OLYMPIADES FRANÇAISES DE MATHÉMATIQUES

TEST DE RENTRÉE

MERCREDI 1ER OCTOBRE 2014

DURÉE : 4 HEURES

Instructions

- Il est **impératif** de rendre une feuille simple séparée sur laquelle vous écrirez votre nom, prénom, adresse email, nom de l'établissement et sa ville ainsi que votre classe.
- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
  Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

- Les collégiens doivent chercher les exercices de 1 à 7.
- Les lycéens doivent chercher les exercices de 4 à 10.
- Les exercices sont notés chacun sur 7 points.

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe et le numéro du problème en haut à droite.

Les exercices ne sont pas classés par ordre de difficulté.

Exercices collégiens

Exercice 1. Un restaurant propose trois desserts, et exactement deux fois plus d'entrées que de plats principaux. Un dîner consiste en une entrée, un plat et un dessert. Quel est le plus petit nombre de plats principaux que le restaurant doit proposer afin qu'un client puisse manger un dîner différent chaque soir de l'année 2014 ?

Exercice 2. Soit $ABCD$ un carré. On suppose qu'il existe un point E sur le segment $[AD]$ et un point F sur le segment $[BC]$ tels que $BE = EF = FD = 1$. Combien vaut l'aire du carré ?

Exercice 3. a) Est-ce que 2016 est divisible par 81 ? Est-ce que 20162016 est divisible par 81 ?

b) Montrer que l'entier $N = 2016 \cdots 2016$ ("2016" étant écrit 2016 fois) est divisible par 81.

Exercices communs

Exercice 4. Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite de nombres telle que $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, et $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$ pour tout entier $n \geqslant 3$. Par exemple, $a_3 = a_2/a_1 = 3/2$. Déterminer la valeur de a_{2014}.

Exercice 5. Dans un pays se trouvent 10 villes. Deux villes quelconques sont toujours reliées directement par exactement une route à sens unique. Les routes ne se croisent jamais, certaines passant au besoin au-dessus des autres à l'aide de ponts.

Malheureusement, les responsables du Ministère du Sens de la Circulation, manifestement distraits, ont orienté les routes de sorte que si l'on quitte une ville quelconque, il est alors impossible d'y revenir, même en passant par plusieurs villes et plusieurs routes.

a) Prouver qu'il existe une ville dont on ne peut pas sortir.

b) Prouver qu'il existe une ville depuis laquelle on peut atteindre directement toutes les autres (c'est-à-dire sans passer par les autres villes).

c) Combien, au minimum, faut-il changer d'orientation de routes pour qu'on puisse aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre (éventuellement en plusieurs étapes) ?

Exercice 6. Sur un cercle de périmètre p, on marque les trois sommets d'un triangle équilatéral ainsi que les quatres sommets d'un carré. Ces sept points divisent le cercle en 7 arcs.

Prouver que l'un de ces arcs est de longueur ne dépassant pas $\frac{p}{24}$.

Exercice 7. Soit a_0 un entier strictement positif. On construit une suite d'entiers $a_1, a_2, \cdots$ selon la procédure suivante :

- si le chiffre des unités de a_i est strictement plus grand que 5, alors $a_{i+1} = 9a_i$.

- si le chiffre des unités de a_i est inférieur ou égal à 5, on efface ce chiffre et le nombre ainsi formé est a_{i+1}.

Evidemment, si on a effacé tous les chiffres de a_i, la procédure s'arrête et il n'y a pas de a_{i+1}.

Peut-on choisir a_0 pour que la suite ainsi construite soit infinie ?

Exercices lycéens

Exercice 8. Soit ABC un triangle. Soient M, N deux points sur $[BC]$ tels que les angles $\widehat{BAM}$ et $\widehat{NAC}$ soient égaux. Soient O_1 le centre du cercle circonscrit au triangle ABC et O_2 le centre du cercle circonscrit au triangle AMN. Montrer que les points O_1, O_2 et A sont alignés.

Exercice 9. Étant donnés 25 nombres strictement positifs distincts, montrer qu'on peut en choisir deux tels qu'aucun des 23 autres nombres n'est égal à la somme ou à la différence des deux nombres choisis.

Exercice 10. 22 cartes portant les numéros $1, 2, \ldots, 22$ sont sur la table. Alcindor et Benoît retirent à tour de rôle une carte de leur choix de la table, jusqu'à ce qu'il n'en reste plus. C'est Alcindor qui commence. Ensuite, chacun calcule le chiffre des unités de la somme de ses cartes. La personne qui gagne est celle qui a le résultat le plus élevé.

L'un des deux joueurs a-t-il un moyen de gagner à coup sûr ? Si oui, déterminer lequel.

* * *