deux entiers consécutifs k et $k+1$.

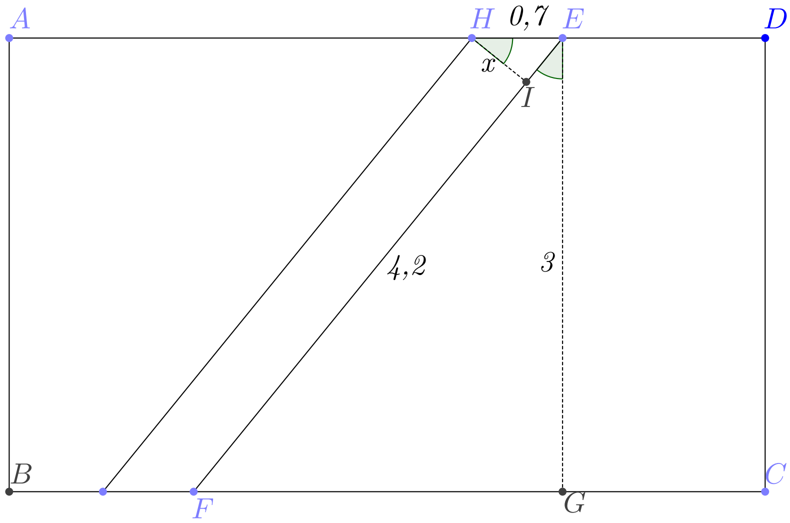
Exercice 2. *On a tendu un ruban sur une boite rectangulaire comme sur la figure ci-dessous :*



Calculer la largeur x du ruban.

Solution de l'exercice 2. *Les angles $\widehat{EHI}$ et $\widehat{FEG}$ ont leurs côtés perpendiculaires, donc ils sont égaux. Soit θ leur valeur. Dans le triangle rectangle*

EHI, $\cos\theta = \frac{x}{0{,}7}$ *et dans le triangle rectangle* *FEG*, $\cos\theta = \frac{3}{4{,}2}$. *Donc* $x = 0,7 \times \frac{3}{4{,}2} = 0,5$.



Exercice 3. *a) On considère* 11 *nombres distincts à deux chiffres. Prouver qu'on peut toujours en choisir deux d'entre eux qui aient des chiffres des unités distincts, et des chiffres des dizaines distincts.*

b) On considère 41 *nombres distincts à deux chiffres. Prouver qu'on peut toujours en choisir cinq d'entre eux tels que deux quelconques parmi ces cinq aient des chiffres des unités distincts, et des chiffres des dizaines distincts.*

Solution de l'exercice 3. *Considérons les dix ensembles de nombres :*

$10, 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98$
$11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99$
$12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89, 90$
$13, 24, 35, 46, 57, 68, 79, 80, 91$
$14, 25, 36, 47, 58, 69, 70, 81, 92$
$15, 26, 37, 48, 59, 60, 71, 82, 93$
$16, 27, 38, 49, 50, 61, 72, 83, 94$
$17, 28, 39, 40, 51, 62, 73, 84, 95$
$18, 29, 30, 41, 52, 63, 74, 85, 96$
$19, 20, 31, 42, 53, 64, 75, 86, 97$

Il est clair que chaque nombre de deux chiffres appartient à un et un seul de ces dix ensembles.

a) Si l'on considère onze nombres, ils ne peuvent pas appartenir tous à des ensembles distincts vu qu'il n'y a que dix ensembles. Donc deux au moins appartiennent au même ensemble. Or il est facile de voir que deux nombres d'un même ensemble ont des chiffres des unités distincts et des chiffres des dizaines distincts.

b) De même, si l'on considère 41 *nombres, l'un au moins de ces dix ensembles contiendra au moins* 5 *des* 41 *nombres. Si chacun des dix ensembles contenait au plus quatre nombres, nous aurions au plus* $4 \times 10 = 40$ *nombres. Les cinq nombres appartenant à un même ensemble sont tels que deux quelconques d'entre eux ont leurs chiffres des unités distincts et leurs chiffres des dizaines distincts.*

Exercice 4. *Lors de la soirée du nouvel an chez mes grands parents, chaque convive a serré la main d'exactement* 7 *autres, et a fait la bise à tous les autres. Montrer que le nombre de convives était pair.*

