STAGE OLYMPIQUE DE VALBONNE 2019

du 19 au 29 août 2019

Avant-propos

Le stage olympique de Valbonne 2019 a été organisé par l'association Animath.

Son objet a été de rassembler 81 collégiennes, collégiens, lycéennes et lycéens de quatrième à première,
de 12 à 17 ans, passionés de mathématiques
sélectionnés parmi les 964 candidats à la COUPE ANIMATH,
dont certains représenteront la France aux compétitions internationales :
Olympiades Internationales de Mathématiques (IMO),
Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques (JBMO),
Olympiades Européennes de Filles de Mathématiques (EGMO),
Romanian Masters of Mathematics (RMM),
Mediterranean Youth Mathematical Championship (MYMC).
Trois membres de l'équipe de France 2019 des Olympiades Internationales de Mathématiques
sont présents à ce stage,
deux comme stagiaires, un autre comme animateur,
et un certain nombre d'autres animateurs et stagiaires
ont déjà participé à l'une des compétitions ci-dessus.

Nous tenons à remercier le Centre International de Valbonne pour son excellent accueil.

Les Animatheurs

Henry Bambury	Andreï Barbu	Mathieu Barré	Félix Breton
Paul Cahen	Aline Cahuzac	Yohann D'anello	Raphaël Ducatez
Colin Davalo	Pierre-Marie Esmenjaud	Théodore Fougereux	Olivier Garçonnet
Vincent Jugé	Savinien Kreczman	Auguste de Lambilly	Théo Lenoir
Thomas Leplumey	Matthieu Lequesne	Rémi Lesbats	Eva Philippe
Maena Quemener	Martin Rakowsky	Timothée Rocquet	Victor Vermès
Lucie Wang	Lilou Wattez		

Les élèves

Sacha Arrouès-Paykin	Samuel Avril	Stefan Barbu	Roberto Bolzan
Anatole Bouton	Enora Brémont	Elias Caeiro	Justin Cahuzac
Nelly Cerf	Noémie Cerrina	Aurélien Chen	Florian Chivé
Timothé Chupin	Etienne Conchon–Kerjan	Antoine Corbineau	Gaëtan Dautzenberg
Madeleine De Belloy De St Liénard	Cyprien De Muynck	Gaspard Delabre	Faustine Delorme
Adrien Depres	Yaël Dillies	Adam Donadille	Natan Doubez
Isaline Duperon	Emilhan Dürrüoglu	Mano Etile	Benoît Fanton
Hannah Faucheu	Aurélien Fourré	Raphaël Gandin	Théo Goix
Paul Guichon	Benoît Guillemet	Olivier Henry	Alexandre Hervou
Quentin Hurez	Vladimir Ivanov	Isaline Jouve	Augustin Kheng
Zoé Lassale- Deruelle	Pauline Laval	Evelyne Le Bezvoët	Gregoire Le Corre

Alec Le Helloco	Enya Leroy	Charles Liu	Corentin Lombard
Claire Lorenzo	Elsa Lubek	Anna Luchnikova	Brieux Madeline-Derou
Antoine Maechler	Suzanne Mairesse	Emir Melliti	Ayoub Melliti
Arnault Mermet	Hadi Mouline	Rafal Naumiak	Roméo Nazaret
Quentin Nguyen	Ten Nguyen	Camille Ordronneau	Adrien Patoz
Ninon Platel	Adrien Rey	Teiki Rigaud	Domitille Saliou
Arthur Salvati	Inès Soua	Georges Teze	Elliot Thorel
Clementina Tierno	Ayoub Tirdad	Elie Verhille	Baptiste Vibert
Matthieu Vogel	Jean-Cyrille Wilhelm	Jiaxi Xu	Fangyu Xue
Emilie Zheng			

Table des matières

I. Déroulement du stage

Pour la sixième fois, le Centre International de Valbonne (CIV) nous a accueillis du lundi 19 août vers 15 h au jeudi 29 août vers 11 h, avec un effectif final de 81 stagiaires et 25 animatheurs.

Parmi les presque 1000 candidats à la Coupe Animath, un peu moins de 700 ont franchi le cap des éliminatoires en ligne. Sur la base des résultats de la Coupe, nous devions accueillir 80 stagiaires, dont environ 40 de fin de première, 20 de seconde, 10 de troisième et 10 de quatrième. En prévision des EGMO, Olympiades Européennes Féminines de Mathématiques, et de la JBMO, Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques, des bonifications ont été ajoutées pour favoriser les filles et les plus jeunes.

