# STAGE OLYMPIQUE JUNIOR 2013

Cachan, 22 au 26 octobre 2013

# Avant-propos

*Le stage olympique junior de toussaint a été organisé à Cachan par l'association Animath.*

*Son objet a été de rassembler des élèves de seconde et de collège,*
*repérés entre autres par leur participation à diverses compétitions,*
*et de les faire travailler sur des exercices en vue de la formation d'une des équipes*
*qui représenteront la France aux Olympiades Internationales de Mathématiques.*
*Les deux tiers des participants ont été dès cette année*
*intégrés au groupe que l'Olympiade Française de Mathématiques*
*prépare à plusieurs compétitions internationales de 2014 :*
*Olympiade Internationale de Mathématiques,*
*Olympiade Balkanique de Mathématiques,*
*Olympiade Balkanique Junior de Mathématiques,*
*Olympiade Européenne de Mathématiques pour Filles.*

*Nous tenons à remercier l'internat d'excellence de Cachan pour son excellent accueil.*

# Les Animatheux


Pierre Bertin


Margaret Bilu


Pierre Bornsztein


Thomas Budzinski

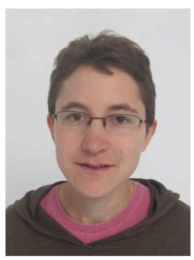

Guillaume Conchon-Kerjan


Ippolyti Dellatolas


Vincent Jugé

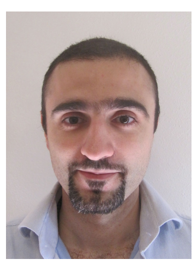

Matthieu Lequesne


François Lo Jacomo


Irène Marcovici


Matthieu Piquerez


Jean-Louis Tu


David Zmiaikou

# Les élèves

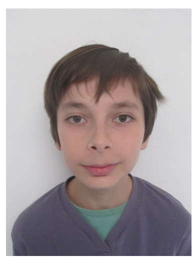

Henry Bambury


Pierre-Alexandre Bazin


Bruno Belanyi


François Bonnevie-Ricard


Oscar Boutin


Félix Breton


Romain Caplier


Alexeï Carmoy


Pierre Clarou


Baptiste Collet


Cyril Conchon-Kerjan

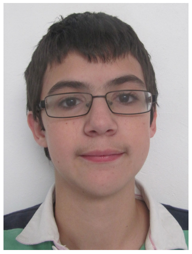

Lola Cremer


Guillaume De Saint Quentin

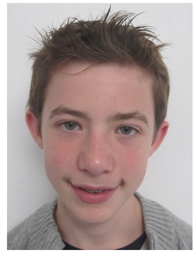

Tristan Desgranges


Diego Dorn


Mélanie Fabiani


Thibault Fay de Lestrac


Olivier Garçonnet

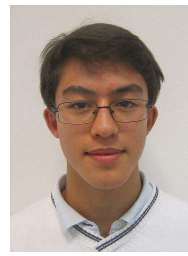

Noé Gauchard

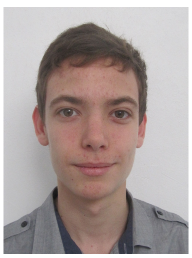

Vincent Geffroy


Maxence Lagarde


Marc Lamberet

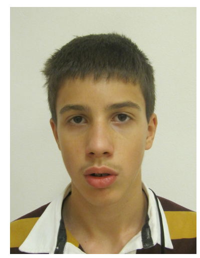

Alexandre Lemeunier


Adrien Lopez


Loïc Lyard

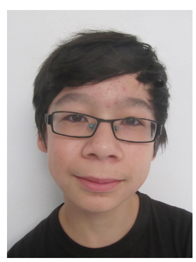

Tristan Mérigalet


Marc Michoux


Victor Moldovan


Merlin Niesen


Sohaïb Ouzineb


Hugo Panchaud


Nathan Paysant


Gaétan Rey


Juraj Rosinsky


Adrien Rospars


Thomas Sépulchre

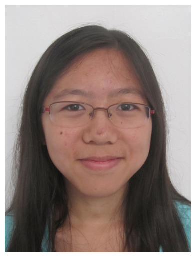

Skander Stephan

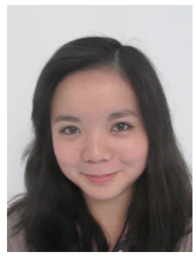

Laure Su


Alexandre Thiault


Aryna Urvantsava


Julien Véron


Lucie Wang


Louise Wu


Kayo Yin


Vincent Yuan

# Table des matières

# I. Déroulement du stage

Pour ce cinquième stage olympique junior, nous avons amplifié l'effort des années précédentes, grâce à une subvention de Cap'Maths, avec encore plus de stagiaires : 46, soit 23 de seconde, 21 de troisième, 2 de quatrième. Nous avons mieux couvert le territoire français, avec 22 départements représentés, soit plus de la moitié des Académies métropolitaines, sans compter un élève de Londres. Nous n'avions que 15% de filles : nous avons refusé 11 candidatures dont 2 filles.

Le premier jour, les élèves sont arrivés à partir de 07 h 50. Deux d'entre eux ont été accueillis à la Gare de Lyon par Matthieu Piquerez. Après les formalités d'accueil par Margaret Bilu, Matthieu Piquerez et François Lo Jacomo, presque tout le monde était présent pour l'inauguration du stage à 12 h (deux stagiaires étaient restés dans leur chambre). Mais c'est l'après-midi que les choses sérieuses ont commencé, avec, de 14 h à 16 h, un test initial destiné à répartir les élèves en deux groupes (débutants et avancés), indépendamment de la classe. Ce test a été jugé difficile et cela n'a pas facilité la constitution des groupes. Le test initial a été corrigé après le goûter du mardi, et le soir, était prévue la traditionnelle présentation d'Animath et des Olympiades, avec distribution de bics Animath.

Les horaires étaient ceux de l'an passé : petit déjeuner à 8 h, cours en parallèle de 9 h à 10 h 30 et de 11 h à 12 h 30, déjeuner à 12 h 30, cours de 14 h à 16 h et de 16 h 30 à 17 h 30 avec un goûter à 16 h, dîner à 19 h suivi généralement d'une soirée à 20 h 30. Puis les stagiaires pouvaient encore jouer : nous nous efforcions de surveiller notamment qu'ils ne se couchent pas après 23 h. Bien que plus nombreux que l'an passé, les garçons étaient dans l'aile des garçons, mais les filles n'étaient pas seules dans leur aile : une autre colonie occupait la plus grande partie du couloir, ne leur laissant que deux chambres pour 7 filles, plus une pour l'animatrice. La répartition dans les chambres était déterminée essentiellement par la classe et l'âge, les élèves n'étaient pas autorisés à changer de chambre.

Mercredi, Pierre Bertin a fait un exposé sur les martingales, et jeudi, David Zmiaikou sur certains types de jeux. Comme le stage commençait par un test, nous n'avons organisé qu'un second test le samedi matin (9 h à 12 h) portant sur les trois journées de cours : combinatoire le mercredi et jeudi matin, et géométrie le jeudi après-midi et vendredi. Les énoncés n'étaient bien sûr pas les mêmes pour les avancés et les débutants. Samedi après-midi, outre les formalités de départ, il restait à présenter la correction du test et rendre les copies, distribuer le polycopié, mais aussi expliquer aux stagiaires comment ils pourront poursuivre cette préparation olympique, qui ne se limite pas aux deux stages organisés par Animath. La fin du stage était prévue vers 16 h.

| | | Débutants | Avancés |
|---|---|---|---|
| Mardi | 10h-12h | Arrivée et installation | |
| | 12h-12h20 | Présentation du stage | |
| | 14h-16h | Test initial | |
| | 16h30-17h30 | Correction du test initial | |
| | 20h30-21h30 | Animath et les Olympiades | |
| Mercredi | Matin | Stratégies de Base (François Lo Jacomo) | Combinatoire (Irène Marcovici) |
| | Après-midi | Stratégies de Base (Pierre Bertin) | Combinatoire (Pierre Bornsztein) |
| | 20h30 | **Conférence (Pierre Bertin)** | |
| Jeudi | Matin | Combinatoire (Mathieu Piquerez) | Combinatoire (Margaret Bilu) |
| | Après-midi | Géométrie (François Lo Jacomo) | Géométrie (David Zmiaikou) |
| | 20h30 | **Conférence (David Zmiaikou)** | |
| Vendredi | Matin | Géométrie (Ippolyti Dellatolas) | Géométrie (François Lo Jacomo) |
| | Après-midi | Géométrie (Thomas Budzinski) | Géométrie (Vincent Jugé) |
| Samedi | 9h-12h | Test final | |
| | 14h30 | Correction du test final - clôture du stage | |

Quelques liens utiles pour poursuivre le travail réalisé pendant ce stage :
— Le site d'Animath : `www.animath.fr`
— Le site MathLinks : `www.mathlinks.ro`

# II. Exercices d'échauffement

## 1 Enoncés

**Exercice 1**

On considère 2013 nombres quelconques, positifs ou négatifs, mais tels que la somme de dix quelconques d'entre eux soit positive. Montrer que la somme des 2013 nombres est positive.

**Exercice 2**

Trouver tous les triplets de trois entiers strictement positifs tels que :

$$x + \frac{1}{y + \frac{1}{z}} = \frac{10}{7}$$

**Exercice 3**

On dit qu'un entier $n$ est joli s'il existe des entiers positifs ou nuls $a$ et $b$ tels que $n = a^2 + b^3$. Montrer que le nombre d'entiers jolis qui sont inférieurs ou égaux à $1000000$ est compris entre $10000$ et $100000$.

**Exercice 4**

Soit $ABCD$ un trapèze, où $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles. On note $\Delta$ la droite passant par les milieux de $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que les droites $\Delta$, $(AD)$ et $(BC)$ sont concourantes ou parallèles.

**Exercice 5**

Soit $ABCD$ un rectangle, $E$ et $F$ les milieux des côtés $[AD]$ et $[DC]$. On appelle $G$ l'intersection des droites $(AF)$ et $(EC)$. Montrer que les angles $\widehat{CGF}$ et $\widehat{FBE}$ sont égaux.

**Exercice 6**

Soit cinq nombres $a < b < c < d < e$.

a) Combien de sommes deux à deux peut-on former ?

b) Ces dix sommes sont $21, 26, 35, 40, 49, 51, 54, 60, 65, 79$. Trouver $a, b, c, d, e$.

**Exercice 7**

Un milliard d'objets en forme de croix formée de deux branches de longueur $\geq 1$ mètre, reliées en leur milieu, et perpendiculaires entre elles, sont posés à plat dans un champ circulaire de 1 km de rayon. Montrer qu'au moins deux de ces objets se chevauchent.

**Exercice 8**

Un triangle a pour longueurs des côtés : 3, 4, 5. Calculer le rayon du cercle inscrit (cercle intérieur au triangle et tangent aux trois côtés du triangle).

**Exercice 9**

Soit $a, b, c, d$ des nombres positifs tels que $a + b + c + d = 4$. Montrer que $ab + bc + cd + da \leq 4$

**Exercice 10**

10 - On considère un hexagone $ABCDEF$ inscrit dans un cercle, et tel que $AB = BC = a, CD = DE = b, EF = FA = c$. Montrer que l'aire du triangle $BDF$ est la moitié de l'aire de l'hexagone.

**Exercice 11**

11 - Le plan est divisé en triangles équilatéraux par trois familles de droites parallèles. Peut-on trouver quatre sommets de ces triangles équilatéraux formant un carré ?

**Exercice 12**

12 - Démontrer que pour tout n = 1,

$$\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)^2+\left(\frac{1}{n}\right)^2=2n-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

**Exercice 13**

13 - Démontrer que

$$3=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+5\sqrt{1+\cdots}}}}}$$

## 2 Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On réordonne ces nombres en une suite croissante $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_{2013}$. On a $0 \leqslant a_1 + \cdots + a_{10} \leqslant 10a_{10}$ donc tous les nombres à partir de $a_{10}$ sont positifs. Par conséquent, $a_{11} + \cdots + a_{2013} \geqslant 0$. En ajoutant l'inégalité $a_1 + \cdots + a_{10} \geqslant 0$, la conclusion en découle.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Remarquons que $y + \frac{1}{z} > 1$ donc $x \leqslant x + \dfrac{1}{y+\frac{1}{z}} < x + 1$. En prenant la partie entière des deux membres de l'équation, on trouve que $x = 1$, donc $\dfrac{1}{y+\frac{1}{z}} = \dfrac{3}{7}$. On en déduit que $y + \dfrac{1}{z} = \dfrac{7}{3}$. En prenant la partie entière, il vient $y = 2$ puis $z = 3$.

Solution de l'exercice 3 Si $n = a^2 + b^3$ est joli alors $a^2 \leqslant 1000000$ donc $a \leqslant 1000$. De plus, si $a$ est donné alors $b^3 \leqslant 10^6 - a^2$, donc le nombre d'entiers jolis est majoré par

$$\sum_{a=0}^{1000} 1 + [\sqrt[3]{10^6 - a^2}].$$

Notons $m_a$ le terme dans la somme. On a $m_0 = 101$, $m_k \leqslant 100$ pour tout $k \geqslant 1$, $m_{1000} = 1$ et $m_{999} = 1 + [\sqrt[3]{1999}] = 1 + 12 = 13$ (puisque $12^3 \leqslant 1999 < 13^3$), donc

$$\sum_{a=0}^{1000} m_a \leqslant 101 + \sum_{a=1}^{998} 100 + 13 + 1 = 99915 \leqslant 100000.$$

Montrons maintenant qu'il y a au moins $10000$ entiers jolis.

Pour tous $(a, b)$ vérifiant $0 \leqslant a \leqslant 999$, $0 \leqslant b \leqslant 12$ et $b^3 < 2a + 1$, on a

$$a^2 \leqslant a^2 + b^3 < (a+1)^2 \leqslant 10^6$$

donc les entiers de la forme $a^2 + b^3$ avec $a$ et $b$ comme ci-dessus sont deux à deux distincts. Notons $E$ l'ensemble de ces entiers et déterminons combien d'éléments il contient.

La condition $b^3 < 2a + 1$ équivaut à $a > \dfrac{b^3 - 1}{2}$, ou encore à $a \geqslant \dfrac{b^3}{2}$ si $b$ est pair et à $a \geqslant \dfrac{b^3 + 1}{2}$ si $b$ est impair. Donc le nombre d'éléments de $E$ est égal à

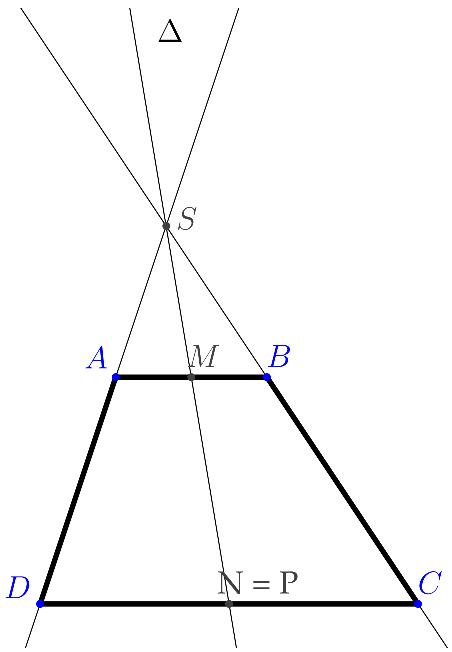
$$\begin{aligned} & \sum_{b \text{ pair } \leqslant 12} 1000 - \frac{b^3}{2} + \sum_{b \text{ impair } \leqslant 12} 1000 - \frac{b^3 + 1}{2} \\ = \; & \sum_{b=0}^{12} 1000 - \frac{b^3}{2} - 3 \\ = \; & 13000 - 3 - \frac{1}{2} \sum_{b=0}^{12} b^3 \\ = \; & 12997 - \frac{1}{2} \left( \frac{12 \times 13}{2} \right)^2 \\ = \; & 9955 \end{aligned}$$

d'après la formule $\sum_{k=1}^{n} k^3 = (n(n+1)/2)^2$.

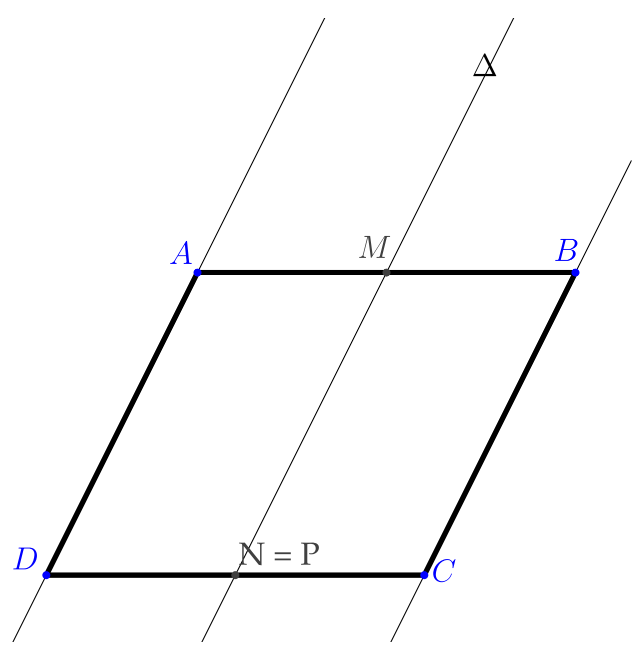
Il reste à trouver $45$ autres jolis nombres.

Si un nombre de la forme $a^2 + 13^3$ appartient à $E$, alors il existe $x \leqslant 999$ et $y \leqslant 12$ tels que $a^2 + 13^3 = x^2 + y^3$. Ceci s'écrit $(x - a)(x + a) = 13^3 - y^3$, donc $x - a \leqslant \sqrt{13^3 - y^3} \leqslant \sqrt{13^3} \leqslant 13 \times \sqrt{13} \leqslant 13 \times 4 = 52$. Par conséquent, $x - a$ peut prendre au plus 52 valeurs. Pour chacune de ces valeurs, $x + a = \dfrac{13^3 - y^3}{x - a}$ peut prendre au plus $13$ valeurs. On en déduit que $a = \dfrac{(x + a) - (x - a)}{2}$ peut prendre au plus $13 \times 52 = 676$ valeurs si $a^2 + 13^3 \in E$. On a ainsi trouvé au moins $1000 - 676 = 324$ jolis entiers supplémentaires.

*Solution de l'exercice 4*

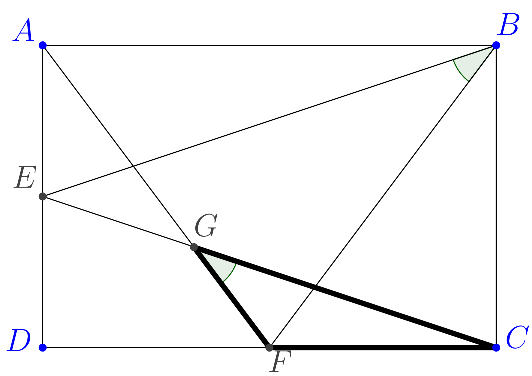



Appelons $M$ et $N$ les milieux de $[AB]$ et $[CD]$. Supposons dans un premier temps que $(AD)$ et $(BC)$ se coupent en un point $S$, et considérons la droite $(SM)$, qui coupe $(CD)$ en $P$. En utilisant le théorème de Thalès et le fait que $MA = MB$, on a : $\frac{PD}{PS} = \frac{MA}{MS} = \frac{MB}{MS} = \frac{PC}{PS}$, ce qui entraîne : $PC = PD$. $P$ est donc le milieu $N$ de $[CD]$, et la droite $(SM)$ n'est autre que $\Delta$ : $\Delta$, $(AD)$ et $(BC)$ sont bien concourantes en $S$.



Supposons maintenant que $(AD)$ et $(BC)$ sont parallèles, et traçons la parallèle à $(AD)$ et $(BC)$, qui passe par $M$. Soit $P$ l'intersection de cette parallèle avec $(CD)$. $DPMA$ et $CPMB$ sont des parallélogrammes, donc $DP = MA = MB = CP$. Une fois de plus, $P$ est le milieu de $[CD]$, donc $(MP)$, parallèle à $(AD)$ et $(BC)$, n'est autre que $(MN) = \Delta$.

*Solution de l'exercice 5*




Dans le triangle $FCG$, les angles à la base $\widehat{CGF}$ et $\widehat{FCG}$ ont pour somme le supplémentaire $\widehat{AFD}$ du troisième angle. Or $\widehat{FCG} = \widehat{DCE} = \widehat{ABE}$ par symétrie, et $\widehat{AFD} = \widehat{BFC}$ (par symétrie), ce qui est égal à $\widehat{ABF}$ (angles alternes internes). Comme $\widehat{ABE} + \widehat{FBE} = \widehat{ABF}$, $\widehat{FBE} = \widehat{CGF}$.

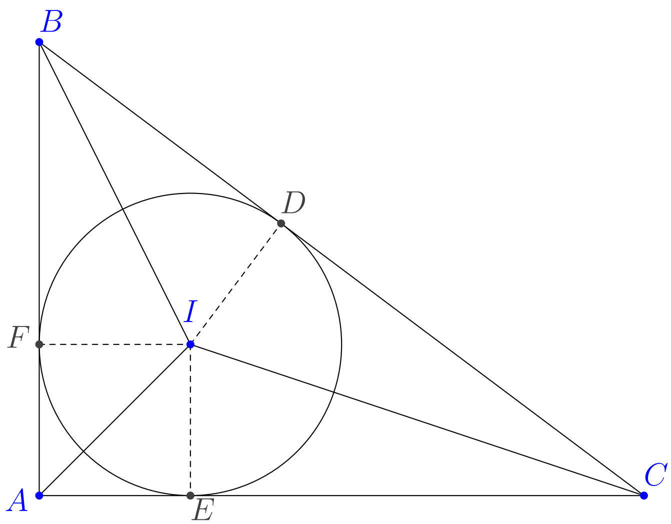
*Solution de l'exercice 6*

a) On peut former dix sommes distinctes : $a+b, a+c, a+d, a+e, b+c, b+d, b+e, c+d, c+e, d+e$.

b) Les deux plus petites sommes sont nécessairement : $a+b = 21$ et $a+c = 26$, et les deux plus grandes, obligatoirement $d+e = 79$ et $c+e = 65$. Par ailleurs, la somme de ces dix sommes vaut : $4(a+b+c+d+e) = 480$, donc $a+b+c+d+e = 120$. D'où $c = (a+b+c+d+e) - (a+b) - (d+e) = 20$, et $a = 6$, $b = 15$, $e = 45$ et $d = 34$. Si l'on calcule les dix sommes deux à deux des cinq nombres $6, 15, 20, 34$ et $45$, on trouve bien les dix nombres donnés.

*Solution de l'exercice 7* On suppose par l'absurde que ces objets ne se chevauchent pas. Quitte à raccourcir les branches des croix, on peut supposer qu'elles font exactement 1 mètre de longueur. Notons $A_i$ les centres des croix ($i = 1, \ldots, 10^9$). Les $A_i$ sont à distance $\geqslant \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ les uns des autres, donc les disques de centre $A_i$ et de rayon $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$ ne se chevauchent pas. L'aire totale des disques vaut $10^9 \times \pi/32$ mètres carrés, qui est supérieure à celle du champ qui vaut $10^6 \times \pi$ mètres carrés. Contradiction.

*Solution de l'exercice 8*




Appelons $A, B, C$ les sommets du triangle, $a = BC, b = CA, c = AB$ les longueurs des trois côtés, $I$ et $r$ le centre et le rayon du cercle inscrit. Les hauteurs issues de $I$ des triangles $IAB$, $IBC$ et $ICA$ sont toutes trois égales à $r$, de sorte que les aires de ces trois triangles sont : aire($IAB$) = $\frac{rc}{2}$, aire($IBC$) = $\frac{ra}{2}$, aire($ICA$) = $\frac{rb}{2}$, d'où l'on déduit : aire($ABC$) = $\frac{r(a+b+c)}{2}$. Or le triangle de côtés $3, 4, 5$ est rectangle, son aire vaut : $\frac{3\times 4}{2} = 6 = \frac{r(3+4+5)}{2}$. Il en résulte que $r = 1$.

Le triangle donné, de côtés $3, 4, 5$, étant rectangle, on peut aussi raisonner comme suit. Appelons $D, E, F$ les projections de $I$ sur les côtés $BC, CA, AB$. Ce sont donc les points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle. Si $A$ est le sommet de l'angle droit, $AEIF$ est un carré, et $r = IE = IF = AE = AF$. Or $AE$ et $AF$ sont faciles à calculer : si l'on pose $u = AE = AF$, $v = BF = BD$, $w = CD = CE$, $u + v = c, v + w = a, w + u = b$, donc en additionnant : $2(u + v + w) = a + b + c$ soit finalement $u = \frac{-a+b+c}{2}$, $v = \frac{a-b+c}{2}$, $w = \frac{a+b-c}{2}$. On en déduit : $r = u = \frac{-5+4+3}{2} = 1$.

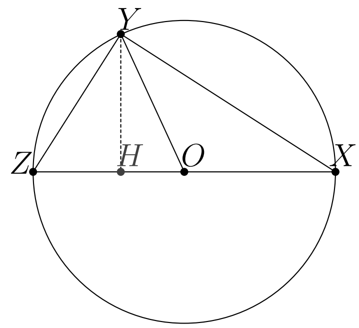
Les deux méthodes sont très différentes, mais les résultats sont bien identiques. En effet, $\frac{r(a+b+c)}{2} = \left(\frac{-a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}\right) = \frac{-a^2+(b+c)^2}{4} = \frac{bc}{2}$ = aire($ABC$) car le carré de l'hypoténuse $a^2 = b^2 + c^2$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

$ab+bc+cd+da = (a+c)(b+d)$. En posant $u = a+c$ et $v = b+d$, on est ramené à prouver que si $u + v = 4$, alors $uv \leq 4$. Or $uv = \left(\frac{u+v}{2}\right)^2 - \left(\frac{u-v}{2}\right)^2 \leq \left(\frac{u+v}{2}\right)^2$. Si $u + v = 4$, $\left(\frac{u+v}{2}\right)^2 = 4$ ce qui achève la démonstration.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Notons $\alpha, \beta, \gamma$ les angles $\widehat{OAB}$, $\widehat{OCD}$ et $\widehat{OEF}$. Il est facile de voir que $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Nous allons utiliser le résultat suivant : si $O, X, Y, Z$ sont quatre points tels que $OX = OY = OZ$ et $\widehat{XOY} + \widehat{YOZ} = 180°$, alors les triangle $XOY$ et $YOZ$ ont la même aire.




En effet, en prenant pour bases les côtés $[OX]$ et $[OZ]$, on constate que ces triangles ont des bases de même longueur et leurs hauteurs issues de $Y$ coïncident.

On en déduit que les aires de $OAB$, $OCD$ et $OEF$ sont respectivement égales à celles de $ODF$, $OFB$ et $OBD$. En additionnant ces aires, on obtient que la moitié de l'aire de l'hexagone est égale à l'aire de $BDF$.

*Solution de l'exercice 11* La réponse est non. En effet, supposons que $ABCD$ soit un carré parcouru dans le sens trigonométrique (=inverse des aiguilles d'une montre) tel que $A, B, C, D$ soient des sommets de triangles apparaissant dans la figure. On se place dans un repère orthonormé d'origine $A$, et dont l'axe des abscisses est l'une des droites de la figure passant par $A$. Quitte à changer d'unité de mesure, on peut supposer que les triangles équilatéraux de la figure ont leurs côtés de longueur 1.

Notons $(x, y)$ les coordonnées de $B$. Alors $x$ est rationnel puisqu'il est un multiple entier de $1/2$, tandis que $y$ est irrationnel puisqu'il est un multiple entier de $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D'autre part, les coordonnées de $D$ sont $(-y, x)$ donc de même, $y$ est rationnel et $x$ est irrationnel. Contradiction.

*Solution de l'exercice 12* Le membre de gauche vaut

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j}\Big)^2 &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=k}^{n}\frac{1}{j^2}+2\sum_{1\leqslant k\leqslant j<\ell\leqslant n}\frac{1}{j\ell}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{j^2}+2\sum_{1\leqslant j<\ell\leqslant n}\sum_{k=1}^{j}\frac{1}{j\ell}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+2\sum_{1\leqslant j<\ell\leqslant n}\frac{1}{\ell}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+2\sum_{1<\ell\leqslant n}\frac{\ell-1}{\ell}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+2\sum_{1\leqslant\ell\leqslant n}\frac{\ell-1}{\ell}\\
&= \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}+2\sum_{1\leqslant\ell\leqslant n}\frac{\ell}{\ell}-\sum_{1\leqslant\ell\leqslant n}\frac{1}{\ell}\\
&= 2n-\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j}.
\end{aligned}$$

*Solution de l'exercice 13* Expliquons ce que signifie l'assertion de l'énoncé. Pour toute suite finie $(a_1,\dots,a_n)$, notons pour abréger

$$[a_1,\dots,a_n]=\sqrt{1+a_1\sqrt{1+a_2\sqrt{1+a_3\sqrt{1+\cdots a_{n-1}\sqrt{1+a_n}}}}}.$$

Il faut montrer que

— pour tout $n$, on a $[2,3,\dots,n]\leqslant 3$.

