CORRIGÉ DE LA COUPE ANIMATH D'AUTOMNE

Nous avons conscience que les exercices proposés sont inhabituels et difficiles pour la plupart des élèves de collège et de lycée. Aussi nous tenons à féliciter tous les candidats ayant passé la Coupe Animath d'Automne pour leur courage et leur ténacité.

Quels que soient vos résultats, si ces problèmes mathématiques vous ont plu, nous vous invitons à chercher les exercices des envois, lire des livres ou des polycopiés de maths, fréquenter un (ou plusieurs) club(s) mathématique(s), participer à d'autres compétitions et événements mathématiques...

En vous souhaitant une belle année scolaire,
L'équipe animatrice de la POFM

Énoncés collège

Exercice 1. On répartit 2018 pièces dans b boîtes, et on répartit ces b boîtes dans m maisons, de telle sorte que le nombre de pièces dans chaque maison est strictement inférieur à b. Est-il possible que chaque boîte contienne au moins m pièces ?

Solution de l'exercice 1 Imaginons que chaque boîte contient au moins m pièces. Alors, au total, $mb \leqslant 2018$. Or, il y a m maisons, et chaque maison contient strictement moins de b pièces. Donc $bm > 2018$. Ces deux inégalités sont contradictoires, donc il est impossible que chaque boîte contienne au moins m pièces.

Exercice 2. Soit ABC un triangle, O un point à l'intérieur de ce triangle. La droite parallèle à (BC) passant par O coupe $[CA]$ en D, la parallèle à (CA) passant par O coupe $[AB]$ en E, la parallèle à (AB) passant par O coupe $[BC]$ en F. Que vaut la somme de rapports suivante :

$$\frac{BF}{BC}+\frac{AE}{AB}+\frac{CD}{AC}?$$

Solution de l'exercice 2 *Première solution :*

Notons $|ABC|$ l'aire du triangle ABC. On remarque que

$$\frac{BF}{BC}=\frac{|ABF|}{|ABC|}=\frac{|ABO|}{|ABC|},$$

car les triangles ABF et ABC de bases BF et BC ont la même hauteur, et ABO et ABF ont la même base AB et deux hauteurs parallèles de même longueur (car, si O', F' les pieds des hauteurs, $OO'F'F$ est un rectangle).

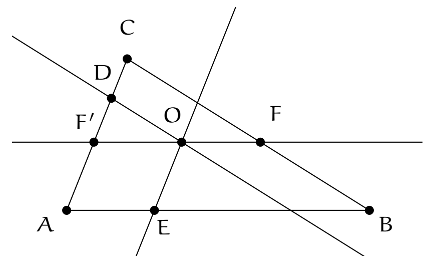
On en déduit que

$$\frac{BF}{BC}+\frac{AE}{AB}+\frac{CD}{AC}=\frac{|ABO|}{|ABC|}+\frac{|AOC|}{|ABC|}+\frac{|OCB|}{|ABC|}=1.$$

Deuxième solution :

On va utiliser ici un résultat un tout petit plus général que le théorème de Thalès : le fait que deux triangles qui ont les mêmes angles ont des longueurs de côtés proportionnelles (de tels triangles sont dits semblables).

Soit F' le point d'intersection de $[AC]$ et (OF).



Par exemple, les triangles ABC et $F'CF$ de l'exercice ont leurs côtés parallèles, donc les mêmes angles, donc ils sont semblables, de sorte que $\frac{BF}{BC} = \frac{AF'}{AC}$. (Mais on peut aussi montrer cela grâce au théorème de Thalès.)

Mais les triangles ABC et $F'OD$ sont aussi semblables, donc $\frac{F'D}{AC} = \frac{F'O}{AB}$.

De plus, $AFO'E$ est un parallélogramme, donc $F'O = AE$, et finalement :

$$\frac{BF}{BC} + \frac{AE}{AB} + \frac{CD}{AC} = \frac{AF'}{AC} + \frac{F'D}{AC} + \frac{CD}{AC} = 1.$$

Exercice 3. On considère un nombre N qui s'écrit sous la forme $30x070y03$, avec x, y des chiffres entre 0 et 9. Pour quelles valeurs de (x, y) l'entier N est-il divisible par 37 ?