Le stage était structuré comme ceux des années précédentes : deux périodes de quatre jours (20 - 23 août et 24 - 27 août), trois de cours / exercices, un entraînement de type olympique le matin du quatrième jour (de 9h à 12h, ou, pour le groupe D, de 8h à 12h) et une après-midi récréative. Les élèves étaient répartis en 4 groupes A, B,C et D en fonction de leur expérience en mathématiques olympiques. Le programme est construit suivant ce qui est demandé lors des compétitions internationales : Arithmétique, Algèbre, Combinatoire et Géométrie.

En plus des cours étaient prévues, le soir, des conférences à vocation culturelle, permettant de découvrir de nouveaux pans des mathématiques. On remerciera alors Marc de Falco, professeur en classe préparatoire, qui est venu nous montrer comment « coder avec des dessins » ; Fabrice Planchon, de l'université de Nice, qui nous a parlé de « réflexions d'ondes » ; et Colin, qui nous a présenté les « pavages et papiers peints ».

L'après-midi après le premier entraînement fut organisée une chasse au trésor par Théodore et Maena où, pour trouver les indices menant au trésor, il fallait résoudre des énigmes mathématiques. L'après-midi du deuxième entraînement furent prévues des démonstrations de tours de magie. Il était aussi possible de jouer au foot ou au volley et, durant chaque jour du stage, de profiter de la piscine du Centre.

Enfin, grâce à l'association Provence Science Technique Jeunesse, furent proposées des soirées d'astronomie autour du télescope du CIV (télescope François-Giraud de 410 mm de diamètre) même si celles ci furent difficiles à organiser à cause de la météo.

Il est possible de retrouver les comptes rendus du stage au jour le jour sur le site de la POFM : `http://maths-olympiques.fr/?p=3022#more-3022`

Voici quelques liens utiles pour poursuivre le travail réalisé pendant ce stage :

— le site d'Animath : animath.fr ;

— le site de la POFM : maths-olympiques.fr et notamment

— les archives de problèmes (polycopiés etc. . .) : maths-olympiques.fr/?page_id=41 ;

- le site *Mathlinks* : mathlinks.ro ;
- le site *Art of Problem Solving* : artofproblemsolving.com.

		Groupe A	Groupe B
19 août	Soirée	Présentation du stage, de la POFM et des Olympiades Vincent J.	
20 août	Matin	Algèbre Rémi L.	Arithmétique Thomas L., Pierre-Marie E.
	Après-midi	Géométrie Mathieu B.	Combinatoire Yohann D.
	Soirée	Conférence : Programmer avec des dessins Marc de Falco	
21 août	Matin	Géométrie. Lucie W., Martin R., Mathieu B.	Combinatoire Théodore F.
	Après-midi	Algèbre Thomas L.	Arithmétique Colin D.
	Soirée	Conférence : Réflexion d'ondes Fabrice Planchon	
22 août	Matin	Géométrie Henry B.	Arithmétique Éva P., Rémi L.
	Après-midi	Algèbre Yohann D.	Combinatoire Maena Q.
	Soirée	Activités libres	
23 août	Matin	Session d'entraînement sur des exercices	
	Après-midi	Chasse au trésor	
	Soirée	Correction des exercices, soirée astronomie	
24 août	Matin	Arithmétique Théo L.	Algèbre Vincent J.
	Après-midi	Combinatoire Andrei B.	Géométrie Aline C.
	Soirée	Conférence : Pavage du plan et papier peint Colin D.	
25 août	Matin	Combinatoire Félix B., Andrei B.	Algèbre Victor V.
	Après-midi	Arithmétique Maena Q.	Géométrie Olivier G.
	Soirée	Présentation $\mathbb{TFJM}^2$ Victor V., Andrei B.	
26 août	Matin	Arithmétique Aline C.	Géométrie Auguste de L., Andrei B.
	Après-midi	Combinatoire Savinien K., Andrei B.	Algèbre Lilou W., Auguste de L.
	Soirée	Activités libres	
27 août	Matin	Session d'entraînement sur des exercices	
	Après-midi	Activités libres	
	Soirée	Correction des exercices, soirée astronomie	
28 août	Matin	Homothéties Martin R.	Accrochage stratégique de peintures Savinien K.
	Après-midi	Maths et magie Aline C.	Nombres complexes Timothée R.
	Soirée	Soirée de clôture	