— pour tout $\varepsilon>0$, il existe un entier $n$ tel que $[2,3,\dots,n]\geqslant 3-\varepsilon$.

Remarquons d'abord que $[a_1,\dots,a_{k+1}]=[a_1,\dots,a_k\sqrt{1+a_{k+1}}]$ pour tout $k\geqslant 1$. Comme $k(k+2)=k\sqrt{1+(k+1)(k+3)}$, on a

$$[2,3,\dots,k-2,k-1,k,(k+1)(k+3)]=[2,3,\dots,k-2,k-1,k(k+2)]$$

donc la suite $k\mapsto[2,3,\dots,k-2,k-1,k(k+2)]$ est constante. Pour $k=2$ elle vaut $\sqrt{1+8}=3$ donc pour tout $k$ on a

$$[2,3,\dots,k-2,k-1,k(k+2)]=3.$$

Or, $[2,3,\dots,k-2,k-1,k]\leqslant[2,3,\dots,k-2,k-1,k(k+2)]$ donc on a bien

$$[2,3,\dots,k-2,k-1,k]\leqslant 3.$$

Plus généralement, on montrerait que $[n, n+1, n+2, \ldots, n+m] \leqslant n+1$. En particulier, $x_n = [n, n, n, \ldots]$ est bien défini et est majoré par $n+1$. De plus, comme $x_n = \sqrt{1+nx_n} \geqslant \sqrt{nx_n}$, on a $x_n^2 \geqslant nx_n$ donc $x_n \geqslant n$. Ceci conduit à l'encadrement

$$n \leqslant [n, n+1, n+2, \ldots] \leqslant n+1.$$

Notons $\lambda = \frac{n}{n+1}$ et $b_k = k[k+1, k+2, \ldots]$. Montrons par récurrence descendante sur $k \leqslant n-1$ que

$$\lambda \leqslant \frac{b_k}{k(k+2)} \leqslant 1.$$

C'est vrai pour $k = n-1$ d'après l'inégalité précédente.

Supposons $\lambda \leqslant \frac{b_k}{k(k+2)} \leqslant 1$. On a donc $\lambda k(k+2) \leqslant b_k \leqslant k(k+2)$, donc

$$\lambda(1 + k(k+2)) \leqslant 1 + \lambda k(k+2) \leqslant 1 + b_k \leqslant 1 + k(k+2).$$

On en déduit que

$$\lambda(k+1)^2 \leqslant 1 + b_k \leqslant (k+1)^2.$$

En prenant la racine carrée, on obtient $\sqrt{\lambda}(k+1) \leqslant \sqrt{1+b_k} \leqslant k+1$.

Or, $\lambda \leqslant \sqrt{\lambda}$ et $b_{k-1} = (k-1)\sqrt{1+b_k}$, donc $\lambda(k+1) \leqslant \frac{b_{k-1}}{k-1} \leqslant k+1$. En divisant par $k+1$, on obtient $\lambda \leqslant \frac{b_{k-1}}{(k-1)(k+1)} \leqslant 1$.

Par conséquent, l'assertion est vraie pour tout $k$. En particulier, pour $k = 1$ on a $\lambda \leqslant \frac{b_1}{3} \leqslant 1$, autrement dit

$$\frac{n}{n+1} \leqslant \frac{[2, 3, \ldots]}{3} \leqslant 1.$$

On conclut en faisant tendre $n$ vers l'infini dans l'inégalité précédente.

# III. Mardi : Test initial

## 1 Enoncé

- Tu dois démontrer tout ce que tu affirmes. N'hésite pas à écrire les idées de démonstration que tu as : même si la démonstration est incomplète, une idée juste peut faire gagner des points.

- Aucun document n'est autorisé, pas même les calculatrices.

- Ne fais jamais deux exercices différents sur une même feuille. Et n'oublie pas d'écrire sur chaque feuille tes nom, prénom et classe (2, 3, 4).

**Exercice 1**

On considère un pentagone régulier $ABCDE$, son centre $O$ - point à égale distance des cinq sommets $A, B, C, D, E$ - et un point $M$ à l'intérieur du pentagone tel que le triangle $MDE$ soit équilatéral.

a) Déterminer les angles du triangle $ODE$

b) Déterminer les angles du triangle $MAB$

**Exercice 2**

Soient $m$ et $n$ deux entiers naturels. Un établissement scolaire comporte $n$ élèves mangeant à la cantine. Au cours de l'année, la cantine a proposé $100$ plats différents. Chaque élève a goûté à $10$ plats différents. Par ailleurs, si l'on prend deux plats quelconques parmi les $100$, on sait qu'exactement $m$ élèves ont goûté à chacun des deux plats. Calculer le rapport : $\frac{n}{m}$.

**Exercice 3**

a) Résoudre l'équation :

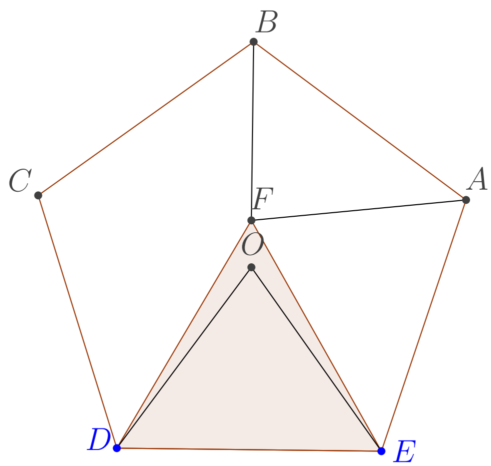
$$x + \sqrt{(x+1)(x+2)} = 3$$

b) Résoudre l'équation :

$$x + \sqrt{(x-1)x} + \sqrt{x(x+1)} + \sqrt{(x+1)(x-1)} = 3$$

## 2 Solution

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>




a) Les cinq triangles $OAB, OBC, OCD, ODE, OEA$ sont tous les cinq égaux et isocèles. Leur angle au sommet $O$ est donc égal à $\frac{360}{5} = 72$ et leurs angles à la base : $\frac{180-72}{2} = 54$. On en déduit en particulier que l'angle $\widehat{DEA} = 2 \times 54 = 108$.

b) Comme $\widehat{DEA} = 108$ et $\widehat{DEM} = 60$, $\widehat{MEA} = 48$. Or le triangle $MEA$ est isocèle : $ME = EA$, donc ses angles à la base sont égaux, ils valent chacun : $\frac{180-48}{2} = 66$. Comme $\widehat{EAM} = 66$, $\widehat{MAB} = 108 - 66 = 42$. Par ailleurs, $M$ est sur la médiatrice de $DE$, qui passe par $B$, car c'est un axe de symétrie du pentagone. Donc $\widehat{MBA} = \widehat{MBC} = \frac{108}{2} = 54$. Il en résulte que le troisième angle du triangle $MAB$, $\widehat{AMB} = 180 - 54 - 42 = 84$.

*Solution de l'exercice 2*

On note $E$ l'ensemble des élèves, $M$ l'ensemble des menus, $A$ l'ensemble des triplets $(\{a,b\}, e)$ avec $a, b \in M$, $a \neq b$ et $e \in E$ tels que $e$ a goûté au menu $a$ et au menu $b$. Ensuite, si $e_0 \in E$, on note $A_{e_0}$ l'ensemble des triplets $(\{a,b\}, e) \in A$ tel que $e = e_0$ et $A_{\{a_0,b_0\}}$ l'ensemble des triplets $(\{a,b\}, e) \in A$ tels que $\{a_0, b_0\} = \{a, b\}$. Si $B$ est un ensemble, on note $|B|$ le nombre d'éléments dans B. D'après l'énoncé, on a, pour tout $a, b \in M$ tel que $a \neq b$, $|A_{\{a,b\}}| = m$ et, comme chaque élève a goété 10 menus, pour tout $e \in E$, $|A_e| = \binom{10}{2} = 45$. Finalement, on a :

$$\begin{array}{rcl}
|A| & = & \sum_{e \in E} |A_e| \\
 & = & n \times 45 \\
|A| & = & \sum_{\substack{a,b \in M \\ a \neq b}} |A_{\{a,b\}}| \\
 & = & \binom{100}{2} m \\
 & = & 4950m \\
45n & = & 4950m \\
\frac{n}{m} & = & 110
\end{array}$$

*Solution de l'exercice 3*

a) Il suffit d'isoler la racine carrée et d'élever au carré :

$\sqrt{(x+1)(x+2)} = 3-x$ implique $x^2+3x+2 = 9-6x+x^2$, soit $9x = 7$, $x = \frac{7}{9}$. On vérifie bien que cette solution convient dans l'équation initiale : pour $x = \frac{7}{9}$, $\sqrt{(x+1)(x+2)} = \frac{20}{9}$ et $\frac{7+20}{9} = 3$.

b) Pour cette seconde équation, plus difficile, il y avait au moins trois solutions distinctes.

La première consiste à isoler dans un membre deux des racines carrées :

$\sqrt{(x-1)x} + \sqrt{x(x+1)} = 3-x-\sqrt{(x+1)(x-1)}$ de sorte qu'en élevant au carré, on n'ait plus qu'une racine carrée de chaque côté : $(x-1)x + x(x+1) + 2x\sqrt{(x+1)(x-1)} = (9-6x+x^2)+(x+1)(x-1)-2(3-x)\sqrt{(x+1)(x-1)}$. Or c'est précisément le même $\sqrt{(x+1)(x-1)}$ à gauche et à droite, on peut donc regrouper ces deux racines dans le membre de gauche et tout le reste dans le membre de droite : $6\sqrt{(x+1)(x-1)} = 8-6x$. On simplifie par 2 et on élève au carré : $9(x^2-1) = 16-24x+9x^2$, soit $24x = 25$ : $x = \frac{25}{24}$. On vérifie que cette solution satisfait bien l'équation initiale : pour $x = \frac{25}{24}$, $\sqrt{(x-1)x} = \frac{5}{24}$, $\sqrt{x(x+1)} = \frac{35}{24}$ et $\sqrt{(x+1)(x-1)} = \frac{7}{24}$, on a bien : $\frac{25+5+35+7}{24} = 3$. On notera qu'on a le choix de celle des trois racines carrées qu'on fait passer à droite : chacune des trois variantes aboutit à la même équation en définitive.

La seconde solution laisse trois termes dans le membre de gauche :

$x + \sqrt{(x-1)x} + \sqrt{x(x+1)} = 3 - \sqrt{(x+1)(x-1)}$. Certes, en élevant au carré, on aura trois racines dans le membre de gauche, du fait des doubles produits : $x^2+(x-1)x+x(x+1)+2x\left(\sqrt{(x-1)x}+\sqrt{x(x+1)}+\sqrt{(x+1)(x-1)}\right) = 9+(x+1)(x-1)-6\sqrt{(x-1)(x+1)}$, mais on y reconnaît les trois racines dont la somme, d'après l'équation initiale, est égale à $3-x$, si bien que l'équation implique : $3x^2+2x(3-x) = 8+x^2-6\sqrt{(x-1)(x+1)}$, ce qui se ramène à l'équation de la première méthode.

La troisième méthode consiste à factoriser le membre de gauche :

$\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) = 3$. Or $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right) = 1$ et $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+1}\right) = -1$. D'où : $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right) = 3\left(-\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$ et $\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right) = 3\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)$. On élimine $\sqrt{x+1}$ entre ces deux équations : $3\sqrt{x+1} = 4\sqrt{x}+\sqrt{x-1} = 3\left(2\sqrt{x}-3\sqrt{x-1}\right)$, d'où $\sqrt{x} = 5\sqrt{x-1}$, $x = 25(x-1)$ soit $x = \frac{25}{24}$.

# IV. Débutants

## 1 Mercredi et jeudi matin : Stratégies de base

### 1 mercredi matin : François Lo Jacomo

Ce cours n'est pas à proprement parler de la combinatoire, mais la présentation de deux "stratégies de base" qu'il est important de savoir manipuler tant en combinatoire que dans bien d'autres chapitres des mathématiques. Un très grand nombre de démonstrations d'arithmétique, notamment, font appel au principe des tiroirs.

**Principe des tiroirs**

Si l'on range au moins $n+1$ objets dans $n$ tiroirs, l'un des tiroirs au moins contiendra au moins deux objets. Et plus généralement, si l'on range au moins $kn+1$ objets dans ces mêmes $n$ tiroirs, l'un des tiroirs au moins contiendra au moins $k+1$ objets. Par exemple : sachant qu'un humain a moins de 200 000 cheveux et qu'il y a 2 500 000 Parisiens, au moins deux Parisiens ont le même nombre de cheveux. On peut même préciser qu'il existe $13$ Parisiens au moins ayant le même nombre de cheveux. S'il existait 2 600 001 parisiens ayant chacun au plus 200 000 cheveux, on pourrait affirmer qu'au moins $14$ d'entre eux ont le même nombre de cheveux.

**Exercice 1**

Chacun des 46 stagiaires connaît un certain nombre d'autres stagiaires. On admet que si $A$ connaît $B$, $B$ connaît $A$. Montrer qu'il existe au moins deux stagiaires qui connaissent précisément le même nombre de stagiaires.

**Exercice 2**

Montrer que quel que soit $n$, parmi $(n+1)$ entiers quelconques $a_0$, $a_1$ ... $a_n$, on peut en trouver deux $a_i$ et $a_j$ tels que $a_i - a_j$ soit divisible par $n$.

**Exercice 3**

Montrer que pour tout $n$, il existe un multiple de $n$ d'au plus $n$ chiffres, tous égaux à $0$ ou $1$.

*Solution de l'exercice 1*

Les tiroirs seront le nombre de stagiaires connus. Il peut varier de 0 à 45, ce qui fait 46 tiroirs pour 46 stagiaires, c'est un tiroir de trop. Mais on remarque que si un stagiaire connaît les 45 autres stagiaires, alors tous les stagiaires le connaissent, donc le nombre de stagiaires connus ne peut pas prendre la valeur 0 s'il prend la valeur 45. Il prend donc au plus 45 valeurs, et le principe des tiroirs s'applique.

*Solution de l'exercice 2*

On classe les nombres dans les $n$ classes modulo $n$ : $\{kn\}, \{kn+1\}...\{kn+(n-1)\}$. Au moins une classe contient au moins deux entiers, donc leur différence est divisible par $n$.

*Solution de l'exercice 3*

On utilise ce premier résultat avec la suite : $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111$ etc... : $a_i$ est l'entier formé de $i$ chiffres tous égaux à $1$. Deux d'entre eux ont une différence multiple de $n$, et cette différence a au plus $n$ chiffres tous égaux à $0$ ou $1$.

**Exercice 4**

Soit $x$ un nombre irrationnel positif. Montrer qu'il existe une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que $|x - \frac{p}{q}| \leq \frac{1}{q^2}$

*Solution de l'exercice 4*

On choisit un nombre $n$, et on place les parties décimales de $0x, 1x, 2x, \cdots nx$ dans les $n$ intervalles $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right[$ : deux au moins $ix$ et $jx$ seront dans le même intervalle. On pose $q = |i-j|$, et si l'on fait la différence : partie décimale de $|ix - jx| = qx - p < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{q}$. D'où l'existence d'une fraction $\frac{p}{q}$. Maintenant, pour prouver qu'il en existe une infinité, il faut raisonner par l'absurde : supposons qu'il en existe un nombre fini, et considérons la plus petite valeur $\epsilon$ prise par les $|px - q|$ pour toutes les fractions vérifiant la condition de l'énoncé. En choisissant $n$ tel que $\frac{1}{n} < \epsilon$, on construira une nouvelle fraction vérifiant elle aussi la condition de l'énoncé et pour laquelle $|px - q|$ sera plus petit que pour toutes les fractions précédemment listées, preuve que cette liste n'était pas exhaustive. D'où la contradiction qui achève la démonstration.

**Exercice 5**

Les points du plan sont coloriés arbitrairement en rouge et en noir. Montrer qu'on peut trouver deux points de même couleur situés à exactement 1 m de distance.

*Solution de l'exercice 5*

Il suffit de considérer les trois sommets d'un triangle équilatéral de 1 m de côté. Deux au moins d'entre eux sont de même couleur.

**Exercice 6**

On place $51$ points au hasard sur un carré de côté 1. Montrer qu'on peut en trouver au moins $3$ à l'intérieur d'un cercle de rayon $\frac{1}{7}$ (ce cercle peut déborder les cotés du carré).

*Solution de l'exercice 6*

Pour appliquer le principe des tiroirs, il faut moins de $\frac{51}{2}$ tiroirs, soit au plus $25$. Couvrir un carré avec $25$ cercles est moins facile que le couvrir avec $25$ carrés, de côté $\frac{1}{5}$. Mais la diagonale d'un tel carré mesure $\frac{\sqrt{2}}{5} < \frac{2}{7}$, de sorte que chacun de ces carrés est inclus dans un cercle de rayon $\frac{1}{7}$. Les trois points qui se trouvent à l'intérieur d'un même carré se trouvent a fortiori à l'intérieur d'un même cercle.

**Invariants**

Un invariant est une caractéristique d'une situation qui ne peut pas changer pour un problème donné, quels que soient les choix arbitraires que l'on fait. On regroupera dans ce chapitre différents types de problèmes : des problèmes de coloriages ou une caractéristique est vraie pour toutes les situations autorisées par l'énoncé, et ceux où l'on étudie un processus qui se déroule de manière imprévisible si ce n'est qu'une caractéristique reste invariante tout au long du processus.

**Exercice 7**

On écrit sur le tableau les entiers de $1$ à $2013$. A chaque étape, on en efface deux et on écrit à la place leur différence. Le nombre d'entiers diminue donc de $1$. Le dernier entier obtenu à la deux mille douzième étape peut-il être égal à $0$ ?

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

C'est encore un argument de parité qui permet de conclure. Comme la différence de deux entiers a même parité que leur somme, la somme de tous les entiers sur le tableau conserve, à chaque étape du processus, la même parité. Or au départ elle vaut : $1 + 2 + ... + 2011 = \frac{2011 \times 2012}{2}$ qui est pair. Cette somme restera donc toujours paire, et le dernier nombre obtenu sera un nombre pair, ce ne peut pas être $1$.

Pour prouver que ce peut être $0$ (bien que ce ne soit pas demandé), il faudrait un tout autre raisonnement. On grouperait les nombres ainsi : $(1, 2, 3), (4, 5, 6, 7), ...(2008, 2009, 2010, 2011)$. Le premier triplet peut être ramené à $0$ en remplaçant $(2, 3)$ par $1$ puis $(1, 1)$ par $0$. Et de même pour chacun des quadruplets suivants, en remplaçant $(4n, 4n+2)$ par $2$, $(4n + 1, 4n + 3)$ par $2$, puis $(2, 2)$ par $0$. Prouver que la réponse est "oui" ou que la réponse est "non" nécessite des raisonnements totalement différents, il est donc impératif de deviner le plus vite possible la bonne réponse car on perd beaucoup de temps lorsqu'on part dans la mauvaise direction. La technique des invariants est utilisable pour prouver une impossibilité. Pour prouver que quelque chose est possible, habituellement on montre qu'on peut le construire explicitement.

**Exercice 8**

16 ampoules sont disposées en carré, quatre par ligne et quatre par colonne. Sur chaque ligne et sur chaque colonne, un interrupteur permet de changer l'état de toutes les lampes de la ligne ou de la colonne. On par d'un état où une seule lampe est allumée. Peut-on les éteindre toutes ?

*Solution de l'exercice 8*

Non! car la parité du nombre de lampe allumées est invariante quand on actionne n'importe quel interrupteur, il y en aura donc toujours un nombre impair (donc non nul) d'allumées.

**Exercice 9**

$6$ arbres se trouvent aux $6$ sommets d'un hexagone régulier. Sur chaque arbre se pose un oiseau. Toutes les minutes, deux oiseaux simultanément vont de leur arbre à l'un des deux arbres voisins. Peut-on avoir, après un certain nombre de minutes, tous les oiseaux regroupés sur un même arbre?

*Solution de l'exercice 9*

Si la réponse était "oui", il faudrait décrire une suite de déplacements aboutissant à la solution. Pour prouver que la réponse est "non", on peut faire appel à un invariant. Considérons un triangle équilatéral formé de trois arbres non voisins. Ce triangle contient au départ $3$ oiseaux. Si tous les oiseaux sont sur le même arbre, le triangle contiendra $0$ ou $6$ oiseaux. Or il est facile de voir que chaque déplacement laisse invariante la parité du nombre d'oiseaux perchés sur le triangle : comme chaque arbre du triangle a ses voisins hors du triangle et inversement, soit les deux oiseaux qui s'envolent étaient sur le triangle et le nombre d'oiseaux sur le triangle diminue de $2$. Soit aucun n'était sur le triangle et le nombre augmente de $2$. Soit l'un était sur le triangle et l'autre hors du triangle, auquel cas le nombre d'oiseaux reste inchangé. Dans tous les cas, le nombre d'oiseaux sur le triangle restera impair et ne vaudra jamais $0$ ni $6$.

**Exercice 10**

On dispose de trois tas de pièces, contenant au départ respectivement 51, 49 et 5 pièces. A chaque étape, on a le droit soit de réunir deux tas en un seul, soit de diviser en deux moitiés égales un tas contenant un nombre pair de pièces. Peut-on faire avec ces opérations trois nouveaux tas de 52, 48 et 5 pièces?

*Solution de l'exercice 10*

Non! car à la première opération, on est obligé de réunir deux tas, aucun n'ayant un nombre pair de pièces. On obtiendra soit un tas de 100 pièces et un de 5 pièces, mais alors, par la suite, tous les tas obtenus auront un multiple de 5 de pièces; soit un tas de 54 et un de 51, et tous les tas suivants seront multiples de 3; soit un tas de 56 et un de 49, et tous les suivants seront multiples de 7. Jamais on n'obtiendra un tas de 52 pièces car 52 n'est multiple ni de 3, ni de 5, ni de 7.

**Pavages**

Nous conclurons par des problèmes qui ne sont pas vraiment des problèmes d'invariants : peut-on paver telle surface avec des objets de telle forme? Là encore, il faut distinguer clairement le cas où la réponse est oui (il suffit alors de montrer un exemple de pavage solution) du cas où la réponse est non : souvent, on a alors recours à un coloriage pour montrer que, si l'on pouvait paver, le nombre de cases de telle couleur ne serait pas ce qu'il est effectivement. Ci-dessous trois exemples typiques :

**Exercice 11**

On considère un échiquier, dont on découpe la case en haut à gauche et la case en bas à droite. Peut-on paver les $62$ cases restantes avec des dominos ?

<u>*Solution de l'exercice 11*</u>

Problème très classique : chaque domino couvre une case blanche et une case noire, donc quelle que soit la manière de disposer les dominos, on couvrira autant de cases blanches que de cases noires. Or si l'on découpe les deux cases en haut à gauche et en bas à droite de l'échiquier, il s'agit de deux cases de même couleur, toutes deux noires ou toutes deux blanches. Il restera donc soit $30$ cases noires et $32$ cases blanches soit $32$ noires et $30$ blanches. Si l'on parvient à placer $30$ dominos (ce qui reste à prouver), les deux dernières cases seront obligatoirement de même couleur, et on ne pourra pas y placer un domino de plus : il n'est donc pas possible de paver tout l'échiquier ainsi.

**Exercice 12**

Peut-on paver un triangle équilatéral de coté $6$ avec des "sphinx" de forme ci-dessous ?

<u>*Solution de l'exercice 12*</u>

Le triangle équilatéral de côté $6$ peut être divisé en $36$ triangles de côté $1$, dont $15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$ sont "pointe en haut" (colorions-les en gris) et $21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$ "pointe en bas". Or un sphinx est composé de $6$ triangles (qui est bien un diviseur de $36$, ce n'est pas là que se situe l'impossibilité), mais parmi ces $-$ triangles, $4$ sont dans un sens et $2$ dans l'autre. Quelle que soit l'orientation de mon sphinx, celui-ci couvrira donc soit $2$ cases grises et $4$ cases blanches, soit $2$ cases blanches et $4$ cases grises, mais avec un nombre quelconque de sphinx on ne pourra couvrir qu'un nombre pair de cases blanches et un nombre pair de cases grises. En particulier, on ne couvrira jamais $15$ cases grises et $21$ cases blanches : il restera un nombre impair de cases grises non pavées et un nombre impair de cases blanches non pavées.

## 2 mercredi après-midi : Pierre Bertin

RÉCURRENCE

Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété sur les entiers (par exemple "$n$ est un nombre premier", "un polygone à $n$ côtés est triangulable" ou "$n^3 - n$ est divisible par 3") que l'on veut démontrer pour tout $n$.

**Théorème 1.** Si

1. $\mathcal{P}(0)$ est vraie ("initialisation") et
2. si on suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie, on peut démontrer $\mathcal{P}(n+1)$ ("hérédité")

alors la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

**Exercice 1** Trouver une formule pour $1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3$.

**Exercice 2** Regardons la suite de Fibonacci : $F_1 = F_2 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Soit $\phi$ (resp. $\phi'$) la solution positive (resp. négative) de l'équation $X^2 = X + 1$. Montrer que :

$$F_n = \frac{\phi^n - \phi'^n}{\sqrt{5}}.$$

**Exercice 3** Définissons pour tout $n \geq 0$ et tout $0 \leq k \leq n$ les coefficients binomiaux $\binom{n}{k}$ (prononcez "$k$ parmi $n$") de la manière suivante :

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \text{ et } \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Démontrer que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

**Exercice 4** On trace $n$ cercles dans le plan tels que deux cercles ne soient jamais tangents. Montrer que l'on peut colorier les régions du plan ainsi délimitées de deux couleurs de telle façon que deux régions séparées par un arc de cercle soient de couleurs différentes.

**Exercice 5** On trace $n$ droites dans le plan, deux jamais parallèles, trois jamais concourantes. En combien de parties le plan est-il découpé ?

**Exercice 6** Montrer que pour tout $n > 5$ il est possible de découper un carré en $n$ carrés plus petits.

**Exercice 7** Soit $x$ un réel tel que $x + \frac{1}{x}$ est un entier. Montrer que pour tout $n$, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier.

**Exercice 8** On choisit $n$ points sur un cercle et on trace toutes les cordes associées (on se débrouille pour que 3 cordes n e soient jamais concourantes). En combien de parties le cercle est-il découpé ?

**Exercice 9** (Les tours de Hanoi) Dans le temple de Bénarès sont érigées trois aiguilles de diamants. Sur l'aiguille de gauche sont enfilés 64 disques d'or pur, le plus large à la base et les autres, de plus en plus étroits, empilés jusqu'au sommet. Nuit et jour, les moines déplacent les disques d'une aiguille à l'autre en suivant deux règles : ils ne peuvent déplacer qu'un disque à la fois, et ils ne peuvent pas poser un disque sur un disque plus petit. Il est dit que lorsque les 64 disques seront sur l'aiguille de droite, le temple s'écroulera et ce sera la fin du monde. Combien de temps nous reste-t-il ?

**Exercice 10** Montrer que pour tout entier $x < n!$, il existe $k \leq n$ un entier et $d_1, d_2, \ldots, d_k$ des diviseurs deux à deux distincts de $n!$ tels que $x = d_1 + d_2 + \cdots + d_k$.

**Exercice 11** a) Démontrez que pour tout entier naturel $n$,

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

b) Montrez que pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{1}{n^2 - n} - \frac{1}{n^2 + n} > \frac{2}{n^3}.$$

c) Démontrez ensuite que pour tout $n \geq 1$

$$1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{27} + \cdots + \frac{1}{n^3} \leq \frac{5}{4}.$$

**Exercice 12** Arthur et Béatrice jouent au jeu suivant : ils commencent avec un 2013-gone régulier (un polygone régulier à 2013 côtés) et chacun leur tour ils tracent une des diagonales du polygone qui ne coupe aucune des diagonales déjà tracée. Celui qui ne peut plus tracer de diagonales a perdu. Montrez que si Arthur commence, Béatrice gagne à coup sur.

**Solutions**

*Solution de l'exercice 1* Calculons les premiers termes pour se donner une idée :

$1$ ; $1+8=9$ ; $1+8+27=36$ ; $1+8+27+64=100$ ; $1+8+27+64+125=225$ ; $\ldots$

On remarque tout de suite que tous les termes sont des carrés, les carrés de la suite $1, 3, 6, 10, 15$, que l'on reconnait comme la suite $1, (1+2), (1+2+3)$, etc. Nous allons essayer de prouver la formule suivante par récurrence :

$$1 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

L'initialisation est facile. Maintenant supposons que la formule est vraie pour $n$ et calculons

$$1+\cdots+n^3+(n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}+(n+1)^3 = \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$$

ce qui achève la récurrence.