Solution de l'exercice 3 On peut écrire $N = 300070003 + 1000000x + 100y$. Or $100 = 37 \times 3 - 11$ et comme $1000 = 37 \times 30 - 110 = 37 \times 27 + 1$, $1000000 = 1000^2 = 37 \times (37 \times 27^2 + 2 \times 27) + 1$ (par double distributivité).

Comme 37 divise N, 37 divise aussi $300070003 + x - 11y$. En posant la division euclidienne de 300070003 par 37, on trouve que $300070003 = 37 \times 8110000 + 3$.

Bref, 37 divise N si et seulement s'il divise $3 + x - 11y$, qui est un entier compris entre 12 (si $x = 9$ et $y = 0$) et -96 (si $x = 0$ et $y = 9$). Il reste donc trois possibilités :

— on a $3 + x - 11y = 0$, c'est-à-dire $y = 1$ et $x = 8$;

— on a $3 + x - 11y = -37$, donc $y = 4$ et $x = 4$;

— on a $3 + x - 11y = -74$, donc $y = 7$ et $x = 0$.

Énoncés communs

Exercice 4. Des lapins gris, blancs et bruns sont assis en cercle. Alice demande à tous les lapins blancs qui ont au moins un voisin brun de remuer leurs moustaches : 20 lapins remuent leurs moustaches. Elle demande ensuite à tous les lapins gris qui ont au moins un voisin brun de remuer leurs moustaches : 25 lapins remuent leurs moustaches. Montrer que l'un des lapins ayant remué ses moustaches a en fait deux voisins bruns.

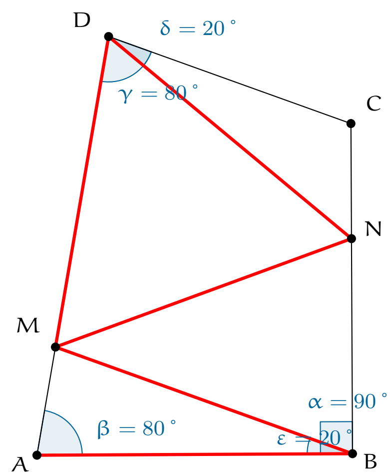
Solution de l'exercice 4 Sur le cercle, entre deux lapins bruns consécutifs, on a zéro lapin non brun, ou un lapin non brun, ou encore au moins deux lapins non bruns. S'il y a exactement un lapin non brun entre deux lapins bruns, on a trouvé un lapin qui remue les moustaches et dont les deux voisins sont bruns, comme voulu.

Ainsi, si on suppose (par l'absurde) qu'un lapin qui remue les moustaches a toujours exactement un voisin brun, il ne nous reste qu'une seule possibilité : entre deux lapins bruns consécutifs, le nombre de lapins qui remuent leurs moustaches est pair (et vaut 0 ou 2). Donc, comme une somme de nombres pairs est paire, le nombre total de lapins qui remuent leurs moustaches sur le cercle est pair, or 20+25=45, absurde !

Donc notre hypothèse était fausse, et il existe un lapin qui remue les moustaches et qui a deux voisins bruns.

Exercice 5. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe, avec $\widehat{ABC} = 90^\circ$, $\widehat{BAD} = \widehat{ADC} = 80^\circ$. Soient M et N des points de $[AD]$ et $[BC]$ tels que $\widehat{CDN} = \widehat{ABM} = 20^\circ$. Supposons enfin $MD = AB$. Que vaut $\widehat{MNB}$?

Solution de l'exercice 5 On trouve de nombreux triangles isocèles dans cette figure !



Prouvons tout cela. La somme des angles dans le triangle MAB vaut 180°, donc $\widehat{AMB} = 180^\circ - 20^\circ - 80^\circ = 80^\circ$, donc MAB est isocèle en B. Donc MDB est, lui, isocèle en M, et $\widehat{DMB} = 180^\circ - \widehat{AMB} = 100^\circ$.