Solution de l'exercice 4. *Appelons n le nombre de convives. Le nombre de poignées de main est égal à la moitié de $7 \times n$. En effet, chaque convive donne* 7 *poignées de main, mais en comptant ainsi $7 \times n$, on compte deux fois chaque poignée de main : une fois pour l'un des convives et une fois pour l'autre. Pour que le nombre de poignées de main soit un entier, il faut donc que $7 \times n$ soit pair, donc que n soit pair.*

Exercice 5. *Quatre pièces de monnaie, à savoir 2 euros, 1 euro, 2 centimes et 1 centime, sont sur une table sans chevauchement. La pièce de 2 euros touche la pièce de 1 euro en A, la pièce de 1 euro touche la pièce de 2 centimes en B, la pièce de 2 centimes touche la pièce de 1 centime en C, la pièce de 1 centime touche la pièce de 2 euros en D. Montrer que : $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 180^\circ$.*

Solution de l'exercice 5. *Appelons O_1, O_2, O_3, O_4 les centres des pièces de* 2 *euros,* 1 *euro,* 2 *centimes et* 1 *centime respectivement. La perpendiculaire à la tangente commune en A passe par chacun des centres O_1 et O_2, donc O_1, A, O_2 sont alignés. De même O_2, B, O_3 sont alignés, O_3, C, O_4 ainsi que O_4, D, O_1 sont eux aussi alignés. Donc $\widehat{ABC} = 180^\circ - \widehat{ABO_2} - \widehat{CBO_3} = \frac{1}{2}[(180^\circ - 2 \cdot \widehat{ABO_2}) + (180^\circ - 2 \cdot \widehat{CBO_3})]$. Or le triangle ABO_2 est isocèle, donc $180^\circ - 2 \cdot \widehat{ABO_2} = \widehat{AO_2B}$, tout comme, pour la même raison, $180^\circ - 2 \cdot \widehat{CBO_3} = \widehat{BO_3C}$. Donc $\widehat{ABC} = \frac{1}{2}(\widehat{AO_2B} + \widehat{BO_3C})$. De même, $\widehat{CDA} = \frac{1}{2}(\widehat{CO_4D} + \widehat{DO_1A})$. La somme $\widehat{ABC} + \widehat{CDA}$ est donc la demi-somme des quatre angles du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$. Or la somme des angles d'un quadrilatère est égale à 360°, ce qui achève la démonstration.*

Exercice 6. *Soient x et y des nombres réels strictement positifs, avec $0 < x < y$. On pose :*

$H = \frac{2xy}{x+y}$, $G = \sqrt{xy}$, $A = \frac{x+y}{2}$, $Q = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$.

Montrer que :

a) $0 < G - H$

b) $Q + G < 2A$

c) $G - H < Q - A$

(soit en définitive : $0 < G - H < Q - A < A - G$*).*

Solution de l'exercice 6. *a) Cela revient à démontrer que* $H < G$, *donc que* $H^2 < G^2$ *(ce qui fait disparaître les racines carrées). Or* $\frac{H^2}{G^2} = \frac{4xy}{(x+y)^2} = 1 - \frac{(x-y)^2}{(x+y)^2} < 1$.

b) Là encore, il faut faire disparaître les racines carrées. La relation à démontrer équivaut à : $(Q+G)^2 < 4A^2$. *Or* $4A^2 = 2(Q^2+G^2) = (Q+G)^2 + (Q-G)^2 > (Q+G)^2$. *L'inégalité est stricte car on ne peut pas avoir* $Q = G$, *vu que* $Q^2 - G^2 = \frac{(x-y)^2}{2} > 0$.

c) Réorganisons les termes de manière à faire disparaître les racines carrées : nous devons démontrer que $A - H < Q - G$. *Or* $Q - G = \frac{Q^2-G^2}{Q+G} > \frac{Q^2-G^2}{2A}$ *vu que, nous venons de le voir,* $Q + G < 2A$. *Or* $Q^2 - G^2 = \frac{(x-y)^2}{2}$ *et* $2A = x + y$, *donc* $\frac{Q^2-G^2}{2A} = A - H$.