*Solution de l'exercice 2* Commençons par calculer $\phi$ et $\phi'$. C'est un simple trinome du second degré :

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \phi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Il est facile de vérifier que la formule marche pour $F_1$. Ensuite pour $F_2$ nous utiliserons la relations $\phi^2 = \phi + 1$ (pareil pour $\phi'$) :

$$\frac{\phi^2 - \phi'^2}{\sqrt{5}} = \frac{(\phi + 1) - (\phi' + 1)}{\sqrt{5}} = 1 = F_2.$$

Interessons nous maintenant à l'hérédité : supposons que la formule est vraie pour $F_n$ et $F_{n+1}$. Nous utiliserons la formule suivante :

$$\phi^{n+1} + \phi^n = \phi^n(\phi + 1) = \phi^n \cdot \phi^2 = \phi^{n+2}.$$

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n = \frac{\phi^{n+1} - \phi'^{n+1} + \phi^n - \phi'^n}{\sqrt{5}} = \frac{\phi^{n+2} - \phi'^{n+2}}{\sqrt{5}},$$

ce qui achève la récurrence.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Attention, ici il y a deux indices :$n$ et $k$, il faut être minutieux sur la façons dont nous ferons la récurrence. Nous allons démontrer par récurrence sur $n$ la propriété suivante :

$$\mathcal{P}(n) = \text{“}\forall 0 \leq k \leq n,\ \binom{n}{k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\text{”}.$$

L'initialisation est évidente ($0! = 1$). Intéressons nous maintenant à l'hérédité. Supposons que la formule est vraie pour la ligne $n$ et regardons la ligne $n+1$. Débarassons-nous déjà des cas $k = 0$ et $k = n+1$ :

$$\frac{(n+1)!}{0!(n+1)!} = 1 = \binom{n+1}{0} \quad \text{et} \quad \frac{(n+1)!}{(n+1)!0!} = 1 = \binom{n+1}{n+1}.$$

Regardons à présent le reste des cas :

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}$$

on met tout sur le même dénominateur $(k+1)!(n-k)!$ :

$$= \frac{n!((k+1) + (n-k))}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$$

Ce qui achève la récurrence.

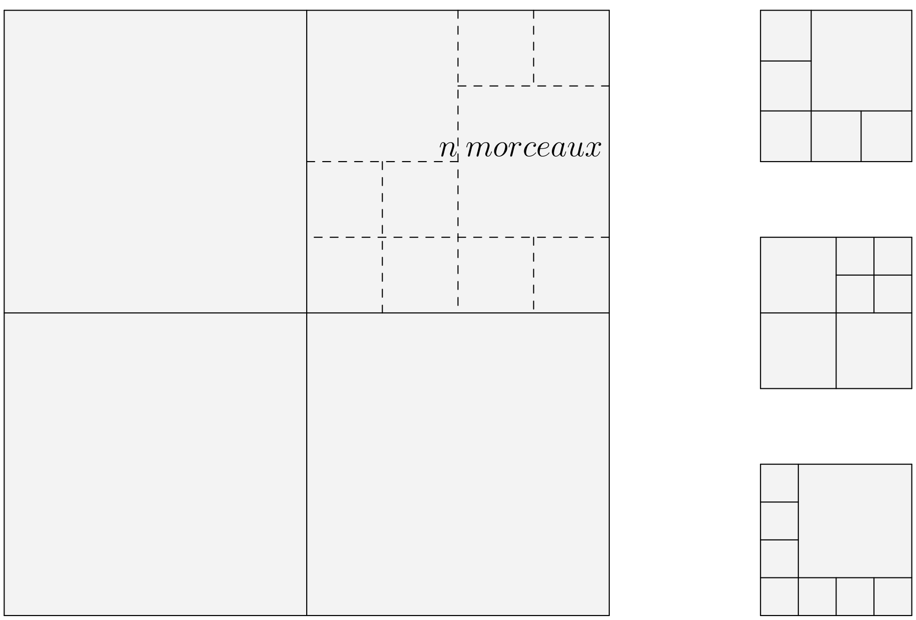
<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Nous allons faire la démonstration par récurrence sur $n$. Pour $n = 1$, c'est facile, il suffit de colorier l'intérieur du cercle en rouge et l'extérieur en bleu.

Maintenant supposons que pour $n$ cercles il est toujours possible de trouver un bon coloriage. Prenons $n+1$ cercles et meetons-en un de côté. Il en reste $n$, donc par hypothèse de récurrence on peut trouver un bon coloriage. Maintenant rajoutons le dernier cercle et faisons la manipulation suivante : on inverse la couleur de tous les secteursà l'intérieur du cercle et on ne touche pas à l'extérieur. Il est facile de vérifier que le coloriage ainsi obtenu est bon.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Lorsqu'il n'y a aucune droites, il y a 1 secteur, avec une droite il y a 2 secteurs. Soit $u_n$ le nombre de secteurs lorsqu'il y a $n$ droites. Lorsqu'on rajoute la $n+1$-ème droite, elle va couper les $n$ autres droites, ce qui signifie qu'elle passera par $n+1$ secteurs. Elle coupera chacun de ces secteurs en deux, donc elle rajoute $n+1$ régions. Nous obtenons la relation de récurrence suivante : $u_{n+1} = u_n + n + 1$. Il est facile de démontrer par récurrence qu'alors

$$u_n = \frac{n(n+1)}{2} + 1.$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "il est possible de découper un carré en $n$ petits carrés". On remarque que si on sait découper un carré en $n$ carré, alors il est facile de découper un carré en $n+3$ carrés : on coupe le gros carré en 4 et on découpe un des petits carrés en n morceaux (voir la figure de gauche).




Ceci règle son compte à l'hérédité : si on suppose $\mathcal{P}(n)$, vraie alors $\mathcal{P}(n+3)$ est vraie. Il suffit ensuite de s'occuper de l'initialisation. Attention, comme on passe de $n$ à $n+3$, il faut prouver 3 cas : les cas 6, 7 et 8. Ils sont dans la partie droite de la figure.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété "$x^n + \frac{1}{x^n}$ est un entier". $\mathcal{P}(1)$ est vrai par hypothèse. Si on suppose $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n-1)$ vraies,

$$\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) = x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} + x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$$

Les termes $x^n + \frac{1}{x^n}$, $x + \frac{1}{x}$ et $x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}$ sont entiers par hypothèse de récurrence, donc $x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}$ est aussi entier, ce qui achève la récurrence.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Comme dans l'exercice plus haut, nous allons dénombrer combien on rajoute de secteurs lorsqu'on place le $n+1$-ème point. Numérotons les sommets de 1 à $n$ et plaçons un sommet supplémentaire entre le point 1 et le point $n$. Regardons la corde $C_k$ qui relie le nouveau point au point $k$. Une autre corde $\Gamma$ de la figure coupe la corde $C_k$ ssi un des sommets de $\Gamma$ est à droite de $C_k$ et l'autre est à gauche. Pour trouver une corde qui coupe $C_k$ il faut donc choisir un point parmi les $k-1$ à droite et un parmi les $n-k$ à gauche, ce qui en donne $(k-1)(n-k)$. Et comme dans l'exercice précédent, cela signifie que la corde $C_k$ rajoute $(k-1)(n-k)+1$ secteurs. Donc

$$u_{n+1}-u_n = \sum_{k=1}^{n}(k-1)(n-k)+1 = (n+1)\sum_{k=1}^{n}k-\sum_{k=1}^{n}k^2-n(n-1) = u_n+\frac{n^3-3n^2+8n}{6}.$$

On initialise avec $u_0 = u_1 = 1$ et on trouve :

$$u_n = \frac{n(n-1)(n^2-5n+18)}{24}+1 = \frac{n^4-6n^3+23n^2-18n+24}{24}.$$

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Appelons $u_n$ le nombre minimal de mouvements pour déplacer une colonne de taille $n$ d'une aiguille à une autre. Pour déplacer une colonne de taille $n+1$ de la colonne de droite à la colonne de gauche, il faut déplacer les $n$ premiers disques sur la colonne du milieu, puis déplacer le gros disque sur la colonne de droite, puis redéplacer les $n$ autres disques par dessus. Cela nous permet de trouver la formule de récurrence suivante : $u_{n+1} = 2u_n + 1$. On initialise avec $u_1 = 1$, et je laisse au lecteur le soin de démontrer par récurrence que $u_n = 2^n - 1$. Si on considère qu'il faut au moins une seconde aux moines pour faire un mouvement, la fin du monde n'est pas avant $2^{64} - 1$ s $\approx 600$ milliards d'années (on est larges).

<u>*Solution de l'exercice 10*</u> Nous allons montrer la propriété par récurrence. L'initialisation est facile. Maintenant supposons que la propriété est vraie pour $n$ et prenons un entier $k < (n+1)!$. Nous allons faire la division euclidienne de $k$ par $n+1$ :

$$k = (n+1)q + r.$$

L'entier $q$ est strictement inférieur à $n!$, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : $q = d_1 + \cdots + d_k$ avec $k \leq n$ et

$$k = d_1(n+1) + d_2(n+1) + d_3(n+1) + \cdots + d_k(n+1) + r.$$

<u>*Solution de l'exercice 11*</u> a) Montrons par récurrence

$$\mathcal{P}(n) = \text{“}1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}\text{''}.$$

L'initialisation pour $n = 1$ est facile : $1 \leq 2 - 1$. Pour l'hérédité, supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2} &= \left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{(n+1)^2} \\ &\leq 2-\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2} \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à vérifier que $2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n+1}$.

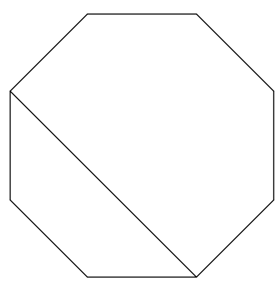
b) Il faut mettre le terme de gauche sur le même dénominateur, ce qui donne $\frac{2}{n(n+1)(n-1)}$ . Ensuite, comme $n(n+1)(n-1) < n^3$ l'inégalité est démontrée.

c) Ça se fait par récurrence comme dans le a) avec

$$\mathcal{P}(n) = \text{“}1+\frac{1}{8}+\frac{1}{27}+\cdots+\frac{1}{n^3} \leq \frac{5}{4}-\frac{1}{2n(n+1)}\text{”}.$$

_Solution de l'exercice 12_ On prouve par récurrence $\mathcal{P}(n) =$ "en partant d'un polygone à $n$ côtés, on peut placer exactement $(n-3)$ diagonales qui ne se coupent pas avant d'être bloqué". L'initialisation en $n = 3$ est facile : lorsqu'on a un triangle, on ne peut tracer aucune diagonale.

L'hérédité est un peu plus dure : supposons que $\mathcal{P}(3)$, $\mathcal{P}(4)$, $\ldots, \mathcal{P}(n)$ sont vrais. On prend un $(n+1)$-gone et on trace une diagonale. Ceci va le découper en deux polygones de $k$ et $k'$ côtés respectivement.



Je vous laisse vérifier qu'on a toujours $k + k' = n + 3$ (il y a $n + 1$ côtés au début, plus la diagonale qui est comptée deux fois, ce qui donne $n+3$ en tout).Par hypothèse de récurrence, on peut tracer exactement $k - 3$ diagonales dans le $k$-gone avant d'être coincé, et $k' - 3$ dans le $k'$-gone. Le nombre total de diagonales tracées (en n'oubliant pas la première diagonale) est $(k-3)+(k'-3)+1 = n-2$, ce qui achève la récurrence.

Donc si on part d'un $2013$-gone, on peut tracer exactement 2010 diagonales avant d'être coincé. Si Arthur trace la première diagonale, Béatrice tracera la deuxième, Arthur la troisième, etc, et Béatrice tracera la $2010$-ème. Après cela, Arthur sera coincé.

## 3 jeudi matin : Matthieu Piquerez

**Le symbole $\sum$**

Dans toute la suite $n, a, b, p, d$ ou toute autre variable désignent des nombres naturels et, sauf exceptions, non nuls.

**Notation 1.** Soient $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres réels. On note $\sum_{k=1}^{n} a_k$ la somme de ses nombres.

**Exemple 2.** Par exemple :

1. $\sum_{k=1}^{28} \sin(k) = \sin(1) + \sin(2) + \cdots + \sin(28)$
2. $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$ (on appelle ce nombre le $n^{ime}$ nombre triangulaire).
3. $\sum_{k=1}^{n} 3 = 3n$

**Exercice 1**

Montrez les égalités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \qquad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Exercice 2**

Trouvez une formule générale pour les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n} k^3$
2. $\sum_{k=1}^{n} 2k - 1$
3. $28 + 31 + 34 + \cdots + 253$

**Exercice 3**

Victor fait un tas avec toutes ses billes de sorte que chaque bille repose sur quatre billes de l'étage inférieur et dont les centres forment un carré. Ce tas a $n$ étages et le dernier étage est un rectangle de $a$ billes de long et $b$ de large. Combien Victor a-t-il de billes au minimum ?

**Exercice 4**

Calculez $(k+1)^3 - k^3$ puis retrouvez la formule de $\sum_{k=1}^{n} k^2$.

**Autres outils de dénombrement**

**Exemple 3.** Il y a $d^n$ lancers différents de n dés de couleurs différentes à d faces.

**Exercice 5**

Quelle est la probabilité de faire au moins un 6 en lançant 6 fois un dé ?

**Notation 2.** On note $n!$ et on appelle "factoriel n" la valeur de $1 \times 2 \times \cdots \times n$. $n!$ correspond au nombre de façons d'ordonner $n$ éléments. Par convention, $0! = 1$.

**Exemple 4.** Il y a $52!$ mélanges possibles d'un paquet de 52 cartes.

**Notation 3.** On note $A_n^p$ la valeur de $\frac{n!}{(n-p)!}$. $A_n^p$ correspond au nombre de façons de choisir $p$ éléments différents de manière ordonnée parmi $n$ éléments.

**Exemple 5.** Il y a $A_{52}^5$ tas possibles de 5 cartes.

**Notation 4.** On note $C_n^p$ ou $\binom{n}{p}$ (lire "$p$ parmi $n$") la valeur $\frac{n!}{p!(n-p)!}$. $\binom{n}{p}$ correspond au nombre de choix possibles de $p$ éléments différents parmi $n$ éléments de manière non ordonnée.

**Exemple 6.** Il y a $\binom{52}{5}$ mains possibles au poker (à cinq cartes).

**Proposition 7.** $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$ $\qquad \binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$.

**Démonstration 8.** En effet, choisir $p$ éléments parmi $n$ revient à choisir les $n-p$ autres éléments puis à décider de prendre ceux qu'on a pas choisis. Ensuite, pour choisir $p$ éléments parmi $n$, soit on choisit le dernier élément et $p-1$ éléments parmi les $n-1$ premiers éléments, soit on ne choisit pas le dernier élément et on choisit $p$ éléments parmi les $n-1$ premiers éléments.

**Exercice 6**

Quelle est la probabilité d'obtenir les différentes figures au poker (paire, double paire, brelan, couleur, suite, full, carré, quinte flush) ?

**Exercice 7**

Calculez :

1. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
2. $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$

**Exercice 8**

Combien y-a-t il de billes dans une pyramide tétraédrique de $N$ étages (chaque bille repose sur trois billes tangentes deux à deux de l'étage inférieur) ?

Généralisez pour les dimensions supérieures (hypertétraèdres).

**Exercice 9**

Un marchand de glace ne propose que des glaces à cinq boules et quatorze parfums différents. On peut choisir plusieurs fois le même parfum. Combien y-a-t-il de choix ?

**Exercice 10**

4 peut s'écrire de trois manières différentes comme somme ordonnée de deux nombres : $1+3$, $2+2$ et $3+1$. Qu'en est-il pour $n$ en somme ordonnée de $p$ nombres ?

**Exercice 11**

Montrer que :

$$\sum_{k=p}^{n} \binom{k-1}{p-1} \times 2^{n-k} = \sum_{k=p}^{n} \binom{n}{k}$$

**Solutions des exercices**

_Solution de l'exercice 1_

Montrons par récurrence sur n que $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ :

Initialisation : si $n = 1$, alors :

$$\sum_{k=1}^{1} k = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons que, pour $n$ fixé, on a $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ (hypothèse de récurrence). Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{n+1} k &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k + (n+1) \\ &= \tfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \tfrac{(n+2)(n+1)}{2}\end{aligned}$$

L'hérédité est vérifiée.

Finalement, par récurrence, on a bien : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

De même, montrons par récurrence sur n que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ :

Initialisation : si $n = 1$, alors :

$$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6}$$

L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons que, pour $n$ fixé, on a $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (hypothèse de récurrence). Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k + (n+1)^2 \\ &= \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \tfrac{(n+1)((2n+1)n+6(n+1))}{6} \\ &= \tfrac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} \\ &= \tfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}\end{aligned}$$

L'hérédité est vérifiée.

Finalement, par récurrence, on a bien : $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

_Solution de l'exercice 2_

1. Regardons les premières valeurs : $1, 9, 36, 100, \ldots$.
   On remarque que ce sont les carrés des nombres : $1, 3, 6, 10, \ldots$.
   On reconnaît la liste des nombres triangulaires, on peut donc conjecturer que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = (\sum_{k=1}^{n} k)^2$$

   Je laisse le soin au lecteur de démontrer ce résultat par récurrence.

2. Idée : la somme est linéaire, c'est-à-dire que, si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ et $\lambda$ (lambda minuscule) sont des nombres réels, alors :

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + \lambda b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \lambda \sum_{k=1}^{n} b_k$$

Donc :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{n} 2k-1 &= 2\textstyle\sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= 2\tfrac{n(n+1)}{2} - n \\ &= n^2 \end{aligned}$$

3. On remarque que $28+31+\cdots+253 = \sum_{k=1}^{76} 3k+25$ et on utilise la linéarité de la somme. Ou alors, on remarque que :

$$\begin{aligned} 28+31+\cdots+253 &= \tfrac{1}{2}((28+253)+(31+250)+\cdots+(253+28)) \\ &= \tfrac{1}{2}(76\times 281) \\ &= 10678 \end{aligned}$$

Car il y a 76 termes ($\frac{253-28}{3}+1=76$, ne pas oublier le "+1" !).

*Solution de l'exercice 3*

Un rectangle de taille $a \times b$ repose au minimum sur un rectangle de taille $(a+1)\times(b+1)$. Donc, si le tas de Victor contient le moins de billes possibles, le tas ressemble à une pyramide tronquée de base rectangulaire. Plus précisément, l'étage $k$ en partant du haut est un rectangle de taille $(a+k-1)(b+k-1)$. Donc, en tout, Victor a le nombre de billes suivant :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{n}(a+k-1)(b+k-1) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k^2 + (a+b-2)\sum_{k=1}^{n} k + n(a-1)(b-1) \\ &= \tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (a+b-2)\tfrac{n(n+1)}{2} + n(a-1)(b-1) \\ &= n((n+1)\tfrac{2n+3(a+b)-5}{6} + (a-1)(b-1)) \end{aligned}$$

*Solution de l'exercice 4*

On a :

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2 + 3k + 1$$

Idée : somme télescopique. On a :

$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3 &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} 3k^2+3k+1 \\ \textstyle\sum_{k=1}^{n}(k+1)^3 - k^3 &= (n+1)^3 - 1 \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{(n+1)^3 - 1 - \sum_{k=1}^{n} 3k+1}{3} = \cdots = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

*Solution de l'exercice 5*

<u>Idée</u> : dénombrer le complémentaire. Il y a $6^6$ lancers différents possibles. Il y a $5^6$ lancers contenant que des nombres de 1 à 5. Donc il y a $6^6 - 5^6$ lancers contenant au moins un $6$. Finalement, la probabilité d'obtenir au moins un 6 vaut $1 - (\frac{5}{6})^6$.

*<u>Solution de l'exercice 6</u>*

<u>Idée</u> : on fait des choix successifs. Pour la paire : on choisit la valeur de la paire ($13$ possibilités) les deux couleurs concernés ($\binom{4}{2}$ possibilités) les $3$ autres valeurs parmi les valeurs restantes ($\binom{12}{3}$ possibilités) et la couleur pour chacune d'elles ($4^3$ possibilités). Donc, au final, il y a $(13\binom{4}{2})(\binom{12}{3}4^3)$ paires différentes. De même, $(\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2)(11 \times 4)$ doubles paires, $(13\binom{4}{3})(\binom{12}{2}4^2)$ brelans, $(13\binom{4}{3})(12\binom{4}{2})$ full et $13 \times (12 \times 4)$ carrés.

Pour la suite : on choisit la première valeur de la suite entre As et 10 ($10$ possibilités) puis la couleur de chaque carte ($4^5$ possibilités). Il y a $10 \times 4$ quintes flush. Finalement, on soustrait, il y a $10 \times 4^5 - 40$ suites différentes.

Pour la couleur : on choisit la couleur ($4$ possibilités) puis les cartes ($\binom{13}{5}$) et on soustrait le nombre de quintes flush : $4\binom{13}{5} - 40$ possibilités.

Finalement, pour obtenir une probabilité, on divise par le nombre de mains en tout donc par $\binom{52}{5}$.

*<u>Solution de l'exercice 7</u>*

<u>Idée</u> : double comptage et changement d'indice.

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ correspond au nombre de choix possibles d'un nombre quelconque d'éléments parmi $n$ éléments et vaut donc $2^n$. On peut aussi le prouver par récurrence en utilisant la propriété $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$, ou avec le binôme de Newton pour $(1+1)^n$.
2. Regardons ce que signifie $\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$. On choisit un nombre $k$ entre $0$ et $n$. On choisit $k$ éléments parmi les $n$ éléments, puis on choisit $1$ élément parmi les $k$ éléments choisis. Mais on aurait aussi bien pu choisir $1$ élément parmi les $n$ éléments et $k-1$ éléments parmi les $n-1$ éléments restants. Donc, en posant $\binom{n}{-1} = 0$ :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k} &= \sum_{k=0}^{n} n\binom{n-1}{k-1} \\ &= n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} \\ &= n2^{n-1} \end{aligned}$$

On peut aussi retrouver ce résultat grâce au binôme de Newton en étudiant la dérivée de $(1+x)^n$ en $1$.

*<u>Solution de l'exercice 8</u>*

Le $k^{\text{ème}}$ niveau de la pyramide en partant du haut est un triangle équilatéral de taille $n$. Il contient donc $T_k$ billes où $T_k$ correspond au $k^{\text{ème}}$ nombre triangulaire. Donc, le nombre total de bille est :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} T_k &= \sum_{k=1}^{N} \frac{k(k+1)}{2} \\ &= \sum_{k=1}^{N}\binom{k+1}{2} \\ &= \sum_{k=2}^{N+1}\binom{k}{2} \end{aligned}$$

Montrons par récurrence sur $n \geq 2$ que $\sum_{k=2}^{n}\binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$ :

Initialisation : si $n = 2$, alors :

$$\sum_{k=2}^{2} \binom{k}{2} = 1 = \binom{2+1}{3}$$

L'initialisation est vérifiée.

Hérédité : supposons que, pour $n$ fixé, on a $\sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} = \binom{n+1}{3}$ (hypothèse de récurrence). Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{n+1} \binom{k}{2} &= \sum_{k=2}^{n} \binom{k}{2} + \binom{n+1}{2} \\ &= \binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} \\ &= \binom{n+2}{3} \end{aligned}$$

L'hérédité est vérifiée.

Finalement, par récurrence, on peut affirmer que $\sum_{k=2}^{N+1} \binom{k}{2} = \binom{N+2}{3}$. Donc le nombre de billes vaut $\binom{N+2}{3}$.

En s'inspirant la démonstration ci-dessus pour l'hérédité, on peut montrer par récurrence sur la dimension d de l'hypertétraèdre que le nombre de billes total est $\binom{N+d-1}{d}$.

*Solution de l'exercice 9*

Idée : choisir des "cloisons". On pose n le nombre de boules et p le nombre de parfums. On choisit $p-1$ cloisons parmi $p+n-1$ cases (les carrés noirs sont les cloisons, les carrés blanc sont les boules, ici p = 4, n = 5) :

$$\square\square\blacksquare\blacksquare\square\blacksquare\square\square$$

$$\underbrace{\square\square}_{\text{2 boules au parfum 1}} \quad \blacksquare \quad \underbrace{\phantom{\square}}_{\text{0 au parfum 2}} \quad \blacksquare \quad \underbrace{\square}_{\text{1 au parfum 3}} \quad \blacksquare \quad \underbrace{\square\square}_{\text{2 au parfum 4}}$$

Le nombre de cases strictement comprises entre la $(p-1)^{\text{ème}}$ cloison et la $p^{\text{ème}}$ cloison (la $0^{\text{ème}}$ cloison correspond au début et la $p^{\text{ème}}$ à la fin) correspond au nombre de boules du $p^{\text{ème}}$ parfum. Pour chaque glace, il existe un et un seul choix possible de cloisons et réciproquement. Donc le nombre de choix de cloisons correspond au nombre de glaces différentes, c'est-à-dire $\binom{n+p-1}{p-1}$. Pour n = 5 et p = 14, on trouve 8568 possibilités. On remarque qu'on obtient un résultat proche de celui de la question précédente. En effet, si on choisit d'abord le nombre de boules du premier parfum, on obtient une formule de récurrence proche de celle de la question précédente.

*Solution de l'exercice 10*

Idée : modifier l'énoncé pour se ramener à un problème plus simple. L'énoncé est équivalent à "un marchand de glace ne propose que des glaces à $n$ boules et à $p$ parfums mais il doit y avoir au moins une boule de chaque parfum dans la glace" où le $k^{\text{ème}}$ terme de la somme représente le nombre de boules du $k^{\text{ème}}$ parfum, qui est supérieur ou égal à 1. Mais cet énoncé est lui-même équivalent à "un marchand de glace ne propose que des glaces à $n$ boules et $p$ parfums mais la glace contient p boules de parfums différents et (n-p) boules laissées au choix du client". Or, il y a $\binom{(n-p)+p-1}{p-1}$ choix possibles pour le client d'après l'exercice précédent. Donc, au final, $n$ peut s'écrire de $\binom{n-1}{p-1}$ manières différentes en sommes ordonnées de $p$ termes.

*Solution de l'exercice 11*

La somme de droite correspond au nombre de choix d'au moins $p$ éléments parmi $n$. Pour calculer ce nombre, on peut aussi ordonner les éléments, choisir le rang $k$ du $p^{\text{ème}}$ nombre, choisir $p-1$ éléments parmi les $k-1$ premiers éléments puis choisir un nombre quelconque d'éléments parmi les $n-k$ derniers éléments. Ce calcul correspond à la somme de gauche. On a bien l'égalité.

# 2 Jeudi après-midi et vendredi : Géométrie

## 1 jeudi après-midi : François Lo Jacomo

Les angles interviennent en premier lieu dans la notion de triangle isocèle : un triangle a deux angles égaux si et seulement si il a deux côtés égaux. Mais aussi et surtout dans la notion d'angle inscrit : si $B$ et $C$ sont deux points fixes d'un cercle, et qu'on fait varier un troisième point $A$ sur ce même cercle, l'angle $\widehat{BAC}$ ne dépend pas de la position du point $A$.

Il existe plusieurs manières d'énoncer ce théorème : si quatre points $A$, $B$, $C$, $D$ sont sur un même cercle, les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux si $A$ et $D$ sont du même côté de la droite $(BC)$, supplémentaires s'ils sont de part et d'autre de $(BC)$. Réciproquement, quatre points quelconques du plan, $A$, $B$, $C$, $D$ vérifiant : $\widehat{BAC} = \widehat{BDC}$ si $A$ et $D$ du même côté de $(BC)$ ou $\widehat{BAC} + \widehat{BDC} = 180$ si $A$ et $D$ sont de part et d'autre de $(BC)$ sont "cocycliques", c'est-à-dire sur un même cercle. La démonstration doit envisager tous les cas de figure, mais l'idée essentielle est que si $A$ et $B$ sont sur un cercle de centre $O$, le triangle $AOB$ est isocèle. Si la droite $(AO)$ recoupe le cercle en $A'$, comme la somme des trois angles du triangle $AOB$ est égale à 180, $\widehat{BOA'} = \widehat{BAO} + \widehat{ABO} = 2.\widehat{BAO}$, d'où l'on déduit que l'angle au centre $\widehat{BOC}$, qui ne dépend pas de $A$, est le double de l'angle inscrit $\widehat{BAC}$.

Si l'on veut un théorème qui ne dépende pas des cas de figures, il faut introduire les angles de droites : l'angle $(AB, AC)$ est l'angle orienté dont il faut faire tourner la droite $(AB)$ pour la faire coïncider avec $(AC)$. Donc $(AB, AC) = -(AC, AB)$ et plus généralement : $(AB, AC) + (AC, AD) = (AB, AD)$ (relation de Chasles) quels que soient les points $A$, $B$, $C$ et $D$. En utilisant ces angles de droites, le théorème de l'angle inscrit s'écrit : quatre points $A$, $B$, $C$, $D$ sont sur un même cercle si et seulement si $(AB, AC) = (DB, DC)$.

Cas particulier important de ce théorème : l'angle $\widehat{BAC}$ est droit si et seulement si $A$ est situé sur le cercle de diamètre $[BC]$ (donc l'angle au centre est plat).

**Exercice 1**

Soient $C$ et $D$ deux points distincts d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$. Les droites $(AC)$ et $(BD)$ se coupent en $F$, les droites $(AD)$ et $(BC)$ se coupent en $F$. Montrer que les milieux des segments $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ sont alignés.