Calculons aussi $\widehat{DNB} = \widehat{NDC} + \widehat{DCN} = 20^\circ + (360^\circ - 80^\circ - 80^\circ - 90^\circ) = 130^\circ$.

Soit maintenant $\mathcal{C}$ le cercle de centre M de rayon $MD = MB$. Comme

$$\widehat{DMB} = 100^\circ = 2 \times 50^\circ = 2 \times (180^\circ - 130^\circ) = 2 \times (180^\circ - \widehat{DNB}),$$

le théorème de l'angle au centre nous dit que N est sur le cercle $\mathcal{C}$.

Donc $MN = MB$, de sorte que MNB est isocèle en M et que $\widehat{MNB} = \widehat{MBN} = 70^\circ$.

Énoncés lycée

Exercice 6. Soit n un entier strictement positif. Soit p un nombre premier tel que :

$$p^3 \text{ divise } (1^3 + 1)(2^3 + 1) \cdots ((n-1)^3 + 1)(n^3 + 1).$$

Montrer que $p \leqslant n + 1$.

Solution de l'exercice 6 Si p^2 divise a^3+1 pour un certain $a \leqslant n$, la factorisation $a^3+1 = (a+1)(a^2-a+1)$ montre que :

— ou bien p divise $a+1$ et donc $p \leqslant a+1 \leqslant n+1$;

— ou bien p^2 divise $a^2 - a + 1$ et donc $p^2 \leqslant a^2 - a + 1 \leqslant a^2 \leqslant n^2$, donc $p \leqslant n$.

(attention, ici on utilise le fait que p est premier soit la forme du lemme d'euclide : si p premier divise XY, alors p divise X ou p divise Y (et éventuellement les deux à la fois) ; bien sûr, ce résultat n'est plus vrai si on retire l'hypothèse p premier !)

Sinon, on a a, b, c des entiers deux à deux distincts entre 1 et n tels que p divise a^3+1, b^3+1 et c^3+1. On vient de voir que si p divise $a+1$, $b+1$ ou $c+1$, c'est gagné.

Sinon, grâce à notre factorisation, p divise $a^2 - a + 1$, $b^2 - b + 1$ et $c^2 - c + 1$ donc aussi les différences $(a-b)(a+b-1)$ (et de même en remplaçant a ou b par c dans cette expression).

Il nous reste donc deux possibilités :

— p divise $a-b$, auquel cas $p \leqslant |a-b| \leqslant n-1$;
— p divise $b-c$ ou $a-c$, ce qui revient exactement au même qui le point précédent ;
— p ne divise ni $a-b$, ni $a-c$, ni $b-c$, auquel cas il doit diviser $a+b-1$, $a+c-1$ et $b+c-1$. Alors, p doit aussi diviser $a+b-1-(a+c-1) = b-c$, ce qui st absurde !

Donc, dans tous les cas, on est parvenu soit à une absurdité (et alors ce cas de figure n'a pas lieu d'être), soit à l'inégalité $p \leqslant n+1$.

D'où $p \leqslant n+1$.

Exercice 7. Sur un quadrillage 2018×2018 se baladent une mouche et k araignées. À chaque étape, la mouche se déplace sur une case adjacente (c'est-à-dire qui touche par un côté sa case de départ) ou décide de rester sur place, puis de même, chaque araignée se déplace sur une case adjacente ou décide de rester sur place.

(a) Pour quelles valeurs de k les araignées sont-elles sûres d'attraper la mouche, quels que soient les points de départs des $k+1$ bêtes ?

(b) Même question si on remplace la grille 2018×2018 par un pavé $2018 \times 2018 \times 2018$, et les cases par des cubes, deux cubes étant adjacents lorsqu'ils ont une face en commun.

Solution de l'exercice 7 *Question (a) :* mettons qu'une seule araignée pourchasse la mouche : si l'araignée n'est pas à côté de la mouche, la mouche va n'importe où ; sinon, la mouche va sur n'importe quelle case où n'est pas l'araignée. Cette stratégie permet toujours à la mouche de s'échapper. Donc $k > 1$.

