Eliminatoires test de rentrée OFM 2015 : corrigé

Questionnaire collégiens

Exercice 1. Calculer $\left(\dfrac{1+3^2}{\sqrt{21+\sqrt{16}}}\right)^5$.

Solution de l'exercice 1 $\left(\dfrac{1+3^2}{\sqrt{21+\sqrt{16}}}\right)^5 = \left(\dfrac{10}{\sqrt{21+4}}\right)^5 = \left(\dfrac{10}{\sqrt{25}}\right)^5 = \left(\dfrac{10}{5}\right)^5 = 2^5 = 32$.

Exercice 2. On définit $a_n = \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}$. Ainsi, $a_1 = 1 - \dfrac{1}{3}$ et $a_2 = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5}$. Soit $S = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{100}$. Calculer $201 \times S$.

Solution de l'exercice 2 $S = 1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{7} + \cdots + \dfrac{1}{199} - \dfrac{1}{201} = 1 - \dfrac{1}{201}$ donc $201S = 201 - 1 = 200$.

Exercice 3. Soit a un nombre réel tel que $(a-1)(a-2)(a-3) + a^2(6-a) = 0$. Calculer $11a$.

Solution de l'exercice 3 $(a-1)(a-2) = a(a-2)-(a-2) = a^2-2a-a+2 = a^2-3a+2$ donc $(a-1)(a-2)(a-3) = a(a^2-3a+2)-3(a^2-3a+2) = a^3-3a^2+2a-3a^2+9a-6 = a^3-6a^2+11a-6$. De plus, $a^2(6-a) = 6a^2-a^3$, donc $11a-6=0$, et finalement $11a = 6$.

Exercice 4. On donne 20 points du plan tels que trois quelconques d'entre eux ne sont pas alignés. Combien peut-on former de droites passant par deux de ces points ?

Solution de l'exercice 4 On choisir un point A : il y a 20 possibilités. Puis on choisit un point B différent de A : il y a 19 possibilités. On trace alors la droite reliant A à B. Chaque droite a été tracée exactement deux fois, donc il y a $19 \times 20/2 = 190$ droites.

Exercice 5. Il y a 2 manières de placer deux dominos identiques 1×2 afin de recouvrir un échiquier 2×2 : soit en les plaçant tous les deux horizontalement, soit en les plaçant tous les deux verticalement.

De combien de manières peut-on recouvrir un échiquier 2×11 avec 11 dominos identiques 1×2 ?

Solution de l'exercice 5 Soit a_n le nombre de manière de recouvrir un échiquier à 2 lignes et n colonnes avec n dominos identiques 1×2. On a $a_1 = 1$ et $a_2 = 2$.

Si la case en haut à gauche est recouverte par un domino vertical, il reste un échiquier $2 \times (n-1)$ à recouvrir, ce qui fait a_{n-1} possibilités.

Si la case en haut à gauche est recouverte par un domino horizontal, alors la case en bas à gauche doit l'être également, et il reste un échiquier $2 \times (n-2)$ à recouvrir, ce qui fait a_{n-2} possibilités.

On en déduit que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ pour tout n. On calcule alors de proche en proche : $a_3 = 3$, $a_4 = 5$, $a_5 = 8$, $a_6 = 13$, $a_7 = 21$, $a_8 = 34$, $a_9 = 55$, $a_{10} = 89$, $a_{11} = 144$.

Exercice 6. Les mots de la langue ababaa sont les successions de caractères "a" ou "b" tels que toute lettre "b" soit suivie d'un "a". Déterminer le nombre de mots à 6 lettres de la langue ababaa.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Il y a 1 mot avec aucune lettre b, 5 mots avec une lettre b (en position 1,2,3,4 ou 5), 6 mots avec deux lettres b, 1 mot avec trois lettres b donc au total : 13 mots.

Exercice 7. Déterminer le plus petit entier divisible par 6, 35 et 28.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> C'est le plus petit entier divisible par 2×3, 5×7 et 7×4 donc par $4 \times 3 \times 5 \times 7 = 420$.

Exercice 8. Déterminer la somme de tous les entiers *relatifs* a tels que $a^2 - 82a$ soit un nombre premier.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> $a(a-82)$ est premier, donc l'un des facteurs est égal à 1 ou à -1. Si $a = 1$ alors $a(a-82)$ est négatif, donc n'est pas premier. Si $a = -1$ alors $a(a-82) = 83$ est premier. Si $a - 82 = 1$ alors $a = 83$ donc $a(a-82)$ est premier. Enfin, si $a - 82 = -1$ alors $a(a-82) < 0$ n'est pas premier. La réponse est donc $-1 + 83 = 82$.

Exercice 9. Toto a écrit $5 + \dfrac{a}{b} = \dfrac{5a}{b}$. Quel est le nombre de couples d'entiers (a, b), avec $1 \leqslant a \leqslant 1000$, tels que l'égalité de Toto est vraie ?

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> L'égalité s'écrit $5b + a = 5a$, donc $5b = 4a$. On en déduit que a est un multiple de 5.

Réciproquement, si a est un multiple de 5, il s'écrit $a = 5c$, et $5b = 4a$ équivaut à $b = 4c$, donc un et un seul b convient. Par conséquent, le nombre de couples d'entiers est égal au nombre de multiples de 5 compris entre 1 et 1000 : il y en a 200.

Exercice 10. Soit $ABCD$ un carré. Soient E, F, G, H les milieux de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soient I, J, K, L les milieux de $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[HE]$. On suppose que $AB = 16$. Déterminer l'aire de $IJKL$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> On a $IJ = 8$ donc l'aire de $IJKL$ vaut 64.

Exercice 11. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 48°$ et $\widehat{CBA} = 17°$. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le segment $[BC]$ au point D. Déterminer la valeur en degrés de l'angle $\widehat{CDA}$.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> (Faire une figure.) On a $\widehat{CDA} = 180° - \widehat{ADB} = \widehat{DBA} + \widehat{BAD} = \widehat{CBA} + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 17 + 24 = 41°$.

Exercice 12. Soit ABC un triangle isocèle en A tel que $\widehat{CBA} = 61°$. Soit E le point, autre que A, situé sur le cercle circonscrit à ABC tel que $EB = EC$. Soit D le point autre que A tel que $DB = DC = AB$.

Déterminer la valeur en degrés de l'angle $\widehat{BED}$.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> On a $\widehat{BAC} = 180° - 2\widehat{CBA} = 58°$.

D est le symétrique de A par rapport à la droite (AB). On a $\widehat{BED} = 180° - \widehat{AEB} = 180° - (90° - \widehat{BAE}) = 90° + \frac{1}{2}\widehat{BAC} = 90 + 29 = 119°$.