*Solution de l'exercice 1*

L'hypothèse "$C$ et $D$ sur le cercle de diamètre $[AB]$" se traduit par : $\widehat{ACB} = 90$ et $\widehat{ADB} = 90$". Mais cela entraine manifestement : $\widehat{FCE} = 90$ et $\widehat{FDE} = 90$, donc $(C)$ et $(D)$ sont également sur le cercle de diamètre $[EF]$. Le milieu $M$ de $[EF]$ est le centre de ce cercle, donc $MC = MD$, ce qui entraine que $M$ est sur la médiatrice de $[CD]$. Or, pour la même raison, le milieu $O$ de $[AB]$ est lui aussi sur la médiatrice de $[CD]$. Et par définition, cette même médiatrice passe par le milieu de $[CD]$.

**Bissectrices et cercle inscrit**

La bissectrice d'un angle partage un angle en deux angles égaux. Les points de la bissectrice sont à égale distance des deux côtés de l'angle. Il en résulte que les trois bissectrices d'un triangle $ABC$ se coupent en un point généralement appelé $I$, situé à égale distance des trois côtés du triangle. C'est donc le centre d'un cercle tangent aux trois côtés du triangle, appelé "cercle inscrit dans le triangle $ABC$".

**Exercice 2**

Soit $I$ le centre du cercle inscrit dans le triangle $ABC$. On suppose que : $CA + AI = BC$. Déterminer la valeur du rapport $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}}$

*Solution de l'exercice 2*

Lorsque deux segments ne sont pas bout à bout sur une même droite, on ne peut pas dire grand-chose de la somme de leurs longueurs. Donc pour utiliser l'hypothèse $CA+AI = BC$, il faut construire un segment $AJ$ sur la droite $(CA)$ tel que : $AJ = AI$ et $CJ = CA + AJ$ (donc $C$ et $J$ de part et d'autre de $A$). La relation $AJ = AI$ entraine alors que le triangle $AJI$ est isocèle, donc $\widehat{AJI} = \widehat{AIJ}$ : appelons $\alpha$ cet angle. $\widehat{IAC} = \widehat{AJI} + \widehat{AIJ} = 2\alpha$. Or $\widehat{IAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$ car $(AI)$ est bissectrice de $\widehat{BAC}$. Par ailleurs, les triangles $IJC$ et $IBC$ ont un angle égal : $\widehat{ICJ} = \widehat{ICB}$ situé entre deux côtés égaux, $CI$ et $CJ = CB$, ils sont donc isométriques (ils ont tous leurs côtés et tous leurs angles égaux), d'où en particulier : $\alpha = \widehat{IJC} = \widehat{IBC} = \frac{\widehat{CBA}}{2}$. Donc en définitive : $\widehat{CBA} = 2\alpha$ alors que $\widehat{BAC} = 4\alpha$, d'où $\frac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}} = 2$.

**Exercice 3**

Soit $ABC$ un triangle, $I$ le centre de son cercle inscrit. La droite $(AI)$ recoupe le cercle circonscrit à $ABC$ en un point $J$. Montrer que $JB = JC = JI$.

*Solution de l'exercice 3*

$A$, $B$, $J$ et $C$ étant cocycliques, $\widehat{BAJ} = \widehat{BCJ}$ (angles inscrits), tout comme $\widehat{CAJ} = \widehat{CBJ}$. Comme $(AI)$ est bissectrice de $\widehat{BAC}$, on en déduit que $\widehat{BCJ} = \widehat{CBJ}$, donc $JB = JC$ (triangle isocèle). Par ailleurs, on continue la "chasse aux angles" avec $\widehat{BIC}$, somme des deux angles à la base du triangle $BAI$ : $\widehat{BIC} = \widehat{IBA} + \widehat{IAB} = \widehat{IBC} + \widehat{CBJ} = \widehat{IBJ}$, donc $IJB$ est lui aussi un triangle isocèle, ce qui achève la démonstration.

**Hauteurs et orthocentre**

Les hauteurs d'un triangle $ABC$ se coupent en un point nommé orthocentre du triangle, et traditionnellement noté $H$. En effet, menons par $A$ la parallèle à $(BC)$, par $B$ la parallèle à $(CA)$ et par $C$ la parallèle à $(AB)$ : on voit apparaître trois parallélogrammes $ABCB'$, $ABA'C$ et $AC'BC$, donc la hauteur issue de $A$ est médiatrice de $[B'C']$, lieu des points équidistants de $B'$ et $C'$, celle issue de $B$ est médiatrice de $[C'A']$, celle issue de $C$, médiatrice de $[A'B']$, et les trois médiatrices d'un triangle se coupent en un point équidistant des trois sommets (centre du cercle circonscrit à $A'B'C'$).

**Exercice 4**

Soit $H$ l'orthocentre d'un triangle $ABC$, et $H_A$, $H_B$, $H_C$ les pieds des hauteurs issues de $A$, $B$, $C$. On supposera pour simplifier que $H$ est à l'intérieur du triangle $ABC$, ce qui revient à dire que tous les angles du triangle sont aigus (un tel triangle est dit acutangle). Déterminer les angles des triangles $AH_BH_C$, $H_ABH_C$, $H_AH_BC$ et $H_AH_BH_C$, en fonction des angles du triangle $ABC$, que l'on notera $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$

Remarque : on utilise beaucoup de points en géométrie du triangle, et si l'on veut éviter d'utiliser le même nom pour trop de points différents, il arrive qu'on soit à court de notations. Les notations $H_A$, $H_B$ et $H_C$ ne sont pas courantes, mais elles peuvent rendre des services dans bien des cas.

*Solution de l'exercice 4*

Etant donnés les angles droits $\widehat{BH_BC}$ et $\widehat{BH_CC}$, $H_B$ et $H_C$ sont sur le cercle de diamètre $[BC]$, d'où les angles inscrits $\widehat{BH_CH_B}$ et $\widehat{BCH_B}$ sont supplémentaires, puisque $C$ et $H_C$ sont de part et d'autre de $(BH_B)$, d'où $\widehat{AH_CH_B} = \widehat{C}$. De même, $\widehat{AH_BH_C} = \widehat{B}$, puis $\widehat{BH_CH_A} = \widehat{C}$, $\widehat{BH_AH_C} = \widehat{A} = \widehat{CH_AH_B}$ et $\widehat{CH_BH_A} = \widehat{B}$. Donc d'une part $\widehat{H_AH_BH_C} = 180 - 2\widehat{B}$, $\widehat{H_BH_CH_A} = 180 - 2\widehat{C}$, $\widehat{H_CH_AH_B} = 180-2\widehat{A}$, d'autre part les hauteurs du triangle $ABC$ sont les bissectrices du triangle $H_AH_BH_C$, et l'orthocentre de $ABC$ est centre du cercle inscrit dans $H_AH_BH_C$.

**Exercice 5**

Soit $ABC$ un triangle d'orthocentre $H$. On supposera pour simplifier que $H$ est intérieur au triangle (triangle acutangle). Montrer que le symétrique de $H$ par rapport aux côtés $(AB)$, $(BC)$ et $(CA)$ du triangle sont sur le cercle circonscrit à $ABC$.

*Solution de l'exercice 5*

Une simple "chasse aux angles" suffit : en appelant, cette fois, $H_A$, $H_B$ et $H_C$ les symétriques de $H$ par rapport aux côtés du triangle, $H'_A$, $H'_B$ et $H'_C$ les pieds des hauteurs, milieux de $HH_A$, $HH_B$ et $HH_C$ : dans le triangle rectangle $BH'_BC$, $\widehat{H'_BBC} = 90 - \widehat{C}$. De même, $\widehat{H'_CCB} = 90 - \widehat{B}$. Donc le troisième angle du triangle $BHC$ : $\widehat{BHC} = \widehat{B} + \widehat{C} = 180 - \widehat{A}$. $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BHC}$ sont supplémentaires, mais $H$ et $A$ ne sont pas de part et d'autre de $(BC)$, donc $A$, $B$, $C$ et $H$ ne sont pas cocycliques. En revanche, si $H_A$ est le symétrique de $H$ par rapport à $(BC)$, les triangles $BHC$ et $BH_AC$ ont les mêmes angles, donc $\widehat{BH_AC}$ et $\widehat{BAC}$ sont encore supplémentaires, mais cette fois-ci $A$ et $H_A$ sont situés de part et d'autre de $(BC)$, donc les quatre points $A$, $H_A$, $B$ et $C$ sont cocycliques. De même pour $H_B$ et $H_C$.

## 2 vendredi matin : Ippolyti Dellatolas

**Droite de Steiner, droite de Simson**

**Théorème 9** (Droite de Steiner)**.** Un point $M$ appartient au crecle circonscrit d'un triangle $ABC$ si et seulement si les trois symétriques $M_A$, $M_B$ et $M_C$ par rapport aux côtés du triangle ($(BC)$, $(AC)$ et $(AB)$ respectivement) sont alignés.

**Remarque 10.** La droite de Steiner passe par l'orthocentre du triangle $ABC$.

**Théorème 11** (Droite de Simson)**.** Un point $M$ appartient au crecle circonscrit d'un triangle $ABC$ si et seulement si les projections $M'_A$, $M'_B$ et $M'_C$ sur les côtés du triangle ($(BC)$, $(AC)$ et $(AB)$ respectivement) sont alignés.

**Démonstration.** Notons que $M'_A$, $M'_B$ et $M'_C$ sont les milieux de $[MM_A]$, $[MM_B]$ et $[MM_C]$ respectivement, et démontrons la droite de Steiner. Pour cela, on travaillera avec des angles de droite pour ne pas devoir distinguer différents cas de figure.
Soit $H$ l'orthocentre du triangle $ABC$. On note $H_A$, $H_B$ et $H_C$ les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés $(BC)$, $(AC)$ et $(AB)$ respectivement. On sait que ces trois points sont sur le cercle circonscrit à $ABC$. On a : $(AH, M_AH) = -(AH_A, MH_A) = (MH_A, AH_A)$ et $(BH, M_BH) = (MH_B, BH_B)$. De plus, $(MH_B, BH_B) = (MC, BC)$ d'après le théorème de l'angle inscrit, et on sait aussi que $(AH, HB) = (BC, CA)$. Ainsi $(AH, M_BH) = (AH, BH) + (BH, M_BH) = (BC, AC) + (MC, BC) = (MC, AC)$. Or, en utilisant les angles inscrits, $(AH, M_AH) = (MH_A, AH_A) = (MC, AC)$. D'où $(AH, M_AH) = (AH, M_BH)$. Les doites $(HM_A)$ et $(HM_B)$ sont donc parallèles et ont un point commun $H$, elles sont donc confondues. De même on montre que les droites $(HM_B)$ et $(HM_C)$ sont confondues. Ainsi les points $M_A$, $M_B$, $M_C$ et $H$ sont alignés.
La droite de Simson se déduit de la droite de Steiner par une homothétie de centre M et de rapport $\frac{1}{2}$. $\square$

**Exercices**

**Exercice 1** Démontrer le théorème de la droite de Simson sans passer par la droite de Steiner.

Solution de l'exercice 1 Voir la solution de l'exercice 13 du cours de géométrie de Pierre Dehornoy.

**Puissance d'un point par rapport à un cercle**

On considère un cercle $\Gamma$, un point $A$, deux droites $(\Delta)$ et $(\Delta')$ passant par $A$, qui coupent $\Gamma$ en $B$ et $C$ pour $(\Delta)$ et $B'$ et $C'$ pour $(\Delta')$.

**Définition 12.** On appelle puissance du point $A$ par rapport à $\Gamma$ la quantité $AB \times AC$, qui est un produit algébrique (négatif si $AB$ et $AC$ ne sont pas dans le même sens). On la note $P(A, \Gamma)$.

**Proposition 13.** Le produit $AB \times AC$ ne dépend que de $A$ et de $\Gamma$, pas de la droite passant par $A$.

**Démonstration.** Les triangles $ACC'$ et $ABB'$ sont semblables, et on a $\frac{AB'}{AC} = \frac{AB}{AC'}$, d' où $AB \times AC = AB' \times AC'$.
Si $B$ et $C$ sont confondus, $(\Delta)$ est tangente au cercle $\Gamma$, alors les triangles $ABT$ et $ACT$ sont semblables, tels que $\frac{AT}{AB} = \frac{AC}{AT}$, d'où $AB \times AC = AT^2$. Le résultat est donc toujours vrai.
Si $A$ est à l'intérieur de $\Gamma$, $B$ et $C$ sont de part et d'autre de $A$, le produit est alors négatif. □

**Remarque 14.** $P(A, \Gamma) = 0$ si et seulement si $A \in \Gamma$.

**Proposition 15.** Soit $O$ le centre de $\Gamma$ et $r$ le rayon de $\Gamma$, on a $P(A, \Gamma) = OA^2 - r^2$.

**Démonstration.**

1. On considère le cas où $A$ est à l'extérieur de $\Gamma$ et où $(\Delta)$ est tangente à $\Gamma$ au point $T$, alors $P(A, \Gamma) = AT^2$. Les droites $(OT)$ et $(AT)$ sont orthogonales, donc, d'après le théorème de Pythagore, $OA^2 = OT^2 + AT^2$, d'où $AT^2 = OA^2 - OT^2 = OA^2 - r^2$, soit enfin $P(A, \Gamma) = OA^2 - r^2$.
2. Si A est intérieur à $\Gamma$, le résultat est toujours vrai.On considère la perpendiculaire à $(OA)$ passant par $A$, on a $OC = OB = r$, et d'après le théorème de Pythagore $r^2 = OB^2 = OA^2 + OB^2$, d'où $AB^2 = r^2 - OA^2$. Or on a vu $P(A, \Gamma) = -AB \times AC = -AB^2 = OA^2 - r^2$.

□

**Proposition 16.** Soient $A$, $B$, $C$ alignés et $A$, $B'$, $C'$ alignés. Alors $AB \times AC = AB' \times AC'$ si et seulement si $B$, $B'$, $C$ et $C'$ sont cocycliques.

**Démonstration.** On considère le triangle $BCB'$ et son cercle circonscrit $\Gamma$. Soit $C_0$ le point d'intersection de $(AB')$ et $\Gamma$, on a : $AB' \times AC_0 = AB \times AC = AB' \times AC'$ par définition, d'où $C_0 = C'$ □

### Axe radical

Soient deux cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ de centres respectifs $O_1$ et $O_2$ et de rayons respectifs $r_1$ et $r_2$.

**Définition 17.** On appelle axe radical de deux cercles l'ensemble des points qui ont meme puissance par rapport aux deux cercles.

On sait que c'est l'ensemble des points $P$ tels que $PO_1^2 - r_1^2 = PO_2^2 - r_2^2$ soit $PO_1^2 - PO_2^2 = r_1^2 - r_2^2$. Par le théorème de Pythagore on montre que l'ensemble de ces points $P$ est une droite perpendiculaire à $(O_1O_2)$.
Si les deux cercles se coupent en deux points $A$ et $B$ alors leur axe radical est la droite $(AB)$.
Si les deux cercles sont tangents en un point $A$, alors leur axe radical est la tangente commune qui les sépare.

**Théorème 18** (Théorème des axes radicaux)**.** Soient trois cercles $\Gamma_1$, $\Gamma_2$ et $\Gamma_3$. Alors leurs axes radicaux $(\Delta_1)$, $(\Delta_2)$ et $(\Delta_3)$ sont soit confondus, soit parallèles, soit concourants.

**Démonstration.** Soit un point appartenant à deux axes radicaux, il a même puissance par rapport aux trois cercles, donc il appartient au troisième axe. Si les axes $(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ sont confondus, il le sont aussi avec $(\Delta_3)$. S'ils ont un seul point d'intersection, ils coupent $(\Delta_3)$ en ce point. Sinon, ils sont parallèles deux à deux donc tous parallèles. □

### Exercices

**Exercice 2** Soient deux cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ qui se coupent en $P$ et $Q$. La tangente commune aux deux cercles la plus proche de $P$ touche les cercles en $A$ et $B$ respectivement. Soit $I$ le point d'intersection des droites $(AB)$ et $(PQ)$. Montrer que $I$ est le milieu de $[AB]$.

*Solution de l'exercice 2* $(IP)$ et $(IQ)$ sont tangentes à $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ respectivement, donc : $P(I, \Gamma_1) = IA^2$ et $P(I, \Gamma_2) = IB^2$. Or $I$ appartient à l'axe radical des deux cercles, donc par définition $I$ a même puissance par rapport aux deux cercles. Ainsi $IA^2 = IB^2$, d'où $IA = BI$ et $I$ est le milieu de $[AB]$.

**Exercice 3** Soit un triangle $ABC$ et deux points $D$ et $E$ appartenant aux droites $(AB)$ et $(AC)$ respectivement. Montrer que l'orthocentre $H$ du triangle $ABC$ appartient à l'axe radical des cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ de diamètres respectifs $[BE]$ et $[DC]$.

*Solution de l'exercice 3* Soient $(BK)$ et $(CL)$ deux hauteurs du triangle $ABC$.
Pour que $H$ appartienne à l'axe radical de $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$, il faut et il suffit que $H$ ait même puissance par rapport aux deux cercles. Or $\widehat{BLC} = \widehat{BKC}$ donc le quadrilatère $BKLC$ est inscriptible, d'où $HB \times HK = HC \times HL$. De plus $P(H, \Gamma_1) = HB \times HK$ et $P(H, \Gamma_2) = HC \times HL$. D'où $P(H, \Gamma_1) = P(H, \Gamma_2)$.
Ainsi $H$ appartient à l'axe radical de $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$.

**Exercice 4** Soit un triangle $ABC$ et son cercle circonsrcit $\Gamma$. La tangente à $\Gamma$ passant par $A$ coupe $(BC)$ en $R$. Soit $M$ le milieu de $RA$. La droite $(MB)$ recoupe $\Gamma$ en $D$ et la droite $(RD)$ recoupe $\Gamma$ en $E$. Montrer que $(CE)$ et $(AR)$ sont parallèles.

*Solution de l'exercice 4* On sait que $MA = MR$ et $P(M, \Gamma) = MA^2 = MB \times MD$, d'où $MR^2 = MB \times MD$ soit $\frac{MR}{MB} = \frac{MD}{MR}$. Les triangles $MRB$ et $MDR$ ont l'angle $\widehat{RMD}$ en commun, donc d'après l'égalité précédente ils sont semblables. D'où $\widehat{MRB} = \widehat{MDR}$. Dans le quadrilatère inscrit $BCED$, on a $\widehat{BDR} = \widehat{BCE}$, d'où $\widehat{MRD} = \widehat{BCE}$ soit $\widehat{ARC} = \widehat{RCE}$.
Ainsi les angles $\widehat{ARC}$ et $\widehat{RCE}$ sont alternes internes égaux, les droites $(AR)$ et $(CE)$ sont donc parallèles.

**Exercice 5** On considère quatre points $A$, $B$, $C$, et $D$ alignés dans cet ordre. Les cercles $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ de diamètres respectifs $AC$ et $BD$ se coupent en $K$ et $L$. Soit $P$ un point de $(KL)$ qui n'appartient pas à $(AD)$. La droite $(CP)$ coupe $\Gamma_1$ en $C$ et $M$ et la droite $(BP)$ coupe $\Gamma_2$ en $B$ et $N$. Montrer que les droites $(AM)$, $(DN)$ et $(KL)$ sont concourantes.

*Solution de l'exercice 5* On sait que $P(P, \Gamma_1) = PM \times PC = PK \times PL$ et $P(P, \Gamma_2) = PB \times PN = PK \times PL$ d'où $PM \times PC = PB \times PN$. Le quadrilatère $BMNC$ est donc inscriptible et $\widehat{BNM} = \widehat{BCM}$. De plus $\widehat{MAD} = \widehat{MAC}$ =90$-\widehat{ACM}$ =90$-\widehat{BNM}$. Ainsi $\widehat{MAD} + \widehat{MND} = (90 - \widehat{MNB}) + (\widehat{MNB} + \widehat{BND}) = 90 + \widehat{BND}$=180.
Les points $A$, $M$, $N$ et $D$ sont donc cocycliques. Soit $\Gamma'$ le cercle circonscrit au quadrilatère $AMND$. Alors $(AM)$ est l'axe radical de $\Gamma_1$ et $\Gamma'$ ; $(ND)$ est l'axe radical de $\Gamma_2$ et $\Gamma'$ ; $(KL)$ est l'axe radical de $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$. Ces trois droites sont donc concourantes et se coupent au centre radical des trois cercles.

**Exercice 6** Soit un triangle $ABC$ et son cercle inscrit $\Gamma$. Ce cercle inscrit est tangent aux côtés $AC$, $BC$ et $AB$ respectivement aux points $Y$, $X$ et $Z$. Soit $\gamma_A$ le cercle exinscrit de l'angle $\widehat{A}$ qui est tangent aux côtés $AC$, $BC$ et $AB$ respectivement aux points $K_C$, $T$ et $K_B$. Montrer que $BK_A = CX$.

*Solution de l'exercice 6* On sait que :
$P(A, \Gamma) = AZ^2 = AY^2$ d'où $AZ = AY = x$
$P(B, \Gamma) = BZ^2 = BX^2$ d'où $BZ = BX = y$
$P(C, \Gamma) = CX^2 = CY^2$ d'où $CX = CY = z$
Alors $BC = y + z$ ; $AC = x + z$ ; $AB = x + y$
$P(A, \Gamma_A) = AK_B^2 = AK_C^2$ d'où $AK_B = AK_C$ $(\alpha)$
$P(B, \Gamma) = BK_B^2 = BT^2$ d'où $BT = BK_B$
$P(C, \Gamma) = CK_C^2 = CT^2$ d'où $CT = CK_C$
$(\alpha)$ donne $AB + BK_B = AC + CK_C$ soit $AB + BT = AC + CT = \frac{AB+AC+BT+CT}{2} = x + y + z$ d'où $x + y + BT = x + y + z$ soit enfin $BT = z = CX$

**Exercice 7** Soit un triangle $ABC$ et son cercle inscrit. Ce cercle inscrit est tangent aux côtés $AC$, $BC$ et $AB$ respectivement aux points $Y$, $X$ et $Z$. On nomme $G$ le point d'intersection des segments $[BY]$ et $[CZ]$. $R$ et $S$ les points tels que $BZRC$ et $CYSB$ soient des parallélogrammes. Montrer que $GR = GS$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> On veut montrer que $G$ est sur la médiatrice de $[RS]$, ie que $G$ appartient à l'axe radical de $R$ et $S$ (cercles de centre $R$ et $S$ et de rayon $0$). Soit $\gamma_A$ le cercle exinscrit de l'angle $\widehat{A}$ qui touche $(BC)$ en $T$ et $(AC)$ en $V$. Montrons que $(BY)$ est l'axe radical de $S$ et $\gamma_A$. On sait que $P(B,S) = BS^2$ et $P(B,\gamma_A) = BT^2$. Or, $BT = CX = CY = BS$ car $BSYC$ est un parallélogramme, d'où $BT^2 = BS^2$ soit $P(B,S) = P(B,\gamma_A)$. On sait aussi que $P(Y,S) = YS^2$ et $P(Y,\gamma_A) = YV^2 = (YC+CV)^2 = (CX+CT)^2 = (BT+CT)^2 = BC^2 = YS^2$ d'où $P(Y,S) = P(Y,\gamma_A)$. Ainsi $(BY)$ est l'axe radical de $S$ et $\gamma_A$. De même on montre que $(CZ)$ est l'axe radical de $R$ et $\gamma_A$. $(BY)$ et $(CZ)$ se coupent en $G$ donc $G$ est le centre radical de $S$, $R$ et $\gamma_A$.
Ainsi $GR = GS$.

## 3 vendredi après-midi : Thomas Budzinski

### Transformations

**Résumé du cours**

Les trois livres "Geometric transformations" de Yaglom (en anglais !) est une référence sur les transformations. Le tome I traite les rotations et translations, le tome II les homothéties et les similitudes, le tome III (nettement plus difficile) les transformations projectives.

**Translations, vecteurs**

**Définition 19.** Un vecteur est un objet géométrique caractérisé par une direction, un sens et une longueur.

**Définition 20.** La translation de vecteur $\vec{v}$ est la transformation qui à un point $A$ associe le point $B$ tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

**Proposition 21.** Les translations conservent les longueurs, les angles, les droites, les cercles etc... L' image d'une droite par une translation est parallèle à la droite de départ.

**Proposition 22.** $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si $ABDC$ est un parallélogramme.
$\overrightarrow{CD}$ peut s'écrire sous la forme $k\overrightarrow{AB}$ si et seulement si $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles. On dit alors que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

**Proposition 23.** (Relation de Chasles)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

**Rotations**

**Définition 24.** Soient $O$ un point du plan et $\theta$ un angle. La rotation de centre $O$ et d'angle $\theta$ est la transformation qui à un point $M$ associe le point $M'$ tel que $OM' = OM$ et $\angle MOM' = \theta$, les angles étant orientés.

**Proposition 25.** Les rotations conservent les longueurs, les angles, les droites, les cercles etc... De plus, si $(\Delta')$ est l'image d'une droite $\Delta$ par un rotation d'angle $\theta$, alors l'angle entre les droites $(\Delta)$ et $(\Delta')$ vaut $\theta$.

**Proposition 26.**
— La composée de deux rotations d'angles $\theta$ et $\theta'$ est une translation si $\theta + \theta'$ est un multiple de $360°$, et une rotation sinon.
— Soient $(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$ deux droites se coupant en un point $O$ et faisant entre elles un angle $\theta$. On note $s_1$ et $s_2$ les symétries par rapport à $(\Delta_1)$ et $(\Delta_2)$. Alors $s_1 \circ s_2$ est la rotation de centre $O$ et d'angle $2\theta$.

**Proposition 27.** Si $[AB]$ et $[A'B']$ sont deux segments non parallèles de même longueur, il existe une unique rotation envoyant $A$ sur $A'$ et $B$ sur $B'$.

**Homothéties**

**Définition 28.** Soient $O$ un point du plan et $k$ un réel non nul. L'homothétie de centre $O$ et de rapport $k$ est la transformation qui à un point $M$ associe le point $M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM}$.

**Proposition 29.** Les homothéties conservent les angles, les rapports de longueurs, les droites, les cercles etc... De plus, l'image d'une droite $(\Delta)$ par une homothétie est parallèle à $\Delta$.

**Proposition 30.** La composée de deux homothéties $h_1$ et $h_2$ de rapports $k_1$ et $k_2$ est une translation si $k_1 k_2 = 1$, et une homothétie de rapport $k_1 k_2$ sinon. Dans ce cas, le centre de $h_1 \circ h_2$ est aligné avec ceux de $h_1$ et de $h_2$.

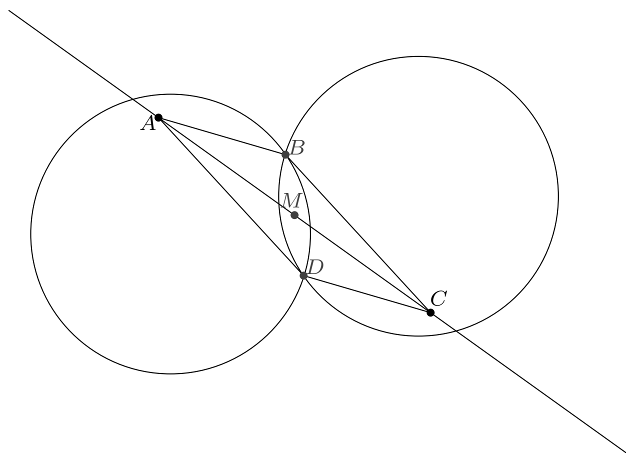
**Proposition 31.** Soient $[AB]$ et $[A'B']$ deux segments supportés par des droites parallèles. Il existe une unique homothétie envoyant $A$ sur $A'$ et $B$ sur $B'$.

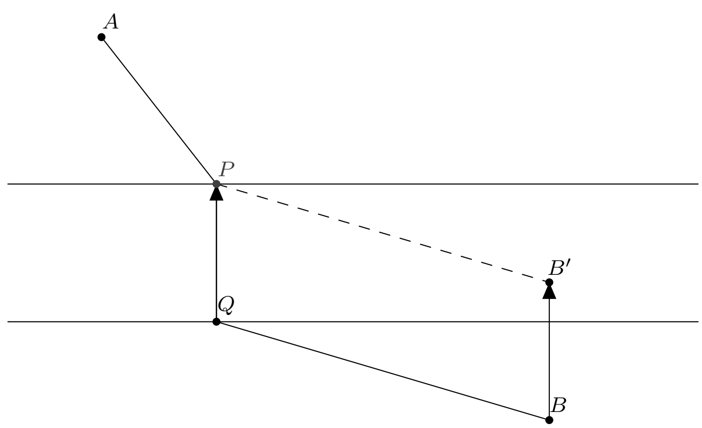
**Exercices**

**Exercice 1** Etant donnés deux points $A$ et $C$ et un cercle $\Gamma$, construire deux points $B$ et $D$ sur $\Gamma$ tels que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Solution de l'exercice 1 Soit $M$ le milieu de $[AC]$ : ABCD est un parallélogramme ssi $M$ est le milieu de $[BD]$ ssi $B$ est le symétrique de $D$ par rapport à $M$. $B$ doit donc être sur le symétrique $\Gamma'$ de $\Gamma$ par rapport à $M$, ce qui permet de le tracer. $D$ est alors l'autre intersection des deux cercles.

