

# TEST DE SELECTION

## Stage olympique de Grésillon 2009

**Jeudi 4 juin 2009**

**collégiens**

**Durée : 3 heures**

*Aucun document ni calculatrice n'est autorisé.  
Utilisez des copies distinctes pour des exercices distincts,  
et écrivez vos nom, prénom et classe sur chaque copie.*

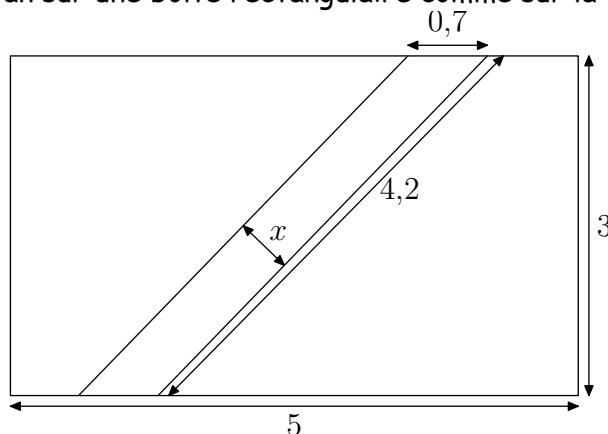
### Exercice 1

Soit  $n$  un entier naturel. Montrer que :

- si  $n$  est la somme des carrés de deux entiers consécutifs, alors :  $2n - 1$  est le carré d'un entier.
- si  $2n - 1$  est le carré d'un entier, alors  $n$  est la somme des carrés de deux entiers consécutifs.

### Exercice 2

On a tendu un ruban sur une boîte rectangulaire comme sur la figure ci-dessous :



Calculer la largeur  $x$  du ruban.

### Exercice 3

- On considère 11 nombres distincts à deux chiffres. Prouver qu'on peut toujours en choisir deux d'entre eux qui aient des chiffres des unités distincts, et des chiffres des dizaines distincts.
- On considère 41 nombres distincts à deux chiffres. Prouver qu'on peut toujours en choisir cinq d'entre eux tels que deux quelconques parmi ces cinq aient des chiffres des unités distincts, et des chiffres des dizaines distincts.

### Exercice 4

Lors de la soirée du nouvel an chez mes grands parents, chaque convive a serré la main d'exactly 7 autres, et a fait la bise à tous les autres. Montrer que le nombre de convives était pair.