En revanche, deux araignées peuvent toujours d'attraper la mouche : $k = 2$. Voici l'algorithme qui le leur permet. Soit Hervé et Valentine nos deux araignées, h_n la distance à la n-ième étape entre l'abscisse de la mouche et celle de Hervé et ν_n entre l'ordonnée de Valentine et celle de la mouche.

Étape 1 : Tant que $h_n + \nu_n > 0$, Hervé fait un pas horizontal dans la direction de la mouche et Valentine un pas vertical dans la direction de la mouche à chaque tour. Ainsi, si la mouche fait un pas horizontal, $h_{n+1} = h_n + 1 - 1 = h_n$ et $\nu_{n+1} = \nu_n - 1$, et si elle fait un pas vertical, c'est $h_{+1} = h_n - 1$ et $\nu_{n+1} = \nu_n$. Dans les deux cas, $h_{n+1} + \nu_{n+1} = h_n + \nu_n - 1$, donc après un nombre fini d'étapes, $h_n + \nu_n = 0$ et l'algorithme s'arrête.

Étape 2 : À partir de ce moment-là, Hervé reste toujours dans la ligne de la mouche et Valentine dans sa colonne, et ils font chaque pas de façon ˋa se rapprocher (ou ne pas s'éloigner) de la mouche.

Notons h'_n est la distance entre l'ordonnée de la mouche et celle de Hervé et ν'_n entre l'abscisse de Valentine et celle de la mouche. Par exemple, si Hervé est à gauche de la mouche et Valentine au-dessus de la mouche, à chaque étape, soit la mouche marche dans une direction qui la rapproche d'une araignée et alors $h'_n + \nu' n$ décroît d'au moins 1, soit la mouche marche vers la droite ou le bas. Or, la mouche peut faire au plus 2017 pas vers le bas et 2017 pas vers la droite, avant de faire un pas qui la rapproche d'une araignée. Ainsi, en au plus $2 \times 2017 \times (2017 + 2017)$ étapes, $h' n = 0$ ou $\nu' n = 0$, et donc la mouche a été attrapée.

Question (b) : la même preuve montre que $k = 3$.

Exercice 8. Soit $a \in \mathbb{R}$. Quelles sont les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^*$, on a :

$$af\left(\frac{x}{y}\right) + af\left(\frac{x}{z}\right) - f(x)f\left(\frac{y+z}{2}\right) \geqslant a^2 \,?$$

Solution de l'exercice 8 On procède par analyse-synthèse. Supposons que f est une solution de cette équation, que doit-elle vérifier ?

L'équation-énoncé devant être vrai pour tous x, y, z, elle doit en particulier être vraie si $x = y = z$, ce qui donne l'équation (1) :

$$af(1) + af(1) - f(x)f(x) \geqslant a^2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^*.$$

En particulier, pour $x = 1$, il vient $0 \geqslant (f(1) - a)^2$, d'où $f(1) = a$.

Ce résultat nous permet de mieux comprendre l'équation (1), qui devient :

$$2a^2 - f(x)^2 \geqslant a^2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^*.$$

D'où l'équation (2) : $a^2 \geqslant f(x)^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Revenons maintenant à l'équation-énoncé, et posons seulement $y = z = 1$, pour obtenir l'équation (3) :

$$af(x) \geqslant a^2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^*.$$

Si $a = 0$, l'équation (2) donne $f(x) = 0 = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Si $a > 0$, l'équation (3) donne $f(x) \geqslant a > 0$ puis (2) précise $a \geqslant f(x)$, d'où $f(x) = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Enfin, si $a < 0$, l'équation (3) donne $f(x) \leqslant a < 0$ puis (2) précise $a \leqslant f(x)$, d'où $f(x) = a$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Bref, dans tous les cas, si f est solution, alors f est constante égale à a en tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Et réciproquement, la fonction constante égale à a étant solution, on a bien trouvé exactement les solutions de l'équation fonctionnelle.