**Exercice 2** On considère une rivière droite de largeur $L$ et deux points $A$ et $B$ de part et d'autre de cette rivière. On veut construire un pont perpendiculaire à la rivière. Où le construire pour que le trajet de $A$ à $B$ soit le moins long possible ?



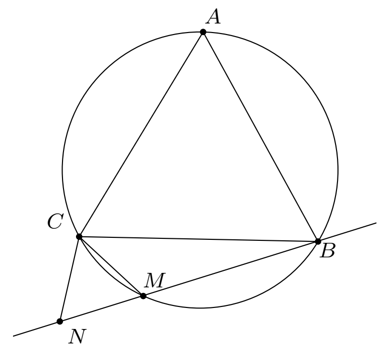




*Solution de l'exercice 2* Soit $\vec{v}$ le vecteur perpendiculaire à la rivière dirigé vers $A$ et de longueur $L$, et $B'$ l'image de $B$ par la translation de vecteur $\vec{v}$ : si le pont va de $P$ à $Q$, la longueur du trajet vaut $AP + PQ + QB = AP + PB' + L$. Il faut donc que $AP + PB'$ soit le plus petit possible, donc que $P$ soit aligné avec $A$ et $B'$. $P$ est donc l'intersection de $(AB')$ et de la rive du cà´té de $A$.

**Exercice 3** Soient $(\Delta_1)$, $(\Delta_2)$ et $(\Delta_3)$ trois droites.
Construire un triangle équilatéral ayant un sommet sur chacune des trois droites.

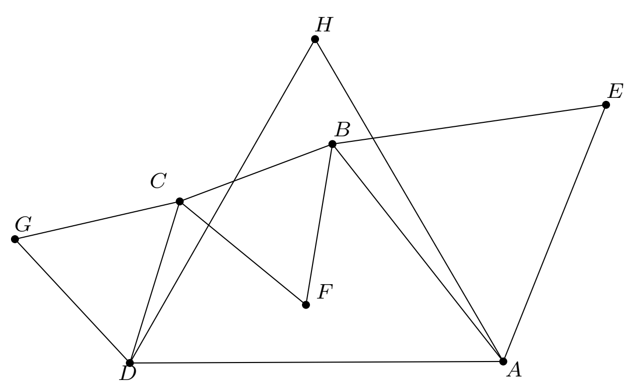
*Solution de l'exercice 3* On choisit $A_1$ arbitrairement sur $(\Delta_1)$. Pour tout point $A_2$, le point $A_3$ tel que $A_1A_2A_3$ soit équilatéral est l'image de $A_2$ par la rotation $r$ de centre $A_1$ et d'angle $60°$. $A_3$ doit donc appartenir à $(\Delta_3)$ et à $r(\Delta_2)$, ce qui permet de tracer le triangle.

**Exercice 4** Soit $ABC$ un triangle équilatéral et $M$ sur son cercle circonscrit, sur l'arc entre $B$ et $C$ ne contenant pas $A$.
Montrer que $MB + MC = MA$.




*Solution de l'exercice 4* En géométrie, il est plus facile de manipuler des sommes de longueurs quand les points considérés sont alignés. Soit donc $N$ le point de $(MB)$ sur la demi-droite issue de $M$ ne contenant pas $B$, tel que $MN = MC$ : par chasse aux angles, $\angle CMN = 60°$, donc $CMN$ est équilatéral. On veut maintenant montrer $AM = BN$. Or, soit $r$ la rotation de centre $C$ et d'angle $60°$ : elle envoie $A$ sur $B$ et $M$ sur $N$, d'où le résultat.

**Exercice 5** Soient $ABCD$ un quadrilatère convexe et $E$, $F$, $G$ et $H$ tels que $ABE$, $BCF$, $CDG$ et $DAH$ soient équilatéraux avec $ABE$ et $CDG$ dirigés vers l'extérieur de $ABCD$ et $BCF$ et $DAH$ dirigés vers l'intérieur.
Montrer que $EFGH$ est un parallélogramme.




*Solution de l'exercice 5* On suppose $ABCD$ direct : soient $r_1$ la rotation de centre $A$ et d'angle $60°$ et $r_2$ la rotation de centre $C$ et d'angle $-60°$. On a :

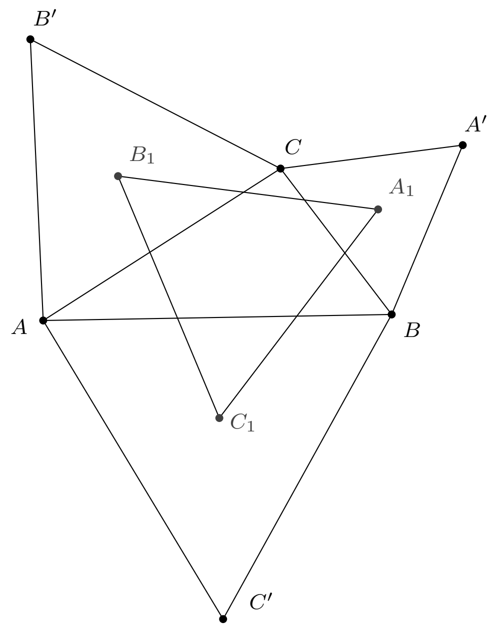
$$r_2 \circ r_1(E) = r_2(B) = F$$

et

$$r_2 \circ r_1(H) = r_2(D) = G$$

donc EH=FG et, de même, EF=GH.

**Exercice 6** (Théorème de Napoléon) Soient $ABC$ un triangle et $A'$, $B'$ et $C'$ tels que $A'BC$, $AB'C$ et $ABC'$ soient équilatéraux, extérieurs à $ABC$. Soient $A_1$, $B_1$ et $C_1$ les centres de ces triangles équilatéraux.
Montrer que $A_1B_1C_1$ est équilatéral.




<u>*Solution de l'exercice 6*</u> On suppose $ABC$ direct : la figure présentant des triangles équilatéraux, il est naturel de considérer des rotations de $60°$ ou $120°$. On veut les composer pour aboutir à quelque chose de simple, comme une translation. Soient donc $r_A$, $r_B$ et $r_C$ les rotations de centres $A_1$, $B_1$ et $C_1$ et d'angle $120°$ : leur composée est une translation car $3 * 120 = 360$. De plus, on a :

$$r_A \circ r_B \circ r_C(B) = r_A \circ r_B(A) = r_A(C) = B$$

d'où $r_A \circ r_B \circ r_C = Id$. En particulier, $r_A \circ r_B(C_1) = C_1$. Soit donc $D = r_B(C_1)$ : on a $r(D) = C_1$. En faisant une figure avec les angles et les égalités de longueurs, on voit que $A_1DB_1C_1$ est un losange avec un angle en $C_1$ de 60°, donc $A_1B_1C_1$ est bien équilatéral.

**Exercice 7** Soient $A$ et $B$ deux points. Montrer que la composée des symétries de centres $A$ et $B$ est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AB}$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> Soit $M$ un point du plan, $M'$ le symétrique de $M$ par rapport à $A$ et $M''$ celui de $M'$ par rapport à $B$. On veut montrer que $\overrightarrow{MM''} = 2\overrightarrow{AB}$. Or, on sait que $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{M'B}$. On a donc, en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = 2\overrightarrow{AM'} + 2\overrightarrow{M'B} = 2\overrightarrow{AB}$$

**Exercice 8** (Centre de gravité)
Montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes en un point $G$ vérifiant :

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Pour commencer, un point $G$ vérifiant la condition vectorielle existe bien. Elle équivaut en effet, d'après la relation de Chasles, à :

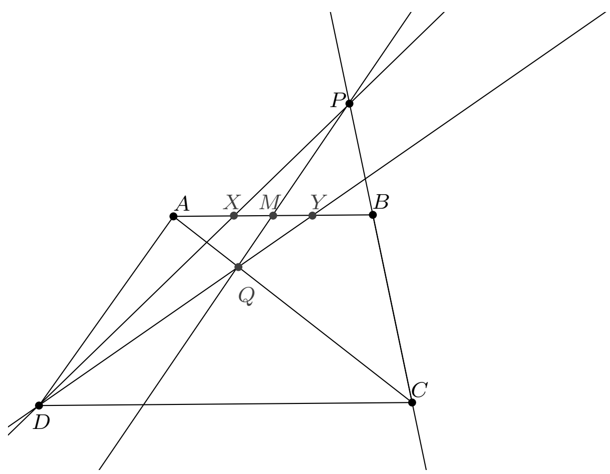
$$3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$$

soit $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, et un unique point $G$ vérifie cette propriété. Soit de plus $M$ le milieu de $BC$. On a :

$$\overrightarrow{GM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{GA}$$

donc $G$, $M$ et $A$ sont alignés et $G$ est sur la médiane issue de $A$, et de même pour les autres médianes.

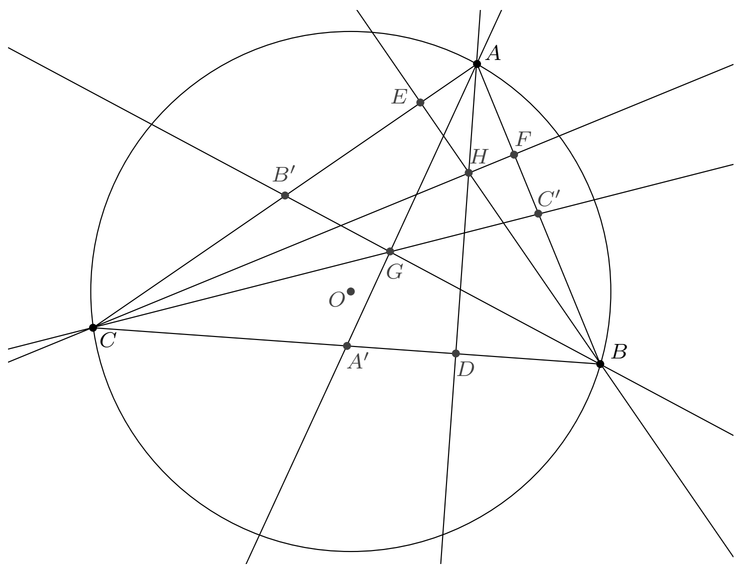
**Exercice 9** Soient $ABCD$ un trapèze avec $(AB)$ parallèle à $(CD)$, $M$ le milieu de $[AB]$ et $P$ un point de $(BC)$. On pose $X = (PD) \cap (AB)$, $Q = (PM) \cap (BD)$ et $Y = (PQ) \cap (AB)$. Montrer que $M$ est le milieu de $[XY]$.




<u>*Solution de l'exercice 9*</u> Les droites parallèles donnent envie de chercher des homothéties qui les envoient l'une sur l'autre. Deux sont intéressantes : celle de centre $Q$ qui envoie $A$ sur $C$ et $B$ sur $D$, qu'on note $h_Q$ et celle de centre $P$ qui envoie $C$ sur $B$ et $D$ sur $Y$, qu'on note $h_P$.
$h_P \circ h_Q$ est alors une homothétie qui envoie $A$ sur $B$ et $Y$ sur $X$. Son centre est sur $(AB)$ et sur $(PQ)$ (car c'est le centre d'une composée d'homothéties de centres $P$ et $Q$), donc c'est $M$ et, comme $M$ est le milieu de $[AB]$, $h_P \circ h_Q$ est la symétrie centrale de centre $M$, d'où le résultat.

**Exercice 10** (Droite d'Euler)
Soient $ABC$ un triangle, $O$ le centre de son cercle circonscrit, $G$ son centre de gravité (i.e le point d'intersection de ses médianes) et $H$ son orthocentre (i.e le point d'intersection de ses hauteurs). On note $A'$, $B'$ et $C'$ les milieux de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ et $D$, $E$, $F$ les pieds des hauteurs issues de $A$, $B$ et $C$..

— Montrer que $A'B'C'$ est l'image de $ABC$ par une homothétie bien choisie de centre $G$.
— En déduire que $O$, $G$ et $H$ son alignés.




<u>*Solution de l'exercice 10*</u>
— On utilise l'exercice 8.
— Soit $h$ l'homothétie de la première question : $h(ABC) = A'B'C'$, donc $h$ envoie $H$ sur l'orthocentre de $A'B'C'$. Or, $O$ est l'orthocentre de $A'B'C'$. En effet, $(OA')$ est perpendiculaire à $(BC)$, donc à $(B'C')$ par le théorème de la droite des milieux, donc c'est la hauteur issue de $A'$ dans $A'B'C'$.
$O$, $G$ et $H$ sont donc alignés et, plus précisément, $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.

# 3 Samedi : Test final

## 1 Enoncé

L'énoncé du test final n'était pas encore connu à l'heure à laquelle le polycopié a été envoyé à l'imprimeur.

## 2 Solution

La solution du test final n'était pas encore connue à l'heure à laquelle le polycopié a été envoyé à l'imprimeur.

# V. Avancés

## 1 Mercredi et jeudi matin : Combinatoire

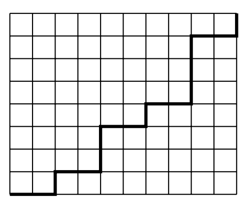
### 1 mercredi matin : Irène Marcovici

**Échauffement**

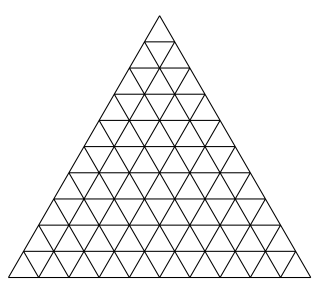
**Exercice 1** Soit $S$ un ensemble contenant $n$ éléments. Combien existe t-il de manières de choisir deux sous-ensembles de $S$ (non nécessairement distincts) dont l'union soit égale à l'ensemble $S$ ?

**Compter des chemins et des figures**

**Exercice 2** On se déplace sur une grille en faisant uniquement des pas d'une unité vers la droite ou vers le haut. Quel est le nombre de manières d'aller du point $(0, 0)$ au point $(m, n)$ ?



**Exercice 3** On considère une grille triangulaire obtenue en divisant un triangle équilatéral de côté $n$ en $n^2$ triangles équilatéraux de côté $1$. Déterminer le nombre de parallélogrammes qui apparaissent sur cette grille.



**Partitions**

Une partition d'un entier $n$ est une manière d'écrire $n$ comme somme d'entiers positifs, où l'ordre des termes de la somme n'importe pas. On peut par exemple choisir comme convention de les écrire toujours dans l'ordre décroissant. Ainsi, l'entier $4$ a exactement cinq partitions :

$$4 = 1+1+1+1, \quad 4 = 2+1+1, \quad 4 = 2+2, \quad 4 = 3+1, \quad 4 = 4.$$

**Exercice 4** Soient $n$ et $k$ des entiers positifs. Montrer que le nombre de partitions de $n$ en exactement $k$ parties est égal au nombre de partitions de $n$ pour lesquelles l'élément le plus grand de la partition est exactement $k$.

**Exercice 5** Montrer que le nombre de partitions de $n$ en parties de tailles distinctes est égal au nombre de partitions de $n$ en parties de tailles impaires.

**Permutations**

**Exercice 6** On note $p_k$ le nombre de permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ ayant $k$ points fixes. Calculer :

$$\sum_{i=0}^{n} k\ p_k.$$

**Et d'autres réjouissances**

**Exercice 7** Une colonie de vacances rassemble quinze participants. Chaque jour, trois d'entre eux sont choisis pour faire la vaisselle. A la fin du séjour, on constate que quelle que soit la manière de choisir deux participants, il y a exactement une journée où ils ont été tous les deux de corvée. Combien de jours a duré la colonie de vacances ?

**Exercice 8** Deux cents élèves participent à une compétition de mathématiques. Ils ont six problèmes à résoudre. On sait que chaque problème a été résolu par au moins 120 participants. Montrer qu'il est possible de trouver deux participants de telle manière à ce que chacun des problèmes ait été résolu par au moins l'un de ces deux participants.

**Exercice 9** Combien y a t-il de manières de choisir $6$ nombres dans l'ensemble $\{1, 2, \dots, 49\}$ de telle sorte à ce qu'il y ait au moins deux nombres consécutifs parmi les $6$ ?

**Exercice 10** Soient $x_1, \dots x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ des nombres réels. On définit une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ par

$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } x_i + y_j \geq 0, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

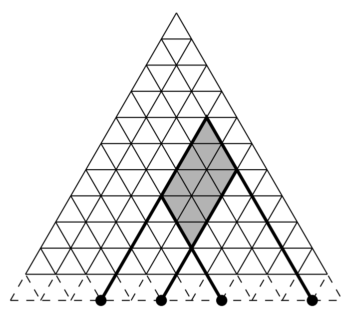
On suppose que $B$ est une matrice $n \times n$ contenant uniquement des $0$ et des $1$, telle que la somme des éléments sur chaque ligne et sur chaque colonne est égale à la somme correspondante pour la matrice $A$. Montrer que $A = B$.

**Solutions des exercices**

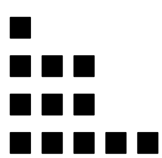
<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Notons $A$ et $B$ les deux ensembles. Chaque élément doit être soit uniquement dans $A$, soit uniquement dans $B$, soit à la fois dans $A$ et dans $B$. Il y a ainsi $3$ possibilités pour chaque élément, soit $3^n$ possibilités en tout. Cependant, comme l'ordre des ensembles n'importe pas, chaque choix de deux ensembles est compté deux fois, sauf celui qui correspond à $A = B = S$. Ainsi, le nombre de manières de choisir deux sous-ensembles d'union $S$ est égal à $\frac{3^n+1}{2}$.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> L'ensemble des chemins de $(0, 0)$ à $(m, n)$ est en bijection avec l'ensemble des mots de $m + n$ lettres écrits avec les lettres D (un pas vers la droite) et H (un pas vers le haut) et contenant exactement $m$ fois la lettre $D$ (et donc $n$ fois la lettre $H$). Par exemple, le chemin représenté sur la figure correspond au mot DDHDDHHDDHDDHHHDDH. La réponse est donc $\binom{m+n}{m}$.

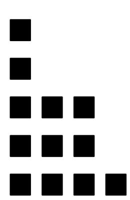
<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Il y trois orientations possibles pour les parallélogrammes. Pour une orientation fixée, le nombre de losanges vaut $\binom{n+2}{4}$ (s'aider de la figure suivante pour le montrer en introduisant une bijection !). Par conséquent, il y a en tout $3\binom{n+2}{4}$ parallélogrammes.



<u>*Solution de l'exercice 4*</u> On peut représenter une partition graphiquement par un empilement de carrés, appelé un *diagramme de Ferrers*. Les carrés sont alignés sur la gauche et le nombre de carrés sur chaque ligne correspond aux termes successifs de la somme. Par exemple, la partition $12 = 5+3+3+1$ de l'entier $12$ est représentée de la manière suivante.



En faisant une symétrie par rapport à la diagonale principale, on obtient une autre partition de l'entier $12$, à savoir $12 = 4 + 3 + 3 + 1 + 1$.



Cette opération de symétrie fournit une bijection entre les diagrammes de Ferrers ayant $k$ lignes et ceux ayant $k$ colonnes. On obtient ainsi une bijection entre les partitions de $n$ en exactement $k$ parties et les partitions de $n$ pour lesquelles l'élément le plus grand de la partition est exactement $k$.

Solution de l'exercice 5 Construisons une bijection entre l'ensemble des partitions de $n$ en parties de tailles distinctes et l'ensemble des partitions de $n$ en parties de tailles impaires.

Partons d'une partition de $n$ en parties distinctes. Écrivons chacune des parties sous la forme $a \times 2^b$ où $a$ est un nombre impair, et remplaçons-les par $2^b$ parties de taille $a$. On obtient une partition de $n$ en parties de tailles impaires. Par exemple, pour la partition $34 = 12 + 7 + 6 + 5 + 4$, qui est une partition de l'entier $34$ en parties de tailles distinctes, on obtient :

$$34 = 3 \times 2^2 + 7 \times 2^0 + 3 \times 2^1 + 5 \times 2^0 + 1 \times 2^2,$$

et la partition en parties de tailles impaires associée est :

$$34 = (3 + 3 + 3 + 3) + 7 + (3 + 3) + 5 + (1 + 1 + 1 + 1),$$

soit

$$34 = 7 + 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

A l'inverse, partons d'une partition de $n$ en parties de tailles impaires. Supposons qu'il y a $k$ parties égales à $a$, où $a$ est un entier impair. On représente $k$ sous forme binaire : $k = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \ldots + 2^{k_r}$ où $k_1, \ldots, k_r$ sont des entiers distincts, et on constitue les parties $a \times 2^{k_i}$ pour chaque $i$. Cela fournit une partition de $n$ en parties de tailles distinctes, puisqu'un entier s'écrit de manière unique sous la forme $a \times 2^b$ où $a$ est impair. Par exemple, en partant de la partition $34 = 7 + 5 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 + 1 + 1 + 1 + 1$, on écrit :

$$34 = 7 \times 1 + 5 \times 1 + 3 \times 6 + 1 \times 4 = 7 \times 2^0 + 5 \times 2^0 + 3 \times (2^2 + 2^1) + 1 \times 2^2.$$

Et la nouvelle partition est obtenue en développant les produits, soit :

$$34 = 7 + 5 + 12 + 6 + 4.$$

Quitte à réordonner les termes, nous retrouvons la partition en parties distinctes dont nous étions partis. Plus généralement, on peut se convaincre que les deux transformations ci-dessus sont inverses l'une de l'autre. Ainsi, les partitions de $n$ en parties de tailles distinctes sont en bijection avec les partitions de $n$ en parties de tailles impaires.

Solution de l'exercice 6 Il s'agit de calculer le nombre total de points fixes pour toutes les permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Or il y a $(n-1)!$ permutations qui fixent $1$, $(n-1)!$ permutations qui fixent $2$, etc. On en déduit que le nombre total de points fixes est égal à $n \times (n-1)! = n!$.

Solution de l'exercice 7 Désignons par $n$ le nombre de jours de la colonie, et comptons le nombre total de paires de participants. Comme il y a $15$ participants, il y a

$\binom{15}{2} = 105$ paires de participants. Chaque jour, $3$ participants sont choisis. Parmi eux, on peut constituer $\binom{3}{2} = 3$ paires. Comme chaque paire apparait exactement une fois au cours du séjour, cela signifie que le nombre total de paires est égal à $3n$. Il en découle que $n = 105/3 = 35$.

Solution de l'exercice 8 Pour chaque paire d'étudiants, considérons l'ensemble des problèmes qu'aucun des deux n'a résolu. Il y a $\binom{200}{2} = 19900$ paires d'étudiants, donc on obtient $19900$ ensembles. Il s'agit de montrer qu'au moins l'un de ces ensembles est vide.

Pour chaque problème, il y a au plus $80$ étudiants qui ne l'ont pas résolu. Donc pour chacun des six problèmes, il y a au plus $\binom{80}{2} = 3160$ paires d'étudiants telles que le problème n'a été résolu par aucun des deux étudiants de la paire. Si l'on considère les six problèmes, on en déduit que parmi les $19900$ ensembles, il y en a au plus $6 \times 3160$ qui sont non vides. Par conséquent, il y a au moins $19900 - 6 \times 3160 = 940$ ensembles vides.

Solution de l'exercice 9 Comptons plutôt le nombre de manières de choisir $6$ entiers (distincts) de telle sorte à ce qu'il n'y ait pas deux entiers consécutifs. Considérons la transformation qui à $(x_1, x_2, \ldots, x_6)$ (on suppose les nombres rangés dans l'ordre croissants) associe $(x_1, x_2 - 1, x_3 - 2, \ldots, x_6 - 5)$. Elle fournit une bijection entre les les choix de $6$ entiers dans l'ensemble $\{1, \ldots, 49\}$ qui ne contiennent pas d'entiers consécutifs et les choix de $6$ entiers (distincts, mais sans conditions supplémentaire) dans l'ensemble $\{1, \ldots, 44\}$. Par conséquent, il y a $\binom{44}{6}$ manières de choisir $6$ entiers dans l'ensemble $\{1, \ldots, 49\}$ de telle sorte à ce qu'il n'y ait pas d'entiers consécutifs. La réponse à la question posée est donc : $\binom{49}{6} - \binom{44}{6} = 6924764$.

Solution de l'exercice 10 Introduisons la somme

$$S = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1^n} (x_i + y_j)(a_{i,j} - b_{i,j}).$$

D'une part, on a :

$$S = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} (a_{i,j} - b_{i,j}) + \sum_{j=1}^{n} y_j \sum_{i=1}^{n} (a_{i,j} - b_{i,j}) = 0.$$

D'autre part, si $x_i + y_j \geq 0$, alors $a_{i,j} = 1$, donc $a_{i,j} - b_{i,j} \geq 0$, et si $x_i + y_j < 0$, alors $a_{i,j} = 0$, donc $a_{i,j} - b_{i,j} \leq 0$. Dans tous les cas, on a donc : $(x_i + y_j)(a_{i,j} - b_{i,j}) \geq 0$. Comme $S = 0$, il en découle que $(x_i + y_j)(a_{i,j} - b_{i,j}) = 0$ pour tous $i, j \in \{1, \ldots, n\}$. En particulier, si $a_{i,j} = 0$, alors $x_i + y_j < 0$ donc $b_{i,j} = 0$. Or les $a_{i,j}$ et $b_{i,j}$ ne peuvent prendre que les valeurs $0$ ou $1$, et la somme sur chaque ligne et sur chaque colonne est la même pour $A$ et pour $B$, d'où le résultat.

## 2 mercredi après-midi : Pierre Bornsztein

**Un peu de géométrie combinatoire.**

**Exercice 1.**

On donne $4000$ points dans le plan, trois quelconques jamais alignés. Démontrer que l'on peut construire $1000$ quadrilatères deux à deux disjoints, non nécessairement convexes, et dont les sommets sont les points données.

**Solution.**

Il n'y a qu'un nombre fini de points donc on peut considérer un repère orthogonal dans lequel les $4000$ points ont des abscisses deux à deux distinctes. On les numérote alors $P_1, ..., P_{4000}$ par abscisses croissantes. Pour tout $1 \leq i \leq 1000$, on regroupe alors les quatre points $P_{4i-3}, P_{4i-2}, P_{4i-1}, P_{4i}$. Ces quatres points ne sont pas alignés donc ils sont les sommets d'un quadrilatère, pas forcément convexe, et notre numérotation assure que deux quelconques des quadrilatères ainsi construits ne s'intersectent pas.

**Exercice 2 (Olympiade Israël 2001).**

On considère $2001$ droites du plan, qui se rencontrent deux à deux en des points distincts. On appelle $E$ l'ensemble de ces points d'intersection.
On veut attribuer une couleur à chacun des points de $E$ de sorte que deux quelconques de ces points qui appartiennent à une même droite et dont le segment qui les relient ne contient aucun autre point de $E$, soient de couleurs différentes.
Combien faut-il au minimum de couleurs pour pouvoir réaliser une telle coloration ?

**Solution.**

Le minimum $m$ cherché est $m = 3$ et, avec ce qui suit, il sera assez évident que le résultat reste vrai pour $n \geq 3$ droites.
Tout d'abord, on note que, dans la configuration obtenue, il y a au moins une région non subdivisée qui est un triangle. En effet, trois droites non concourantes et deux jamais parallèles forment un triangle. Or, toute droite qui traverse un triangle, le partage en deux polygones dont au moins un est un triangle et donc, en partant de trois des droites données et en “ajoutant” une par une les $1998$ autres, on est assuré de l'existence d'une telle région triangulaire dans la configuration finale. Les trois sommets d'un tel triangle doivent être de couleurs distinctes, ce qui implique que $m \geq 3$.
Pour conclure, nous allons construire une coloration adéquate à trois couleurs. On commence par remarquer que, puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de points d'intersection, on peut choisir un repère orthogonal dans lequel ces points ont des abscisses deux à deux distinctes. On numérote alors les points $M_1, M_2..., M_k$ selon les abscisses croissantes (et où $k = \frac{2001\times 2000}{2}$). Pour tout $i$, le point $M_i$ possède au plus quatre voisins et, s'il appartient à un segment qui joint deux de ses voisins, un seul de ces deux voisins a une abscisse inférieure à celle de $M_i$. Cela assure que, pour tout $i \leq k$, parmi les voisins de $M_i$, il y en a au plus deux qui ont des

indices inférieurs à $i$. On peut alors colorier les $M_i$ dans l'ordre de la numérotation selon la procédure suivante : on colorie $M_1$ en vert et $M_2$ en rouge. Et, pour tout $i$ tel que $2 \leq i \leq k-1$, si l'on suppose que les points $M_1, M_2 ..., M_i$ ont été colorés chacun soit en vert, soit en rouge, soit en bleu de sorte que deux points voisins ne soient pas (encore) de la même couleur alors, d'après la remarque précédente, au plus deux voisins de $M_{i+1}$ ont déjà été colorés, ce qui laisse une couleur libre pour $M_{i+1}$.

**Exercice 3 (Erdös-Szekeres).**

Prouver que parmi cinq points du plan, trois quelconques jamais alignés, on peut toujours en trouver quatre qui sont les sommets d'un quadrilatère convexe.

**Solution.**

Si l'enveloppe convexe des cinq points est un quadrilatère ou un pentagone, c'est déjà gagné. D'autre part, puisque les points ne sont pas alignés, cette enveloppe convexe ne peut être un segment. Il reste donc à étudier le cas où l'enveloppe convexe est un triangle, disons $ABC$, avec les points $D$ et $E$ à l'intérieur. La droite $(DE)$, qui ne peut passer par un des sommets (sinon on aurait trois points alignés), rencontre alors deux des côtés du triangle, disons $]AB[$ et $]AC[$. Mais alors, les points $B, C, D, E$ sont, dans un ordre bien choisi, les sommets d'un quadrilatère convexe.

Remarque.
Erdös et Szekeres ont montré que, pour tout entier $n \geq 3$, il existe un entier $k$ tel que tout ensemble d'au moins $k$ points du plan en contienne $n$ qui sont les sommets d'un $n$-gone convexe. Si on note $f(n)$ le plus petit entier $k$ ayant cette propriété, on sait que $f(n) = 2^{n-2} + 1$ pour $n = 3, 4, 5, 6$.
On conjecture que cette égalité est vraie pour tout $n \geq 3$.

**Exercice 4.**

On considère $n$ points du plan, trois quelconques jamais alignés, tels que quatre quelconques soient toujours les sommets d'un quadrilatère convexe. Prouver que ces $n$ points sont les sommets d'un $n$-gone convexe.

**Solution.**

Soit $C$ l'enveloppe convexe des $n$ points. Par l'absurde : supposons que $C$ ne soit pas un $n$-gone. Sans perte de généralité, on peut alors supposer que $A_1$ est un sommet de $C$ et que $A_n$ n'en est pas un. Alors, $A_n$ est à l'intérieur de $C$ (il ne peut être sur le bord sinon il y aurait trois des $A_i$ qui seraient alignés). On effectue une triangulation de $C$ à partir des diagonales issues de $A_1$ et, quitte à renuméroter, on peut supposer que $A_n$ est à l'intérieur (comme ci-dessus) du triangle $A_1A_2A_3$. Mais alors, les points $A_1, A_2, A_3, A_n$ ne sont pas les sommets d'un quadrilatère convexe, en contradiction avec l'énoncé. D'où le résultat.

**Exercice 5 (Junior Balkaniques 2004).**

Soit $P$ un polygone convexe à $n$ sommets du plan. On triangule $P$ à l'aide de certaines de ses diagonales. On colorie en rouge les triangles qui ont deux côtés qui sont également des côtés de $P$, en vert ceux qui ont un seul côté commun avec $P$, et en bleu ceux qui n'ont aucun côté commun avec $P$.
Prouver que, quelle que soit la triangulation choisie, il y aura toujours exactement deux triangles rouges de plus que de triangles bleus.

**Solution.**

Si la triangulation fait intervenir $k$ triangles, la somme des angles intérieurs de ces triangles est égale à $k\pi$, et elle est aussi égale à la somme des angles intérieurs de $P$, c.à.d. $(n-2)\pi$. Donc $k = n-2$.
Ainsi, toute triangulation fait intervenir $n-2$ triangles.
Soit $b, r, v$ les nombres de triangles bleus, rouges et verts, respectivement.
On a donc $b + r + v = n - 2$.
Mais tout côté de $P$ appartient soit à un triangle rouge soit à un triangle vert. Et réciproquement, tout triangle rouge utilise deux côtés de $P$ alors que tout triangle vert en utilise un seul. Par suite, on a $2r + v = n$.
Et donc $r + (n - 2 - b) = n$, c.à.d. $r = b + 2$.

**Exercice 6.**

Soit $P$ un polygone convexe à $n$ sommets dans le plan. Prouver qu'il existe au plus $\frac{n(2n-5)}{3}$ triangles d'aire $1$ dont les sommets sont des sommets de $P$.

**Solution.**

Si $A$ et $B$ sont deux points fixés, les points $M$ du plan tels que le triangle $ABM$ ait pour aire $1$ sont les points de deux droites parallèles à $(AB)$, et situées de part et d'autre de $(AB)$ à une distance $h = \frac{2}{AB}$.
Par suite, si, parmi les sommets de $P$, il y a plus de quatre tels points $M$, alors le principe des tiroirs assure qu'au moins trois de ces points appartiennent à une même de ces deux droites, et sont donc alignés, ce qui est impossible puisqu'un polygone convexe ne contient jamais trois sommets alignés.
Considérons maintenant deux sommets $A$ et $B$ de $P$ qui forment la base d'un éventuel triangle d'aire $1$. Comme il y a trois choix possibles pour la base d'un triangle, chaque triangle que l'on va mettre en évidence sera donc compté trois fois.
- Si $A$ et $B$ sont consécutifs : Puisque $P$ est convexe, tous les autres sommets sont situés d'un même côté de $(AB)$ et trois quelconques ne sont pas alignés. Par suite, au plus deux d'entre eux appartiennent à une droite parallèle à $(AB)$ et située à une distance $h = \frac{2}{AB}$. On en déduit que $A$ et $B$ ne déterminent ainsi qu'au plus deux triangles d'aire $1$.
Il y a $n$ choix de deux sommets consécutifs (autant que de côtés), ce qui nous donne au plus $2n$ triangles d'aire $1$ dans ce cas.

- Si $A$ et $B$ sont séparés par un seul sommet $C$ de $P$ : ce sommet $C$ peut éventuellement former, avec $A$ et $B$, un triangle d'aire $1$. D'autre part, il y a au plus deux autres sommets qui sont situés sur la droite parallèle à $(AB)$ et située à une distance $\frac{2}{AB}$ mais pas du même côté que $C$. Cela nous donne donc au plus $2$ nouveaux triangles d'aire $1$ (dont $A$ et $B$ sont des sommets). Cela fournit ainsi en tout au plus trois triangles d'aire $1$.
Or, il y a exactement $n$ choix de deux sommets séparés par un seul sommet (autant que de choix du sommet intermédiaire). On a donc au plus $3n$ triangles dans ce cas.
- Si $A$ et $B$ sont séparés par au moins deux sommets de $P$ : cette fois, il y a au plus quatre triangles d'aire $1$ dont $A$ et $B$ sont des sommets (deux choix pour le troisième sommet, de part et d'autre de $(AB)$).
Or, il y a $\frac{n(n-1)}{2} - 2n$ choix de tels paires (tous les choix sauf ceux déjà considérés dans les cas précédents), et donc au plus $2n(n-1) - 8n = 2n^2 - 10n$ triangles d'aire $1$ dans ce cas.
Finalement, au total, cela fournit au plus $(2n^2 - 10n) + 2n + 3n = n(2n-5)$ triangles d'aire $1$. D'après la remarque initiale, chacun des triangles d'aire $1$ est compté trois fois dans le raisonnement ci-dessus. Il y a donc au plus $\frac{n(2n-5)}{3}$ triangles d'aire $1$ dont les sommets sont des sommets de $P$.

**Exercice 7.**

a) On considère quatre disques du plan.
Prouver que s'ils ont trois par trois un point commun alors il existe un point commun aux quatres disques.
b) On considère quatre points du plan, $A, B, C$ et $D$ qui, trois à trois, peuvent être recouvert par un disque de rayon 1.
Prouver qu'il existe un disque de rayon 1 qui recouvre les quatre points.

**Solution.**

a) On commence par noter que si deux points appartiennent à un même disque, alors le segment dont ils sont les extrémités est contenu dans ce disque, que si trois points appartiennent à un même disque, alors le triangle dont ils sont les extrémités est contenu dans ce disque.
Soient donc $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ des disques du plan, qui ont trois à trois un point commun. On note $M_1$ le point commun de $\Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$, on note $M_2$ le point commun de $\Gamma_1, \Gamma_3, \Gamma_4$, on note $M_3$ le point commun de $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_4$, et enfin $M_3$ le point commun de $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$.

- Si $M_1, M_2, M_3, M_4$ sont alignés : Sans perte de généralité, on peut supposer que $M_2, M_3 \in [M_1, M_4]$.
Dans ce cas, puisque $M_1, M_4 \in \Gamma_2$, notre remarque initiale, permet d'affirmer que $[M_1, M_4] \subset \Gamma_2$, et donc que $M_2 \in \Gamma_2$. Mais alors, $M_2$ est un point commun aux quatre disques.

- Si trois des points $M_i$ sont les sommets d'un triangle qui contient le quatrième (intérieurement ou sur son bord) : Sans perte de généralité, on peut supposer que $M_4$ est contenu dans le triangle $M_1M_2M_3$. Puisque les trois sommets du triangle appartiennent à $\Gamma_4$, notre remarque initiale permet d'affirmer que triangle $M_1M_2M_3$ est lui même contenu dans $\Gamma_4$, et donc que $M_4 \in \Gamma_4$. Mais alors, $M_4$ est un point commun aux quatre disques.

- Si $M_1, M_2, M_3, M_4$ sont les sommets d'un quadrilatère convexe : Sans perte de généralité, on peut supposer que $M_1M_2M_3M_4$ est un quadrilatère convexe. Soit alors $\Omega$ l'intersection des diagonales $[M_1, M_3]$ et $[M_2, M_4]$. Puisque $M_1, M_3 \in \Gamma_2$ alors, d'après notre remarque initiale, on a $[M_1, M_3] \subset \Gamma_2$ et donc $\Omega \in \Gamma_2$. Mais aussi, $M_1, M_3 \in \Gamma_4$ donc $\Omega \in \Gamma_4$.
De même, $M_2$ et $M_4$ appartiennent à la fois à $\Gamma_1$ et à $\Gamma_3$ donc, comme ci-dessus, on a $\Omega \in \Gamma_1$ et $\in \Gamma_4$.
Et finalement, $\Omega$ est un point commun aux quatre disques.

b) Soit $\Gamma_A$ le disque de centre $A$ et de rayon 1. Les disques $\Gamma_B, \Gamma_C, \Gamma_D$ sont définis de manière analogue.
Par hypothèse, il existe un disque $\Gamma$ de rayon 1, qui recouvre $A, B, C$. On note $O$ son centre.
Alors $OA, OB, OC \leq 1$, ce qui montre que $O$ appartient à la fois à $\Gamma_A, \Gamma_B$ et $\Gamma_C$. En raisonnant de la même façon, on prouve ainsi que les quatre disques $\Gamma_A, \Gamma_B, \Gamma_C, \Gamma_D$ ont, trois à trois, un point commun. D'après a), il existe donc un point $M$ commun aux quatre disques. En particulier, on a $AM, BM, CM, DM \leq 1$, ce qui prouve que $A, B, C, D$ appartiennent au disque de centre $M$ et de rayon 1.

Remarque.
Le résultat du a) est un cas particulier d'un théorème célèbre dû à Helly (1923) :
"Si $n \geq 3$ parties convexes du plan ont trois à trois une intersection non vide, alors il existe un point commun à toutes ces parties".

A partir du a), la démonstration se fait sans vraie difficulté par récurrence sur $n$.
On peut noter que le résultat est faux dans le cas d'une infinité de parties convexes (choisir par exemple les demi-plans d'équations $y \geq k$, pour $k \geq 0$ entier). Pour conserver la conclusion, il convient alors de ne travailler qu'avec des parties convexes fermées et bornées.

**Exercice 8 (Olympiade Ukraine 2001).**

Dans le plan, on considère un polygone convexe à $2000$ sommets. Prouver qu'il est possible de choisir $1998$ points du plan de sorte que tout triangle dont les trois sommets sont des sommets du polygone contienne exactement un des points choisis en son intérieur.

**Solution.**

On remplace tout de suite $2000$ et $1998$ par $n$ et $n-2$.

Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de sommets, on peut considérer un repère orthonormal du plan dans lequel les $n$ points ont des abscisses deux à deux distinctes, et on les numérote $P_1, P_2, ..., P_n$ dans l'ordre des abscisses croissantes, avec $P_i(x_i, y_i)$ pour tout $i$. Pour tous $i, j, k$ distincts, on note $d(P_k, (P_iP_j))$ la distance de $P_k$ à la droite $(P_iP_j)$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de points et que trois ne sont jamais alignés, il n'y a qu'un nombre fini de telles distances, et elles sont toutes strictement positives. On peut alors noter $d$ la plus petite de ces distances, et on a $d > 0$.
Pour tout $i \in \{2, ..., n-1\}$, comme les $P_j$ sont les sommets d'un polygone convexe, exactement un des deux points de coordonnées $(x_i, y_i \pm \frac{d}{2})$ est à l'intérieur du polygone et on le note $M_i$ (pour $i \in \{1, n\}$, notre choix de repère entraine que, dans chaque cas, les deux points correspondants sont à l'extérieur du polygone). On marque alors les $n-2$ points $M_i$ ainsi définis.
Pour tout $i \in \{2, ..., n-1\}$, et pour tous $a, b, c \in \{1, ..., n\} \backslash \{i\}$, le point $P_i$ est à l'extérieur du triangle $P_aP_bP_c$ donc, si $M_i$ était à l'intérieur de $P_aP_bP_c$ l'un des côtés du triangle traverserait le segment $[P_iM_i]$, en contradiction avec $P_iM_i = \frac{d}{2}$ qui est strictement inférieure à la distance de $P_i$ aux droites supports des côtés de $P_aP_bP_c$. Ainsi, $M_i$ est à l'extérieur du triangle $P_aP_bP_c$. D'autre part, notre numérotation assure que $M_i$ est intérieur à $P_iP_jP_k$ si et seulement si $j < i < k$ ou $k < i < j$.
Finalement, chacun des triangles $P_aP_bP_c$ possède un et un seul des points marqués en son intérieur et, si $1 \leq a < b < c \leq n$, ce point est $M_b$.

**Exercice 9 (Liste courte OIM 1991, Concours Général 1998).**

Dans le plan, on considère un ensemble $A$ de $n \geq 3$ points, trois quelconques jamais alignés. Prouver qu'il existe un ensemble $S$ de $2n-5$ points du plan tel que tout triangle dont les sommets sont des points de $A$ contienne intérieurement au moins un point de $S$.

**Solution.**

Puisqu'il n'y a qu'un nombre fini de sommets, on peut considérer un repère orthonormal du plan dans lequel les $n$ points ont des abscisses deux à deux distinctes, et on les numérote $P_1, P_2, ..., P_n$ dans l'ordre des abscisses croissantes, avec $P_i(x_i, y_i)$ pour tout $i$. Pour tous $i, j, k$ distincts, on note $d(P_k, (P_iP_j))$ la distance de $P_k$ à la droite $(P_iP_j)$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de points et que trois ne sont jamais alignés, il n'y a qu'un nombre fini de telles distances, et elles sont toutes strictement positives. On peut alors noter $d$ la plus petite de ces distances, et on a $d > 0$.
Pour tout $i$, on note $M_i(x_i, y_i + \frac{d}{2})$ et $N_i(x_i, y_i - \frac{d}{2})$. Ainsi, pour $1 \leq i < j < k \leq n$, un et un seul des points $M_i$ ou $N_i$ est à l'intérieur du triangle $P_iP_jP_k$. L'ensemble formé de tous les $M_i$ et $N_i$ possède la propriété désirée, mais contient $2n$ points, ce qui est un peu trop... Il va falloir un peu plus de finesse et éliminer quelques uns de ces points. Un petit dessin montre rapidement qu'il est pertinent de s'intéresser aux $P_i$ qui sont sur l'enveloppe convexe $C$ de l'ensemble des $n$ points initiaux. Notons que notre numérotation assure que $P_1$ et $P_n$ sont des sommets de $C$ et que les

points $M_1, N_1, M_n, N_n$ sont tous à l'extérieur de $C$, et donc de chacun des triangles $P_iP_jP_k$. De plus, pour chaque autre sommet $P_a$ de $C$, l'un des points $M_a$ ou $N_a$ est également à l'extérieur de $C$, et donc de chacun des triangles $P_iP_jP_k$. Si l'on note $m$ le nombre de sommets de $C$, on peut donc éliminer $m+2$ de l'ensemble des $2n$ points $M_i$ et $N_i$ sans perdre la propriété désirée. Cela nous fournit un ensemble $S$ de $2n-m-2$ points qui a la propriété souhaitée.
Pour conclure, il ne reste plus qu'à remarquer que puisque les $n$ points $P_i$ ne sont pas alignés, l'enveloppe convexe $C$ est au moins un triangle et $m \geq 3$, d'où $2n-m-2 \leq 2n-5$.

Remarque.
Dans le cas où les $P_i$ sont les sommets d'un $n$-gone convexe, on a $m=n$ et $2m-n-2=n-2$, et l'on retrouve sans difficulté une solution de l'exercice n°9.

**Exercice 10 (OIM 2013).**

Une configuration de 4027 points du plan est appelée *colombienne* si elle est constituée de 2013 points de couleur rouge et de 2014 points de couleur bleue, et si trois quelconques de ces points ne sont pas alignés. En traçant des droites, le plan est divisé en régions.
Un tracé de droites est appelé *bon* pour une configuration colombienne si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- aucune droite tracée ne passe par un point de la configuration ;
- aucune région ne contient des points de couleurs différentes.

Trouver la plus petite valeur de $k$ telle que, pour chaque configuration colombienne de 4027 points, il existe un bon tracé de $k$ droites.

**Solution.**

On considère tout d'abord un 4027-gone régulier convexe dont les sommets sont numérotés de 1 à 4027 dans le sens direct. On colorie en bleu les sommets de numéros impairs, et en rouge les autres. On obtient ainsi une configuration colombienne de 4027 points.
Ce polygone possède 4026 côtés dont les extrémités sont de couleurs différentes. Si l'on veut construire un bon tracé, il faut que chacun de ces 4026 côtés rencontre intérieurement une des droites. Comme une droite ne peut intersecter le polygone qu'en au plus deux points, un bon tracé nécessite ainsi au moins $\frac{4026}{2} = 2013$ droites.

Pour conclure, il suffit de prouver que 2013 droites sont toujours suffisantes pour obtenir un bon tracé à partir d'une configuration colombienne de 4027 points.

La clé est de remarquer que si $A$ et $B$ sont deux points de même couleur dans une telle configuration, on peut toujours séparer ces deux points de tous les autres en ne traçant que deux droites : en effet, il n'existe qu'un nombre fini de points colorés et aucun autre que $A$ et $B$ n'est sur la droite $(AB)$. Ainsi, en utilisant deux droites parallèles à $(AB)$ et suffisamment proches d'elle, une de chaque côté, on définit une bande qui ne contient que $A$ et $B$ parmi les points de la configuration.

Soit alors C l'enveloppe convexe de l'ensemble des $4027$ points colorés d'une configuration colombienne. Evidemment, puisque les points colorés ne sont pas tous alignés, le polygone C est "au moins" un triangle.

Si C possède un sommet rouge, disons $A$.
A l'aide d'une droite, on peut facilement séparer $A$ de tous les autres points colorés. On répartit alors les $2012$ autres points rouges en $1006$ paires, puis on sépare chacune de ces paires de tous les autres points selon le principe ci-dessus, ce qui utilise $2012$ droites.
On obtient alors un bon tracé de $2013$ droites.

Si tous les sommets de C sont bleus.
On choisit deux sommets consécutifs de C, disons $A$ et $B$. En n'utilisant qu'une seule droite parallèle à $(AB)$, on peut les séparer de tous les autres points de la configuration. On procède alors comme ci-dessus mais en raisonnant cette fois sur les $1006$ paires formées par les autres points bleus.
On obtient à nouveau un bon tracé de $2013$ droites, ce qui conclut.

*Remarque* 1. En fait, il n'est pas très difficile de prouver par récurrence sur $n$ un résultat un peu plus général :

*Si $n$ points du plan, trois jamais alignés, sont chacun arbitrairement colorés soit en rouge soit en bleu, alors il existe un bon tracé en $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ droites.*

En effet, supposons que $n \geq 3$ et envisageons uniquement la partie hérédité de la démonstration :

Si on élimine temporairement deux sommets, disons $A$ et $B$, de l'enveloppe convexe de l'ensemble des $n$ points colorés, l'hypothèse de récurrence assure que, pour la configuration formée des $n-2$ points restants, il existe un bon tracé en $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1$ droites.

On réintroduit maintenant les points $A$ et $B$.
Si $A$ et $B$ sont de la même couleur, on peut alors les séparer des autres par une droite adéquate parallèle à $(AB)$.
Si $A$ et $B$ sont de couleurs différentes, mais séparés l'un de l'autre par une des droites déjà tracées, on procède comme ci-dessus.
Si $A$ et $B$ sont de couleurs différentes et dans la même des régions déterminées par les droites déjà tracées alors, d'après l'hypothèse de récurrence, tous les autres points colorés contenus dans cette région sont d'une même couleur. Sans perte de généralité, on peut supposer que $A$ est le seul point bleu de la région. Mais, puisque $A$ est un sommet de l'enveloppe convexe, il est facile de le séparer de tous les autres en ne traçant qu'une droite supplémentaire.

Dans le cadre de l'exercice proposé, cela fournit une seconde preuve de l'existence d'un bon tracé en $2013$ droites à partir d'une configuration colombienne de $4027$ points.

*Remarque* 2. On peut se demander ce qu'il en est si l'on remplace respectivement les nombres $2013$ et $2014$ par les entiers $m$ et $n$, avec par exemple $m \leq n$.
Notons $f(m,n)$ le nombre minimal de droites d'un bon tracé à partir de telles configurations.
En reprenant la première démarche exposée, on déduit facilement que :

$$m \leq f(m,n) \leq m+1 \text{ et que si } m \text{ est pair, on a } f(m,n) = m.$$

Par contre, il est possible de prouver que :

$$\text{pour tout } m \text{ impair, il existe un entier } N \text{ tel que } f(m,n) = m \text{ si } m \leq n \leq N, \text{ et } f(m,n) = m+1 \text{ pour tout } n > N.$$

**Exercice 11 (Liste courte OIM 2000).**

Soient $n \geq 4$ un entier et $S = \{P_1, P_2, ..., P_n\}$ un ensemble de points du plan, trois quelconques jamais alignés et quatre quelconques jamais cocycliques. Pour $1 \leq t \leq n$, on note $a_t$ le nombre de cercles $P_iP_jP_k$ qui contiennent intérieurement $P_t$.
Soit $m(S) = a_1 + a_2 + ... + a_t$.
Prouver qu'il existe un entier strictement positif $f(n)$, qui ne dépend que de $n$, tel que $m(S) = f(n)$ si et seulement si les points de $S$ sont les sommets d'un $n$-gone convexe.

**Solution.**

On va prouver que $f(n) = 2\binom{n}{4}$.
Soit $A, B, C, D$ quatre des points de $S$. On pose $n_A = 1$ si $A$ est à l'intérieur ou sur le bord du cercle circonscrit à $BCD$, et $n_A = 0$ sinon. Les nombres $n_B, n_C, n_D$ sont définis de manière analogue. Puisque ces points ne sont pas alignés, l'enveloppe convexe de l'ensemble qui les contient est soit un triangle soit un quadrilatère.
Si c'est un triangle, sans perte de généralité, on peut supposer que $D$ est à l'intérieur du triangle $ABC$. Dans ces conditions, parmi les cercles qui passent par trois des points, seul le cercle circonscrit à $ABC$ contient le quatrième des points. Ainsi, on a $n_A = n_B = n_C = 0$ et $n_D = 1$.
Si c'est un quadrilatère, disons $ABCD$, on pose $\alpha = \widehat{DAB}, \beta = \widehat{ABC}, \gamma = \widehat{BCD}, \delta = \widehat{CDA}$ et on a $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$. Or, puisque les quatre points ne sont pas cocycliques, on a $\alpha + \gamma > \pi$ ou $\beta + \delta > \pi$, mais pas les deux à la fois. Sans perte de généralité, on suppose que $\alpha + \gamma > \pi$ et ainsi $\widehat{BCD} = \gamma > \pi - \alpha = \pi - \widehat{BAD}$, ce qui assure que $C$ est à l'intérieur du cercle circonscrit à $ABD$, et donc que $n_C = 1$. On prouve de même que $n_A = 1$ et, puisque $\beta + \delta < \pi$, un raisonnement analogue montre que $n_B = n_D = 0$. Ainsi, dans ce cas, on a $n_A + n_B + n_C + n_D = 2$.

Finalement, pour tout groupe de quatre points dans $S$, disons $A, B, C, D$ et avec les notations ci-dessus, on a $n_A + n_B + n_C + n_D \leq 2$ avec égalité si et seulement si $A, B, C, D$ sont les sommets d'un quadrilatère convexe. Il y a $\binom{n}{4}$ choix possibles d'un groupe de quatre points de $S$ d'où, en sommant les inégalités du type ci-dessus, il vient $m(S) \leq 2\binom{n}{4}$, avec égalité si et seulement si quatre points quelconques de $S$ sont toujours les sommets d'un quadrilatère convexe. D'après l'exercice n°$4$, cette dernière condition est équivalente à ce que les points de $S$ sont les sommets d'un $n$-gone convexe, ce qui conclut.

**Exercice 12 (OIM 1995).**

Trouver tous les entiers $n > 3$ pour lesquels il existe $n$ points $A_1, ..., A_n$ du plan et des réels $r_1, ..., r_n$ tels que :
(i) trois quelconques des points ne sont jamais alignés
(ii) pour tout $\{i, j, k\}$, l'aire du triangle $A_iA_jA_k$ est égale à $r_i + r_j + r_k$.

**Solution.**

La valeur $n = 4$ convient car il suffit de choisir les quatre sommets d'un carré de côté $1$, et de poser $r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = \frac{1}{6}$.
D'autre part, si $p > 4$ ne convient pas alors tout $n \geq p$ ne convient pas non plus, puisqu'il suffirait de se restreindre à $p$ des $n$ points et aux valeurs correspondantes. Il suffit donc de prouver que $n = 5$ ne convient pas.
Par l'absurde : supposons qu'il existe des points $A_1, ..., A_5$ du plan, trois quelconques jamais alignés, et des réels $r_1, ..., r_5$ tels que, pour tous $1 \leq i < j < k \leq 5$, l'aire du triangle $A_iA_jA_k$ soit égale à $r_i + r_j + r_k$.
Dans ce qui suit, l'aire du polygone $P$ est notée $[P]$.
On commence par remarquer que si $A_iA_jA_kA_l$ est un quadrilatère convexe, alors $r_i + r_k = r_j + r_l$. En effet, on a $[A_iA_jA_k] + [A_iA_lA_k] = [A_iA_jA_kA_l] = [A_lA_jA_k] + [A_iA_lA_j]$, c.à.d. $2r_i + r_j + 2r_k + r_l = r_i + 2r_j + r_k + 2r_l$, d'où $r_i + r_k = r_j + r_l$.
On distingue alors selon la nature de l'enveloppe convexe $C$ des cinq points (qui est au moins un triangle puisque les points ne sont pas alignés) :
- Si $C = A_1A_2A_3A_4A_5$ (quitte à changer les numéros) est un pentagone. Puisque $A_1, A_2, A_3$ ne sont pas alignés, on peut supposer que $(A_1A_2)$ et $(A_4A_5)$ ne sont pas parallèles. Les triangles $A_1A_2A_4$ et $A_1A_2A_5$ ont donc la même base et des hauteurs différentes, d'où $[A_1A_2A_4] \neq [A_1A_2A_5]$ et ainsi $r_4 \neq r_5$.
Mais, $A_1A_2A_3A_4$ et $A_1A_2A_3A_5$ sont des quadrilatères convexes et notre remarque initiale assure alors que $r_2 + r_4 = r_1 + r_3 = r_2 + r_5$, d'où $r_4 = r_5$. Contradiction.
- Si $C = A_1A_2A_3A_4$ est un quadrilatère, avec $A_5$ à l'intérieur. Sans perte de généralité, on peut supposer que $A_5$ est à l'intérieur de $A_1A_3A_4$ (mais n'est pas sur les bords, puisqu'il n'y a pas trois points alignés). Ainsi, $[A_1A_3A_5] < [A_1A_3A_4]$ et donc $r_5 < r_4$. Mais, $A_1A_2A_3A_4$ et $A_1A_2A_3A_5$ sont des quadrilatères convexes donc, comme ci-dessus, on a $r_4 = r_5$. Contradiction.
- Si $C = A_1A_2A_3$ est un triangle, avec $A_4, A_5$ à l'intérieur. Sans perte de généralité, on peut supposer que $A_5$ est à l'intérieur de $A_1A_3A_4$ et donc, comme ci-dessus,

on a $r_5 < r_4$. Mais, $[A_1A_2A_4] + [A_1A_3A_4] + [A_2A_3A_4] = [A_1A_2A_3] = [A_1A_2A_5] + [A_1A_3A_5] + [A_2A_3A_5]$, d'où l'on déduit que $r_4 = -\frac{1}{3}(r_1+r_2+r_3) = r_5$. Contradiction. Et finalement, $n = 5$ ne convient pas, ce qui conclut.

## 3 jeudi matin : Margaret Bilu

**Exercices**

**Exercice 1** Sur chaque case d'un tableau $9 \times 9$ se trouve une puce. A un certain signal, chaque puce saute vers une des cases touchant diagonalement celle où elle se trouve. Trouver le nombre minimal de cases vides après ce déplacement.

**Exercice 2**

1. Les points du plan sont coloriés avec deux couleurs. Montrer qu'il existe deux points séparés d'une distance $1$ qui sont de la même couleur.
2. Les points du plan sont coloriés avec deux couleurs. Montrer que pour l'une des deux couleurs il existe des points séparés de n'importe quelle distance.
3. Les points du plan sont coloriés avec trois couleurs. Montrer qu'il existe deux points séparés d'une distance $1$ qui sont de la même couleur.

**Exercice 3** On considère un tableau de nombres $2013 \times 2013$ rempli avec des $1$ et des $-1$. Pour tout $i$, soit $a_i$ le produit des éléments dans la $i$-ième ligne, et pour tout $j$, soit $b_j$ le produit des éléments de la $j$-ième colonne. Montrer que $a_1 + b_1 + \ldots + a_{2013} + b_{2013} \neq 0$.

**Exercice 4** Les sommets d'un pentagone convexe sont tous de coordonnées entières et ses côtés sont tous de longueurs entières. Montrer que le périmètre du polygone est un entier pair.

**Exercice 5** Un cavalier se déplace sur un échiquier $4 \times n$, chaque mouvement consistant en un déplacement de deux cases dans une direction suivi d'un déplacement d'une case dans une direction perpendiculaire. Peut-il revenir au point de départ en ayant visité exactement une fois toutes les cases de l'échiquier ?

**Exercice 6** Une galerie d'art a une forme de polygone à $n \geq 3$ côtés dont les arêtes ne s'intersectent pas, sans piliers ni murs au milieu. Montrer que quelle que soit la forme de la galerie, il suffit de $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ gardiens pour la surveiller. On considère qu'un point $A$ à l'intérieur de la galerie est surveillé par un gardien $G$ si le segment $[AG]$ n'intersecte aucun mur de la galerie.

**Exercice 7** On colorie chaque entier strictement positif en noir ou en blanc, de telle sorte que la somme de deux entiers de couleurs différentes soit noire, et leur produit soit blanc. On suppose que les entiers ne sont pas tous de la même couleur.

1. De quelle couleur est le produit de deux nombres blancs ?
2. Trouver tous les coloriages de ce type.

**Exercice 8** Les points du plan à coordonnées entières sont coloriés en trois couleurs, de sorte que chaque couleur soit utilisée au moins une fois. Montrer qu'on peut trouver un triangle rectangle dont les sommets sont de trois couleurs différentes.

**Exercice 9** On considère un polygone à 100 sommets dont 10 sont coloriés en rouge et 10 autres en bleu. Montrer qu'il existe quatre sommets $A, B, C, D$ tels que
— $A$ et $B$ sont bleus.
— $C$ et $D$ sont rouges.
— Les longueurs $AB$ et $CD$ sont égales.

**Exercice 10** On considère 18 points du plan tels que trois d'entre eux ne soient jamais alignés et tels que 6 d'entre eux soient coloriés en rouge, 6 autres en bleu, et les 6 derniers en vert. Soit $A$ la somme des aires de tous les triangles formés par ces points. Montrer que la somme des aires des triangles ayant tous leurs sommets de la même couleur ne peut excéder $\frac{A}{4}$.

**Exercice 11** Sur un écran d'ordinateur, on peut voir un échiquier $98 \times 98$, colorié on noir et blanc de la manière habituelle. Avec la souris, on peut sélectionner n'importe quel rectangle dont chaque côté est composé d'arêtes de certaines cases de l'échiquier, et cliquer dessus. Alors les cases à l'intérieur du rectangle sélectionné changent toutes de couleur : les cases blanches deviennent noires et réciproquement. Trouver le nombre minimal de tels clics nécessaires pour que toutes les cases de l'échiquier soient de la même couleur.

**Solutions**

_Solution de l'exercice 1_ On colorie les colonnes du tableau alternativement en noir et en blanc. Il y a alors $9 \times 5 = 45$ cases noires, et $9 \times 4 = 36$ cases blanches. Lors du déplacement, chaque puce change de couleur de colonne. Il y a ainsi plus que 36 puces sur les 45 cases noires après le signal, et donc au moins 9 cases vides. D'autre part, on trouve facilement une configuration où il y en a exactement 9.

_Solution de l'exercice 2_

1. On considère un triangle équilatéral de côté 1. Par le principe des tiroirs, deux de ses sommets sont de la même couleur, ce qui conclut.
2. Raisonnons par l'absurde en supposant que deux points rouges ne sont jamais séparés d'une distance $a$, et que deux points bleus ne sont jamais séparés d'une distance $b$. Par symétrie, on peut également supposer $a \leq b$. On considère un point bleu $A$, et un triangle $ABC$ tel que $AB = AC = b$, et $BC = a$. Alors $B$ et $C$ ne peuvent être bleus, étant à distance $b$ d'un point bleu. Ils sont donc rouges, mais ceci est contradictoire car ils sont séparés d'une distance $a$. Donc pour l'une des deux couleurs il existe bien des points séparés de n'importe quelle distance.
3. On raisonne par l'absurde. Soit $A$ un point rouge, et soient $B$ et $C$ tels que $ABC$ soit équilatéral de côté 1. Par hypothèse, $B$ et $C$ sont disons respectivement bleu et vert. On construit le symétrique $A'$ de $A$ par rapport à la

droite $BC$. Alors $A'$ est à distance $\sqrt{3}$ de $A$, et est nécessairement rouge. En effectuant de même pour tous les triangles équilatéraux de côté 1 ayant $A$ pour sommet, on obtient que tout le cercle de centre $A$ et de rayon $\sqrt{3}$ est rouge. Ceci est une contradiction, car il existe sur ce cercle des points distants de $1$.

*Solution de l'exercice 3* Nous savons que $a_1 \dots a_{2013} = b_1 \dots b_{2013}$, les deux étant égaux au produit de tous les nombres contenus dans le tableau. Supposons que $a_1 + b_1 + \dots + a_{2013} + b_{2013} = 0$. Soit $m$ le nombre de $-1$ parmi les $a_i$. Alors les autres $2013 - m$ valent 1, et $a_1 + \dots + a_{2013} = 2013 - 2m$. Ainsi, parmi les $b_i$ il doit y avoir $m$ nombres 1 et $2013 - m$ nombres $-1$. Alors $a_1 \dots a_{2013} = (-1)^m$ et $b_1 \dots b_{2013} = (-1)^{2013-m} \neq (-1)^m$ car 2013 est impair, et on obtient une contradiction avec ce qu'on a remarqué au début.

*Solution de l'exercice 4* On construit les cinq triangles rectangles extérieurs au pentagone dont les côtés du pentagone sont les hypoténuses. Quant on fait le tour du pentagone par les 10 côtés extérieurs de ces triangles, on parcourt nécessairement un nombre pair de segments unités. Donc la somme des longueurs de ces 10 côtés est paire. Mais elle est de la même parité que la somme des carrés de ceux-ci, qui est égale par le théorème de Pythagore à la somme des carrés des cotés du pentagone, qui est de même parité que le périmètre du pentagone, ce qui conclut.

*Solution de l'exercice 5* On colorie l'échiquier avec des couleurs $a, b, c, d$ de la manière suivante :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | $b$ | $a$ | $b$ | $a$ | $b$ |
| $c$ | $d$ | $c$ | $d$ | $c$ | $d$ |
| $d$ | $c$ | $d$ | $c$ | $d$ | $c$ |
| $b$ | $a$ | $b$ | $a$ | $b$ | $a$ |

On remarque que pour atteindre la première et la quatrième ligne, le cavalier doit forcément passer par les deux lignes du milieu. Vu qu'il y a autant de cases dans les lignes du milieu que dans les lignes du bord, il est forcé d'alterner entre les lignes du milieu et les lignes du bord. Alors quand il est sur une case de couleur $a$, il doit aller sur une case de couleur $c$, puis retourner sur une case de couleur $a$, et ainsi de suite. Ainsi, il ne peut jamais atteindre une case de couleur $b$ ou $d$, contradiction.

*Solution de l'exercice 6* On découpe la galerie en triangles, en dessinant des diagonales qui ne s'intersectent pas. Montrons par récurrence sur $n$ que cela est toujours possible. Si $n = 3$, c'est clair. Supposons que c'est vrai pour $n$, et considérons un polygone à $n + 1$ côtés. Au moins l'un des angles de ce dernier est inférieur à $180$ degrés : on relie par une diagonale les deux sommets adjacents au sommet correspondant à cet angle. Si on oublie ce sommet, on obtient un $n$-gone, dont on sait par hypothèse de récurrence qu'il admet une triangulation. En remettant le sommet oublié, on conclut la récurrence.
Une fois que la galerie est triangulée, on peut colorier les sommets en trois couleurs de sorte que chaque triangle de la triangulation ait un sommet de chaque

couleur : cela se fait également par récurrence. Le cas $n = 3$ est clair. Supposons que c'est vrai pour un polygone triangulé à $n$ sommets et considérons un polygone triangulé à $n+1$ sommets. Par construction de la triangulation ci-dessus, il existe un sommet qui n'appartient qu'à un seul triangle. On supprime ce sommet, on colorie, et on remet le sommet supprimé en le coloriant de la seule couleur dont n'est colorié aucun de ses deux voisins.
On remarque qu'en positionnant des gardiens en tous les points d'une même couleur, on surveille toute la galerie, puisque chaque triangle est alors surveillé. En choisissant la couleur qui apparaît le moins de fois, on n'a besoin que d'au plus $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ gardiens.

*Solution de l'exercice 7*

1. Soient $m$ et $n$ deux entiers blancs. On va montrer que $mn$ est blanc. En effet, soit $k$ un entier noir. Alors $m + k$ est noir, et par conséquent $n(m + k) = mn + nk$ est blanc. Par conséquent, $mn$ doit être de la même couleur que $nk$, c'est-à -dire blanc.
2. Remarquons tout d'abord que si $1$ était blanc, aucun entier $n = n \times 1$ ne pourrait être noir, ce qui est contradictoire. Donc $1$ est toujours noir. Soit $k \geq 2$ le plus petit entier blanc. Alors d'après la question précédente, tous les multiples de $k$ sont blancs. En ce qui concerne les autres entiers, nous savons par hypothèse que $1, 2, \ldots, k-1$ sont noirs. En ajoutant $k$ a chacun d'entre eux, nous obtenons que $k+1, k+2, \ldots k+(k-1)$, c'est-à -dire tous les entiers compris strictement entre $k$ et $2k$, sont noirs. Par une récurrence simple, en ajoutant $k$ à chaque étape, on montre ainsi que tous les entiers qui ne sont pas multiples de $k$ sont noirs. Ainsi, tout coloriage de ce type vérifie que les entiers blancs sont exactement les multiples d'un certain entier blanc, et que tous les autres sont noirs.

   Si on connait la division euclidienne, on peut reformuler la démonstration du fait que les non multiples de $k$ sont noirs de la manière suivante : soit $m$ un entier non multiple de $k$. On écrit la division euclidienne de $m$ par $k$ : $m = qk + r$, avec $r \in \{1, \ldots, k-1\}$. On sait que le produit $qk$ est blanc, et que $r$ est noir par minimalité de $k$, donc $m$ est noir.

*Solution de l'exercice 8* Disons que deux points à coordonnées entières sont adjacents s'ils sont reliés par un segment de longueur 1. Alors il existe forcément deux points adjacents de couleurs différentes, sinon tous les points sont de la même couleur. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que ce sont $A = (0, 0)$ et $B = (0, 1)$, coloriés respectivement en vert et en bleu.
Premier cas : il existe un point rouge $C = (a, 0)$ sur la droite $(AB)$ (d'équation $y = 0$). Alors toute la droite d'équation $x = 0$ est verte et toute la droite d'équation $x = a$ est rouge. Dans ce cas, le triangle formé par les points $(0, 1), (1, 0), (a, a-1)$ est rectangle et tricolore.
Deuxième cas : Il n'existe pas de point rouge sur la droite $(AB)$. Soit $C = (a, b)$ un point rouge, et $P = (a, 0)$ son projeté sur la droite $(AB)$. Ce dernier est alors vert ou bleu. S'il est vert, le triangle $CPB$ est rectangle et tricolore, et s'il est bleu, le triangle $CPA$ l'est.

Solution de l'exercice 9 On raisonne par l'absurde, et on fait tourner les points rouges en gardant immobiles les points bleus. Par hypothèse, deux points rouges ne peuvent alors jamais se superposer simultanément avec deux points bleus. Il y a donc à chaque instant au plus un point rouge qui est superposé avec un point bleu. Après 100 rotations, on revient au point de départ, donc chaque sommet rouge s'est superposé une fois avec chaque sommet bleu. De plus, lors de la disposition initiale, aucun point rouge n'est superposé avec aucun point bleu. Cela fait $10 \times 10 = 100$ superpositions à faire une par une lors de seulement 99 configurations différentes possibles, contradiction.

Solution de l'exercice 10 Soit $A_1$ la somme des aires des triangles monochromatiques et $A_2$ la somme des angles des triangles ayant des sommets d'exactement deux couleurs différentes. Si $ABC$ est un triangle monochromatique et $M$ un point d'une couleur différente de celle des sommets de $ABC$, nous avons

$$[ABC] \leq [ABM] + [BMC] + [CMA],$$

où $[ABC]$ désigne l'aire du triangle $ABC$. Sommons ceci sur tous les points $M$, puis sur tous les triangles monochromatiques. Dans le terme de gauche, chaque triangle apparaît exactement 12 fois, car il y a 12 points $M$ de couleur différente de celle de ses sommets. Dans le terme de droite, chaque triangle bichromatique est de la forme $ABM$ pour $A$ et $B$ de la même couleur et $M$ d'une autre couleur, et il est compté 4 fois car il peut provenir de quatre triangles monochromatiques différents : ceux qui ont pour sommets $A$, $B$ et un des 4 autres points de la même couleur que $A$ et $B$. Ainsi, nous avons $12A_1 \leq 4A_2$, soit $3A_1 \leq A_2$. Cela implique que $A \geq A_1 + A_2 \geq 4A_1$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 11 Dans cette solution, nous allons remplacer 98 par tout nombre $n$ pair. Il est simple de trouver une manière de faire en sorte que tout l'échiquier soit de la même couleur. Il suffit de sélectionner tout d'abord une colonne sur deux, puis une ligne sur deux. Cela fait $n$ clics. Montrons que c'est en fait le minimum que l'on cherche. On dit qu'un sommet d'une des cases de l'échiquier est *mauvais* s'il est le sommet d'un nombre impair de cases noires et *bon* sinon. Au tout début, les seuls sommets mauvais sont ceux qui sont au bord de l'échiquier, à l'exception des deux coins blancs, il y en a donc exactement $4n - 2$. A chaque étape, lorsqu'on sélectionne un rectangle $R$, cela ne peut rendre bons que les coins de ce rectangle. Nous ne pouvons donc diminuer le nombre de mauvais sommets que d'au plus $4$ à chaque étape. Or a la fin, il faut que ce nombre soit nul : il nous faut donc bien au moins $n$ étapes.

# 2 Jeudi après-midi et vendredi : Géométrie

## 1 jeudi après-midi : David Zmiaikou

### Exercice 1

On se donne un triangle $ABC$, deux points $E$ et $D$ sur les côtés $[AC]$ et $[BC]$ respectivement, et un point $F$ tel que $AF$ et $BF$ soient les bissectrices des angles $\widehat{CAD}$ et $\widehat{CBE}$. Montrer que $\widehat{AEB} + \widehat{ADB} = 2 \cdot \widehat{AFB}$. (Figure 1)

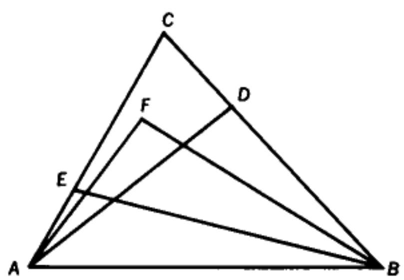



FIGURE 1 –

**Exercice 2**
Dans un triangle $ABC$ on a tracé les bissectrices $[AE]$ et $[BD]$. Soient $P$ et $Q$ deux points sur $[BD]$ et $[AE]$ respectivement tels que $CP \perp BD$ et $CQ \perp AE$. Montrer que les droites $PQ$ et $AB$ sont parallèles. (Figure 2)

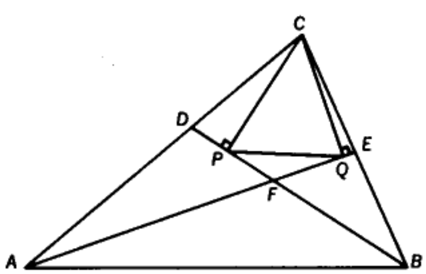



FIGURE 2 –

**Exercice 3**
On se donne un carré $ABCD$, la bissectrice $CF$ de l'angle $ACD$ et un point $Q$ sur le côté $[CD]$ tel que $BQ \perp CF$. Soit $P$ le point de l'intersection de $AC$ et $BQ$. Montrer que $DQ = 2PE$. (Figure 3)

**Exercice 4**
Dans un triangle $ABC$ on a tracé les hauteurs $[AA_1]$, $[BB_1]$, $[CC_1]$ et les médianes $[AA_2]$, $[BB_2]$, $[CC_2]$. Prouver que la longueur de la ligne brisée $A_1B_2C_1A_2B_1C_2A_1$ est égale au périmètre du triangle $ABC$.

**Exercice 5**
Soit $E$ le point à l'intérieur d'un carré $ABCD$ tel que $\widehat{EDC} = \widehat{ECD} = 15°$. Prouver que le triangle $ABE$ est équilatéral. (Figure 4)

**Exercice 6**
Soient $E$, $F$, $D$ les milieux des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ d'un triangle $ABC$ respectivement. On trace une hauteur $[BG]$. Montrer que $\widehat{EGF} = \widehat{EDF}$. (Figure 5)

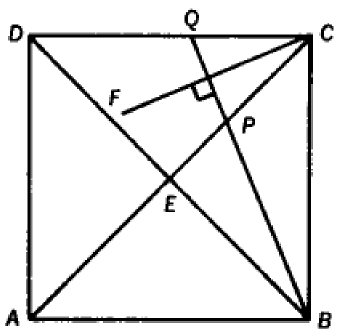



FIGURE 3 –

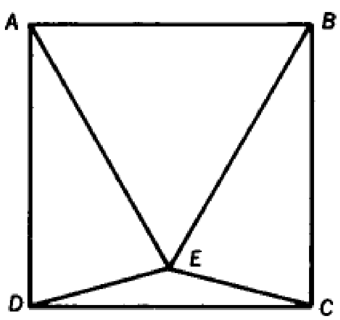



FIGURE 4 –

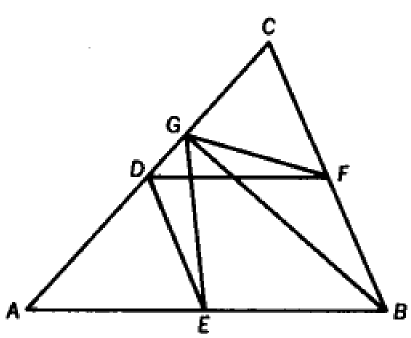



FIGURE 5 –

**Exercice 7**
On trace un triangle $ABC$ et une droite passant par son centre de gravité $G$. Soient $X$, $Y$ et $Z$ les bases des perpendiculaires à cette droite issues des sommets $A$, $C$ et $B$ respectivement. Prouver que $CY = AX + BZ$. (Figure 6)

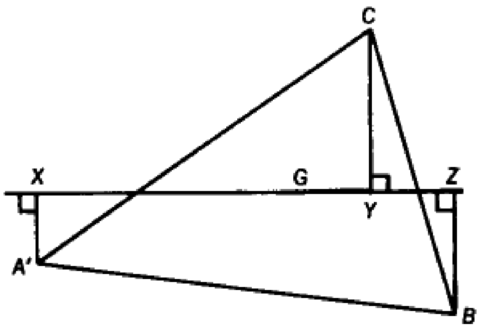



FIGURE 6 –

**Exercice 8**
Soient $ABC$ un triangle et $M$ le milieu de $[AB]$. On trace une droite par le sommet $C$ et deux perpendiculaires $[AP]$ et $[BP]$ à cette droite. Montrer que $MP = MQ$. (Figure 7)

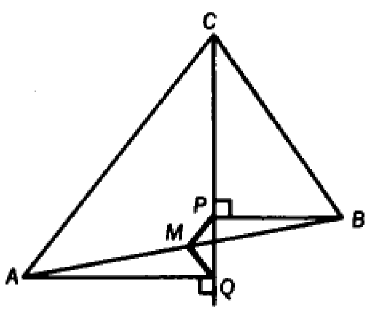



FIGURE 7 –

**Exercice 9**
Deux cercles se rencontrent en les points $P$ et $Q$. Une droite intersecte le segment $[PQ]$ et rencontre les cercles en les points $A$, $B$, $C$ et $D$ dans cet ordre-lá. Prouver que $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

**Exercice 10**
Sur les côtés $AB$ et $AD$ d'un parallélogramme $ABCD$ on a construit de manière externe deux triangles équilatéraux $ABF$ et $ADE$. Prouver que le triangle $CEF$ est équilatéral. (Figure 8)

**Exercice 11**
Soit $H$ le milieu de la base $[BC]$ d'un triangle isocèle $ABC$. Le point $E$ sur le côté $AC$ est tel que $HE \perp AC$, le point $O$ est le milieu de $[HE]$. Montrer que les droites $(AO)$ et $(BE)$ sont perpendiculaires.

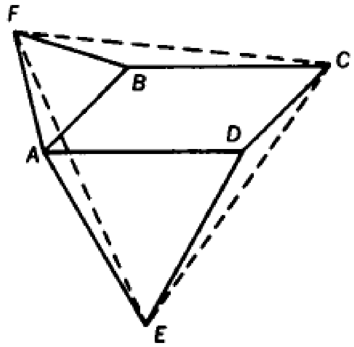



FIGURE 8 –

**Exercice 12** (difficile)
Dans un triangle $ABC$ on a tracé deux médianes $[AF]$ et $[CE]$. Montrer que si $\widehat{BAF} = \widehat{BCE} = 30°$, alors le triangle $ABC$ est équilatéral.

## Indications de solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Exprimer les angles $\widehat{AEB}$, $\widehat{ADB}$ et $\widehat{AFB}$ comme $180°$ moins les autres angles des triangles $AEB$, $ADB$ et $AFB$ respectivement. Ensuite, sommer les trois expressions.

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> La droite $(CF)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{C}$, car les bissectrices d'un triangle sont concurrentes. Ainsi, on a $\widehat{DCF} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{A} - \frac{1}{2}\widehat{B}$. Ensuite, $\widehat{CDB} = \widehat{A} + \frac{1}{2}\widehat{B}$ comme un angle extèrieure au triangle $ADB$, dóù on trouve $\widehat{DCP} = 90° - \widehat{A} - \frac{1}{2}\widehat{B}$ et $\widehat{PCF} = \frac{1}{2}\widehat{A}$. Le quadrilatère $CPFQ$ est inscriptible, d'où $\widehat{PQF} = \widehat{PCF} = \frac{1}{2}\widehat{A} = \widehat{FAB}$. Donc, $PQ \parallel AB$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Soit $K$ le milieu de $[DQ]$. Vu que $E$ est le milieu de $[DB]$, alors la droite $KE$ est une droite des milieux du triangle $QDB$ et donc parallèle à $QB$. La droite $CF$ est une bissectrice et hauteur dans les triangles $CQP$ et $CKE$, qui sont donc isocèles. On trouve que $PE = QK = \frac{1}{2}QD$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Il suffit d'utiliser six fois le fait suivant : dans un triangle rectangle la médiane issue de l'angle droit est égale à la moitiié de l'hypoténuse.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Remarquer qu'un point $E$ dans la carré $ABCD$ avec la propriété $\widehat{EDC} = \widehat{ECD} = 15°$ est unique. Introduire un point $F$ à l'intérieur de $ABCD$ tel que le triangle $ABF$ soit équilatéra. Montrer que le point $F$ a la même propriété et donc coïncide avec $E$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> Puisque $GF$ et $GE$ sont des médianes dans les triangles rectangles $CGB$ et $AGB$ respectivement, les triangles $GFB$ et $GEB$ sont isocèles.

Donc, $\widehat{EGF} = \widehat{EBF}$. Puisque $EDFB$ est un parall̀elogramme, on a aussi $\widehat{EDF} = \widehat{EBF}$.

_Solution de l'exercice 7_ On trace les médianes du triangle $ABC$. Soient $D$ et $E$ les milieux des segments $[AB]$ et $[CG]$ respectivement, voir la figure 9. On trace les perpendiculaires $[DQ]$ et $[EP]$ à la droite. Alors $DQ = \frac{1}{2}(AX + BZ)$ et $EP = \frac{1}{2}CY$. Finalement, les triangles $GDQ$ et $GEP$ sont isométriques, d'où $DQ = EP$.

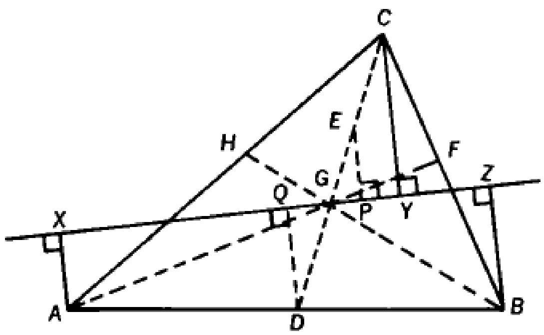



FIGURE 9 –

_Solution de l'exercice 8_ Tracer une droite par le point $M$ parallèlement à $BP$ et $AQ$. Elle est perpedniculaire à $PQ$ et d'après Thalès passe elle passe par le milieu de $[PQ]$. Donc, le triangle $PMQ$ est isocèle.

_Solution de l'exercice 9_ Constater que $\widehat{APQ} = \widehat{ACQ}$ et $\widehat{BPQ} = \widehat{BDQ}$.

_Solution de l'exercice 10_ Il est facile de montrer que les triangles $FAE$ et $FBC$ sont isométriques, d'où $FE = FC$. Ensuite $\widehat{EFC} = \widehat{AFB} - \widehat{AFE} + \widehat{BFC} = 60°$, car $\widehat{AFB} = 60°$ et $\widehat{AFE} = \widehat{BFC}$. Donc, le triangle $EFC$ est équilatéral.

_Solution de l'exercice 11_ Puisque le triangle $ABC$ est isocèle, alors $[AH]$ est aussi une hauteur et une bissectrice. Donc, les triangles rectangles $AEH$ et $AHB$ sont semblables. Soit $K$ le milieu de $[HB]$. Vu que $[AO]$ et $[AK]$ sont deux médianes dans les triangles semblables $AEH$ et $AHB$, on trouve que $\frac{AO}{AE} = \frac{AK}{AH}$ et $\widehat{OAK} = \widehat{EAH}$. Donc, les triangles rectangles $AEH$ et $AOK$ sont aussi semblables, d'où $\widehat{AOK} = 90°$. On conclut en remarquant que $OK \parallel EB$.

_Solution de l'exercice 12_ Le quadrilatère $AEFC$ est inscriptible, soient $O$ et $R$ le centre et le rayon de son cercle circonscrit respectivement. Alors $\widehat{EOF} = 60°$ et $OE = OF = R$, d'où le triangle $OEF$ est équilatéral. On désigne ce cercle par $S$, et soient $S_1$ et $S_2$ les cercles symétriques à $S$ par rapport aux points $E$ et $F$ respectivement. Puisque ces points sont les milieux de $[AB]$ et $[CB]$, le point $B$ se trouve sur les cercles $S_1$ et $S_2$. Vu que le triangle $OEF$ est équilatéral de côté $R$, alors les centres des cercles $S$, $S_1$ et $S_2$ forment un triangle équilatéral de côté $2R$. Donc, les cercles $S_1$ et $S_2$ se touche en le point $B$. On peut en déduire que le triangle $ABC$ est équilatéral.

## 2 vendredi matin : François Lo Jacomo

**Exercice 1**
Un cercle de rayon $r$ est inscrit dans un triangle $ABC$. Les tangentes à ce cercle parallèles aux côtés du triangle découpent trois petits triangles, dont les cercles inscrits ont pour rayons $r_A, r_B, r_C$. Montrer que $r_A + r_B + r_C = r$.

**Exercice 2**
La corde $CD$ d'un cercle de centre $O$ est perpendiculaire à son diamètre $AB$, et la corde $AE$ passe par le milieu du rayon $OC$. Montrer que la corde $DE$ passe par le milieu de $BC$.

**Exercice 3**
Dans un triangle $ABC$, les bissectrices intérieures des angles en $A$, $B$ et $C$ coupent le cercle circonscrit respectivement en $A_1$, $B_1$ et $C_1$. Montrer que $AA_1 + BB_1 + CC_1 > AB + BC + CA$.

**Exercice 4**
On considère un hexagone inscrit dans un cercle de rayon $R$, et vérifiant : $AB = BC = CD = a$, et $DE = EF = FA = b$. Calculer $R$ en fonction de $a$ et $b$.

**Exercice 5**
Soit $ABCD$ un rectangle, $P$ un point du côté $AB$. Le cercle passant par $A$, $B$ et la projection orthogonale $Q$ de $P$ sur $CD$ recoupe $(AD)$ et $(BC)$ en $X$ et $Y$. Montrer que la droite $(XY)$ passe par l'orthocentre du triangle $CDP$.

**Exercice 6**
Les cercles $(C_1)$ et $(C_2)$, de centres $O_1$ et $O_2$, se coupent aux points $A$ et $B$. Le rayon $O_1B$ recoupe $C_2$ en $F$, et le rayon $O_2B$ recoupe $C_1$ en $E$. La droite passant par $B$ et parallèle à $(EF)$ recoupe les cercles $C_1$ et $C_2$ en $M$ et $N$ respectivement. Montrer que $MN = AE + AF$.

**Exercice 7**
Soit $ABC$ un triangle, $A_1$, $B_1$ et $C_1$ trois points sur les côtés $BC, CA, AB$ respectivement, choisis de telle sorte que les droites $(AA_1), (BB_1)$ et $(CC_1)$ soient concourantes. Soit $M$ la projection orthogonale de $A_1$ sur $(B_1C_1)$. Montrer que $(MA_1)$ est bissectrice de $\widehat{BMC}$.

*Solution de l'exercice 1*
Appelons $D, E, F$ les points de contact du cercle inscrit avec $BC, CA, AB$ respectivement. Le périmètre du petit triangle de sommet $A$ vaut $AE + AF$ car les tangentes menées d'un point au cercle sont égales. Comme ce petit triangle est homothétique du triangle $ABC$, $r_A = \left(\frac{AE+AF}{AB+BC+CA}\right) r$, et de même pour $r_B$ et $r_C$. Le résultat en découle immédiatement.

*Solution de l'exercice 2*
$AB$, perpendiculaire à $CD$ passant par $O$, est médiatrice de $CD$, donc les arcs $AC$ et $AD$ sont égaux, les angles $\widehat{AEC}$ et $\widehat{DEC}$ sont eux aussi égaux. Par ailleurs, les angles inscrits $\widehat{AEC}$ et $\widehat{ABC}$ sont égaux, et $\widehat{ABC}$ = $\widehat{OCB}$ puisque le triangle $OCB$

est isocèle. Donc si l'on appelle $M$ le milieu de $OC$, qui se trouve sur $AE$ par hypothèse, et $N$ l'intersection de $DE$ et $BC$, $\widehat{MEN}$ $\widehat{MCN}$. Les points $M, N, C, E$ sont donc cocycliques, d'où $\widehat{MNC} = \widehat{MEC}$ $\widehat{OBC}$. Il en résulte que $MN$ est parallèle à $OB$ : c'est donc la droite des milieux du triangle $OBC$, d'où $N$ est le milieu de $BC$.

_Solution de l'exercice 3_

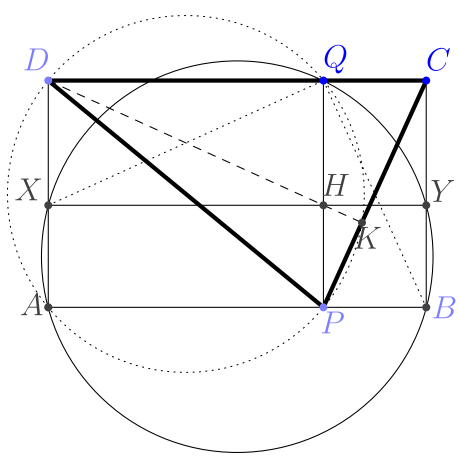
On utilisera le théorème de Ptolémée : le produit des diagonales d'un quadrilatère convexe inscriptible est égal à la somme des produits des côtés opposés. Ici, on a par exemple : $AA_1 \times BC = (AB \times A_1C) + (AC \times A_1B)$. Or $AA_1$ étant bissectrice de $\widehat{BAC}$, $A_1$ est le milieu de l'arc $BC$ d'où $A_1C = A_1B > \frac{BC}{2}$. On en déduit que $AA_1 > \frac{AB+AC}{2}$, et de même $BB_1 > \frac{BA+BC}{2}$ ainsi que $CC_1 > \frac{CB+CA}{2}$, d'où le résultat.

_Solution de l'exercice 4_

Il résulte de ces égalités que l'arc $CE$ contenant $D$ est égal au tiers du cercle entier, donc l'angle $\widehat{CDE} = 120$. D'où $CE = R\sqrt{3}$ et d'après Al Kashi, $CE^2 = CD^2 + DE^2 + CD.DE$, soit en définitive : $R^2 = \frac{a^2+b^2+ab}{3}$.

_Solution de l'exercice 5_

Remarquons tout d'abord que $XYAB$, quadrilatère inscriptible avec deux angles droits en $A$ et $B$, est nécessairement un rectangle, et appelons $H$ l'intersection de $XY$ et $PQ$. $H$ doit être l'orthocentre du triangle $CDP$, si bien que la droite $(DH)$, qui coupe $CP$ en $K$, doit être une hauteur du triangle, donc perpendiculaire à $CP$. C'est ce que nous allons prouver par une chasse aux angles. Tout d'abord $\widehat{DPC} = \widehat{XBY}$. En effet, $\widehat{DPQ} = \widehat{XAQ}$ dans le rectangle $ADQP$, c'est encore égal à l'angle inscrit $\widehat{XBQ}$; et dans le rectangle $QPBC$, $\widehat{QPC} = \widehat{QBC}$. Par ailleurs, $\widehat{PDK} = \widehat{BXY}$, car $\widehat{PDK} = \widehat{PDQ} - \widehat{HDQ}$, or dans le rectangle $PADQ$, $\widehat{PDQ} = \widehat{BAQ} = \widehat{BXQ}$ (angles inscrits), et dans le rectangle $HXDQ$, $\widehat{HDQ} = \widehat{HXQ}$. Donc les triangles $BXY$ et $DPK$ ont les mêmes angles : en particulier, $DK$ est perpendiculaire à $PC$.




Autre solution (meilleure) : l'angle $\widehat{BYX}$ étant droit, l'angle $\widehat{BQX}$ est lui aussi droit, car par hypothèse $B, Q, X, Y$ sont cocycliques. On en déduit que $\widehat{PQB} =$

$90 - \widehat{DQP} = \widehat{DQX}$. Or dans le rectangle $QCBP$, $\widehat{PQB} = \widehat{QPK}$, et - en appelant toujours $H$ l'intersection de $XY$ et $PQ$, et $K$ l'intersection de $DH$ et $CP$ - dans le rectangle $QHXD$, $\widehat{DQX} = \widehat{QDK}$. Il en résulte que $D, P, Q, K$ sont cocycliques, d'où $\widehat{PKD} = \widehat{PQD} = 90$ : $DK$ est, comme $PQ$, hauteur du triangle $CDP$, leur intersection $H$, qui appartient à $XY$, est bien l'orthocentre de $CDP$.

*Solution de l'exercice 6*
Remarquons tout d'abord que les triangles isocèles $O_1BE$ et $O_2BF$ sont semblables, donc $O_1, O_2, E, F$ sont cocycliques. Qui plus est, ce cercle, que nous appellerons $(C)$, passe par $A$, car $\widehat{O_1AO_2} + \widehat{O_1EO_2} = \widehat{O_1BO_2} + \widehat{O_1BE} = 180$. Dans le cercle $(C)$, les cordes $O_2F$ et $O_2A$ étant égales, les angles $\widehat{FEB}$ et $\widehat{BEA}$ sont eux aussi égaux ; or $MN$ étant parallèle à $EF$, $\widehat{FEB} = \widehat{EBM}$ (angles alternes internes), d'où finalement $\widehat{EBM} = \widehat{BEA}$, ce qui prouve en premier lieu que les cordes $ME$ et $BA$ du cercle $(C_1)$ sont égales, en second lieu qu'il en est de même des cordes $AE$ et $BM$, symétriques par rapport à la médiatrice de $BE$. On démontre de la même manière que $AF = BN$, donc que $MN = AE + AF$.

*Solution de l'exercice 7*
$A, B, C$ se projettent orthogonalement en $A', B', C'$ sur $B_1C_1$. D'après Thalès, $\frac{BB'}{AA'} = \frac{C_1B}{C_1A}$ et $\frac{AA'}{CC'} = \frac{B_1A}{B_1C}$. Or d'après Céva, $\frac{C_1B}{C_1A} \cdot \frac{B_1A}{B_1C} \cdot \frac{A_1C}{A_1B} = 1$, donc $\frac{BB'}{CC'} = \frac{A_1B}{A_1C} = \frac{MB'}{MC'}$ d'après Thalès. Les triangles rectangles $BB'M$ et $CC'M$ sont donc semblables, d'où les angles $\widehat{BMB'}$ et $\widehat{CMC'}$ sont égaux, leurs complémentaires $\widehat{BMA_1}$ et $\widehat{CMA_1}$ sont eux aussi égaux, ce qui achève la démonstration...

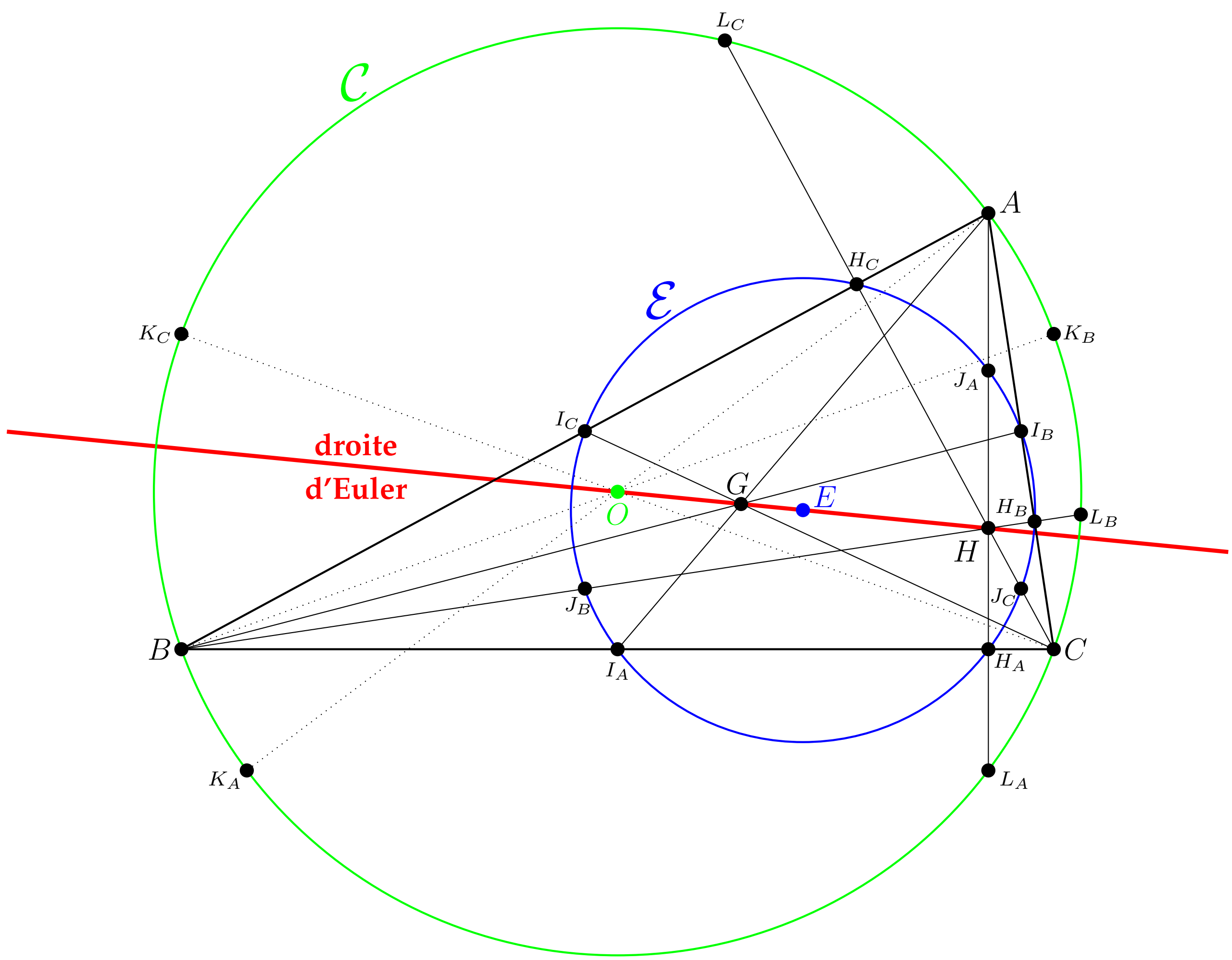
## 3 vendredi après-midi : Vincent Jugé

**A la découverte du cercle d'Euler**

L'objectif de cette partie est de construire pas à pas un cercle aux propriétés remarquables : le **cercle d'Euler** d'un triangle. Ce cercle permettra de mettre en évidence de nombreuses relations entre de multiples points remarquables du triangle, que nous allons mentionner ici.

Soit $ABC$ un triangle. On note
- $H_A$, $H_B$, $H_C$ les pieds des hauteurs issues de $A$, $B$ et $C$, et $H$ l'orthocentre du triangle ;
- $I_A$, $I_B$, $I_C$ les milieux des côtés $BC$, $CA$ et $AB$, $G$ le centre de gravité de $ABC$, et $O$ le centre du cercle circonscrit à $ABC$ ;
- $J_A$, $J_B$, $J_C$ les milieux des segments $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$ ;
- $K_A$, $K_B$, $K_C$ les symétriques de $A$, $B$ et $C$ par rapport à $O$ ;
- $L_A$, $L_B$, $L_C$ les symétriques de $H$ par rapport aux côtés $BC$, $CA$ et $AB$ ;
- $E$ le milieu du segment $[OH]$ ;
- $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à $ABC$, et $\mathcal{E}$ le cercle circonscrit à $I_AI_BI_C$.

Le cercle $\mathcal{E}$ n'est autre que le fameux cercle d'Euler.




**Exercice 1** Montrer que l'homothétie de centre $G$ et de rapport $-\frac{1}{2}$ envoie le cercle $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$.

**Exercice 2** Montrer que $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.

**Exercice 3** Montrer que $E$ est le centre du cercle $\mathcal{E}$.

**Exercice 4** Montrer que le milieu $I_A$ de $BC$ est également le milieu du segment $[K_AH]$.

**Exercice 5** Montrer que $K_A$ et $L_A$ appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.

**Exercice 6** Montrer que l'homothétie de centre $H$ et de rapport $\frac{1}{2}$ envoie également $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$.

**Exercice 7** Montrer que $J_A$ et $H_A$ appartiennent au cercle $\mathcal{E}$.

On a donc montré que :

— les points $A$, $B$, $C$, $K_A$, $K_B$, $K_C$, $L_A$, $L_B$, $L_C$ appartiennent tous au cercle circonscrit $\mathcal{C}$ ;
— les points $I_A$, $I_B$, $I_C$, $H_A$, $H_B$, $H_C$, $J_A$, $J_B$, $J_C$ appartiennent tous au cercle d'Euler $\mathcal{E}$ ;
— les points $O$, $G$, $E$ et $H$ appartiennent tous à la droite $(OH)$, que l'on appellera dorénavant **droite d'Euler** du triangle $ABC$.

**Utilisation du cercle d'Euler**

**Exercice 8** Démontrer que les 3 médiatrices d'un triangle sont concourantes, puis que les 3 hauteurs d'un triangle sont concourantes.

**Exercice 9** Soit $ABC$ un triangle acutangle, $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit et $\mathcal{E}$ son cercle d'Euler. Montrer que les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{E}$ n'ont aucun point d'intersection.

**Exercice 10** Soit $ABC$ et $XYZ$ deux triangles acutangles, tels que les points $A$, $B$, $C$, $X$, $Y$, $Z$ soient cocycliques. On note $M_{BC}$, $M_{CA}$, $M_{AB}$, $M_{YZ}$, $M_{ZX}$, $M_{XY}$ les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$, $[YZ]$, $[ZX]$ et $[XY]$.
On suppose alors que les points $M_{BC}$, $M_{CA}$, $M_{AB}$ et $M_{YZ}$ appartiennent à un même cercle $\mathcal{E}$. Montrer que $M_{ZX}$ appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si $M_{XY}$ appartient à $\mathcal{E}$.

**Exercice 11** Soit $ABC$ un triangle non dégénéré (c'est-à -dire que $A$, $B$ et $C$ sont distincts) et soit $H_A$, $H_B$, $H_C$ les pieds des hauteurs issues de $A$, $B$ et $C$. On appelle **triangle orthique** de $ABC$ le triangle $H_AH_BH_C$, et on note $h$ la transformation qui, à chaque triangle non rectangle, associe son triangle orthique.
Montrer qu'il existe un entier $n$ tel que le triangle $h^n(ABC)$ sera soit rectangle, soit de périmètre strictement inférieur à celui de $ABC$, où $h^n$ désigne l'itérée $n$-ième de la transformation $h$.

**Solutions**

_Solution de l'exercice 1_ Notons $h_{G,-1/2}$ l'homothétie de centre $G$ et de rapport $-\frac{1}{2}$. Le centre de gravité $G$ est tel que $\overrightarrow{GA} = -2\overrightarrow{GI_A}$, $\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GI_B}$, $\overrightarrow{GC} = -2\overrightarrow{GI_C}$. L'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie donc $A$ sur $I_A$, $B$ sur $I_B$ et $C$ sur $I_C$.
Or, $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit au triangle $ABC$ et $\mathcal{E}$ est le cercle circonscrit au triangle $I_AI_BI_C$. L'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie donc également $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$.

_Solution de l'exercice 2_ Comme toute homothétie, l'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie la droite $(AH)$ sur une droite parallèle à $(AH)$. Puisque $h_{G,-1/2}$ envoie $A$ sur $I_A$ et que $(OI_A)$ et $(AH)$ sont toutes deux perpendiculaires au coté $BC$, il s'ensuit que $h_{G,-1/2}$ envoie $(AH)$ sur $(OI_A)$.
De même, $h_{G,-1/2}$ envoie $(BH)$ sur $(OI_B)$. Or, $H$ est l'unique point d'intersection des droites $(AH)$ et $(BH)$, de même que $O$ est l'unique point d'intersection des droites $(OI_A)$ et $(OI_B)$. L'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie donc $H$ sur $G$, ce qui signifie exactement que $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$.

_Solution de l'exercice 3_ Notons $E'$ le centre du cercle $\mathcal{E}$, et montrons que $E = E'$. L'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie $H$ sur $O$. En outre, puisque $h_{G,-1/2}$ envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$, il s'ensuit que $h_{G,-1/2}$ envoie $O$ sur $E'$. Il en résulte donc les deux égalités vectorielles $\overrightarrow{GH} = -2\overrightarrow{GO}$ et $\overrightarrow{GO} = -2\overrightarrow{GE'}$, de sorte que l'on obtient bien

$$2\overrightarrow{OE'} - 2\overrightarrow{OE} = 2\overrightarrow{GE'} - 2\overrightarrow{GO} - \overrightarrow{OH} = -\overrightarrow{GO} - 2\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GO} - \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GH} - \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{0},$$

ce qui signifie exactement que $E = E'$, donc que $E$ est bien le centre du cercle $\mathcal{E}$.

*Solution de l'exercice 4* Rappelons-nous que l'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie $A$ sur $I_A$ et envoie $H$ sur $O$. On en conclut l'égalité vectorielle $\overrightarrow{HA} = -2\overrightarrow{OI_A}$.
Considérons maintenant l'homothétie $h_{K_A,2}$ de centre $K_A$ et de rapport 2. L'homothétie $h_{K_A,2}$ envoie $O$ sur $A$. Il en résulte que $h_{K_A,2}$ envoie $I_A$ sur un point $X$ tel que $\overrightarrow{AX} = 2\overrightarrow{OI_A} = \overrightarrow{AH}$, c'est-à -dire sur le point $H$.
Cela signifie exactement que $I_A$ est le milieu du segment $[HK_A]$.

*Solution de l'exercice 5* Tout d'abord, puisque $A$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ et que $O$ est à la fois le centre de $\mathcal{C}$ et le milieu du segment $[AK_A]$, il en résulte que $AK_A$ est un diamètre de $\mathcal{C}$, et bien sur que $K_A$ appartient lui aussi à $\mathcal{C}$.
Maintenant, remarquons que, puisque le droite $(HH_A)$ est perpendiculaire au côté $BC$, le point $H_A$ est en fait le milieu du segment $[HL_A]$. Rappelons-nous que $I_A$ est également le milieu du segment $[HK_A]$. La droite $(H_AI_A)$ est donc une droite des milieux du triangle $HK_AL_A$, et la droite $(K_AL_A)$ est donc parallèle à $(H_AI_A)$. Or, $(H_AI_A)$ est en fait la droite $(BC)$, donc est perpendiculaire à la droite $(HL_A)$, qui est en fait confondue avec la droite $(AL_A)$.
Le triangle $AK_AL_A$ est donc rectangle en $L_A$, ce qui signifie que $L_A$ appartient bien au cercle dont $AK_A$ est un diamètre : ce cercle étant précisément le cercle $\mathcal{C}$, on a bien montré que $L_A$ appartient à $\mathcal{C}$.

*Solution de l'exercice 6* On note $h_{H,1/2}$ l'homothétie de centre $H$ et de rapport $\frac{1}{2}$. Puisque $I_A$ est le milieu du segment $[HK_A]$, l'homothétie $h_{H,1/2}$ envoie le point $K_A$ sur $I_A$. De même, l'homothétie $h_{H,1/2}$ envoie $K_B$ sur $I_B$ et $K_C$ sur $I_C$.
Or, $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit à $K_AK_BK_C$, tandis que $\mathcal{E}$ est le cercle circonscrit à $I_AI_BI_C$. L'homothétie $h_{H,1/2}$ envoie donc le cercle $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$.

*Solution de l'exercice 7* Rappelons-nous que $H_A$ est le milieu du segment $[HL_A]$. Puisque $J_A$ est, par définition, le milieu du segment $[HA]$, l'homothétie $h_{H,1/2}$ envoie le point $L_A$ sur $H_A$, et envoie $A$ sur $J_A$.
Puisque $A$ et $L_A$ appartiennent tous deux à $\mathcal{C}$ et que $h_{H,1/2}$ envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$, on en déduit que $H_A$ et $J_A$ appartiennent tous deux à $\mathcal{E}$.

*Solution de l'exercice 8* Soit $ABC$ notre triangle. Rappelons-nous que la médiatrice $M_C$ de $AB$ est l'ensemble des points équidistants à $A$ et $B$. De même, la médiatrice $M_A$ de $BC$ est l'ensemble des points équidistants à $B$ et $C$ et la médiatrice $M_B$ de $CA$ est l'ensemble des points équidistants à $C$ et $A$. Le point d'intersection de $M_C$ et $M_A$, que l'on note $O$, est donc équidistant de $A$, $B$ et $C$ en même temps, ce qui montre bien qu'il appartient à $M_B$.
Rappelons-nous, maintenant, notre solution à l'exercice 2. Nous avons simplement montré que l'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie $O$ sur le point d'intersection de

$(AH_A)$ et $(BH_B)$. De même, l'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie $O$ sur le point d'intersection de $(BH_B)$ et $(CH_C)$. Cela montre bien que les hauteurs $(AH_A)$, $(BH_B)$ et $(CH_C)$ sont concourantes.

*Solution de l'exercice 9* Travaillons sur le triangle étudié en début de séance. Les triangles $ABC$ et $I_AI_BC$ étant directement semblables, il l'angle $\widehat{CI_AI_B}$ est aigu, ce qui montre que le segment $[BI_B]$ coupe la droite $(I_AO)$. De même, le segment $[CI_C]$ coupe la droite $(I_BO)$, et le segment $[AI_A]$ coupe la droite $(I_CO)$.
Il s'ensuit que $O$ appartient au triangle $I_AI_BI_C$, donc se situe à l'intérieur du cercle $\mathcal{E}$. En particulier, soit $R_\mathcal{C}$ le rayon de $\mathcal{C}$ et $R_\mathcal{E}$ le rayon de $\mathcal{E}$ : on vient de montrer que $OE < R_\mathcal{E}$. Or, puisque l'homothétie $h_{G,-1/2}$ envoie $\mathcal{C}$ sur $\mathcal{E}$, on constate que $R_\mathcal{C} = 2R_\mathcal{E}$.
Soit alors $X$ un point du cercle $\mathcal{E}$. L'inégalité triangulaire indique que

$$OX \leq OE + EX < R_\mathcal{E} + R_\mathcal{E} = R_\mathcal{C},$$

donc que $X$ n'appartient pas à $\mathcal{C}$, ce qui conclut l'exercice.

*Solution de l'exercice 10* Reformulons notre exercice : que dit-il ? Il nous dit que $ABC$ et $XYZ$ sont deux triangles partageant le même cercle circonscrit, que l'on note dorénavant $\mathcal{C}$
L'énoncé nous informe ensuite que $M_{BC}$, $M_{CA}$, $M_{AB}$ et $M_{YZ}$ appartiennent à un même cercle $\mathcal{E}$. On reconnaà®t qu'il s'agit là du cercle d'Euler du triangle $ABC$, car ce cercle passe par les milieux des côtés de $ABC$.
Pour des raisons de symétrie, il nous suffit maintenant de montrer que, si $M_{ZX}$ appartient à $\mathcal{E}$, alors $M_{XY}$ appartient à $\mathcal{E}$ aussi. On peut même aller plus loin et montrer directement que, si $M_{ZX}$ appartient à $\mathcal{E}$, alors $ABC$ et $XYZ$ ont même cercle d'Euler.
On note maintenant $R_\mathcal{C}$ le rayon du cercle $\mathcal{C}$, et $R_\mathcal{E}$ le rayon du cercle $\mathcal{E}$. Puisque $\mathcal{E}$ est l'image de $\mathcal{C}$ par une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$, on en déduit que $R_\mathcal{C} = 2R_\mathcal{E}$.
Soit $\mathcal{E}'$ le cercle d'Euler du triangle $XYZ$. On sait que $R_\mathcal{C} = 2R_\mathcal{E} = 2R_{\mathcal{E}'}$, et que $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ passent tous deux par les points $M_{YZ}$ et $M_{ZX}$. Or, seuls deux cercles de rayon $R_\mathcal{E}$ passent par $M_{YZ}$ et $M_{ZX}$ : les cercles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ sont deux tels cercles. Il nous suffit donc de trouver un troisième tel cercle $\mathcal{C}'$ différent à la fois de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$ pour conclure que $\mathcal{E} = \mathcal{E}'$.
En remarquant que l'homothétie $h_{Z,1/2}$ de centre $Z$ et de rapport $\frac{1}{2}$ envoie le triangle $XYZ$ sur le triangle $M_{ZX}M_{YZ}Z$, on remarque que le cercle circonscrit à $M_{ZX}M_{YZ}Z$ est un tel cercle $\mathcal{C}'$ : montrons qu'il est différent de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$. Les triangles $ABC$ et $XYZ$ étant acutangles, l'exercice 9 indique que, le point $Z$ appartenant au cercle $\mathcal{C}$ circonscrit à $ABC$ et à $XYZ$, il ne peut appartenir aux cercles $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. On en déduit donc que $\mathcal{C}'$ est bien différent de $\mathcal{E}$ et de $\mathcal{E}'$, ce qui conclut l'exercice.

*Solution de l'exercice 11* Tout d'abord, notons que si le triangle $ABC$ n'est pas rectangle, alors $h(ABC)$ n'est pas dégénéré. Partant d'un triangle $ABC$ non dégénéré, on obtiendra donc soit un triangle $h^n(ABC)$ rectangle, soit une suite infinie de triangles $h^n(ABC)$ non rectangles.

Etant donné l'exercice, montrons que, si l'on est dans le second cas, alors le périmètre des triangles $h^n(ABC)$ devient arbitrairement petit. Notons $R_n$ le rayon du cercle circonscrit à $h^n(ABC)$ et $P_n$ le périmètre de $h^n(ABC)$. Puisque le cercle circonscrit à $h(ABC)$ est le cercle d'Euler de $ABC$, on en déduit que $R_1 = 2^{-1}R_0$. Puis, par une récurrence immédiate, $R_n = 2^{-n}R_0$.
Or, si $\mathcal{C}$ est le cercle circonscrit à $ABC$, notons que les côtés $AB$, $BC$ et $CA$ sont des cordes du cercle $\mathcal{C}$, donc sont telles que $AB, BC, CA \leq 2R_0$. En particulier, $P_0 \leq 6R_0$ et, de même, $P_n \leq 6R_n = \frac{6}{2^n}R_0$. Le triangle $ABC$ étant fixé, il suffit alors de choisir $n$ suffisamment grand pour obtenir un triangle $h^n(ABC)$ de périmètre $P_n \leq \frac{6}{2^n}R_0 < P_0$.

# 3 Samedi : Test final

## 1 Enoncé

L'énoncé du test final n'était pas encore connu à l'heure à laquelle le polycopié a été envoyé à l'imprimeur.

## 2 Solution

La solution du test final n'était pas encore connue à l'heure à laquelle le polycopié a été envoyé à l'imprimeur.