		Groupe C	Groupe D
19 août	Soirée	Présentation du stage, de la POFM et des Olympiades Vincent J.	
20 août	Matin	Arithmétique Henry B.	Arithmétique Vincent J.
	Après-midi	Combinatoire Lucie L., Henry B.	Géométrie Martin R.
	Soirée	Conférence : Programmer avec des dessins Marc de Falco	
21 août	Matin	Combinatoire Vincent J.	Géométrie Pierre-Marie E.
	Après-midi	Arithmétique Théo L.	Arithmétique Rémi L.
	Soirée	Conférence : Réflexion d'onde Fabrice Planchon	
22 août	Matin	Arithmétique Mathieu B.	Arithmétique Raphaël D.
	Après-midi	Combinatoire Colin D.	Géométrie Pierre-Marie E.
	Soirée	Activités libres	
23 août	Matin	Session d'entraînement sur des exercices	
	Après-midi	Chasse au trésor	
	Soirée	Correction des exercices, soirée astronomie	
24 août	Matin	Algèbre Mathieu B.	Algèbre Éva P.
	Après-midi	Géométrie Olivier G.	Combinatoire Raphaël D.
	Soirée	Conférence : Pavage de plan et papier peint Colin D.	
26 août	Matin	Algèbre Savinien K.	Combinatoire Colin D.
	Après-midi	Géométrie Timothée R.	Algèbre Théodore F.
	Soirée	Présentation $\mathbb{TFJM}^2$ Victor V., Andrei B.	
27 août	Matin	Géométrie Martin R.	Combinatoire Timothée R.
	Après-midi	Algèbre Victor V.	Algèbre Félix B.
	Soirée	Activités libres	
28 août	Matin	Session d'entraînement sur des exercices	
	Après-midi	Activités libres	
	Soirée	Correction des exercices, soirée astronomie	
29 août	Matin	Dénombrabilité Victor V.	Équations fonctionnelles Paul C.
	Après-midi	Méthode probabiliste Théo L.	Découverte théorie des nombres Paul C.
	Soirée	Soirée de clôture	

II. Coupe Animath de printemps 2019

Le mercredi 29 mai 2019 avait lieu la coupe Animath de printemps. Parmi les 964 candidats, cinq candidats se sont distingués en particulier, puisqu'ils ont fini en première position pour leur catégorie d'âge. Les lauréats de la coupe Animath de printemps de 2019 sont donc :

— Daniel CORTILD (parmi les élèves de première) ;

— Aurélien FOURRÉ (parmi les élèves de seconde) ;

— Alec LE HELLOCO et Mano ETILE (parmi les élèves de troisième) ;

— Gaëtan DAUTZENBERG (parmi les élèves de quatrième).

– Énoncés destinés aux élèves de collège –

Exercice 1
Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la *partie entière* de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. On note $\{x\}$ sa *partie décimale*, c'est-à-dire $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Par exemple, on a $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ et $\{3.1\} = 3.1 - 3 = 0.1$. On a aussi $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ et $\{-2.7\} = -2.7 - (-3) = 0.3$.

Trouver tous les nombres réels x tels que $\lfloor x \rfloor \times \{x\} = 2019 \times x$.

Exercice 2
Combien y a-t-il de nombres à 8 chiffres dont l'écriture décimale est de la forme $ab2019cd$ avec $a > 0$, et qui sont divisibles par 360 ?

Exercice 3
Soit $ABCD$ un rectangle. Soient P un point sur le segment $[AB]$, et Q un point sur le segment $[BC]$. Les segments $[AQ]$ et $[DP]$ s'intersectent en X, les segments $[AQ]$ et $[CP]$ s'intersectent en Y et les segments $[CP]$ et $[DQ]$ s'intersectent en Z. On note respectivement a, b et c les aires du triangle APX, du triangle CQZ et du quadrilatère $BPYQ$.

Montrer que l'aire du quadrilatère $DXYZ$ vaut $a + b + c$.

– Énoncés destinés à tous –

Exercice 4
On considère une grande grille carrée de côté 10, découpée en petits carrés de côté 1. Deux petits carrés sont dits *voisins* si ils ont un côté commun. Sur chacun des petits carrés est inscrit un nombre réel positif. De plus, 5 grenouilles se déplacent sur la grille, et peuvent recouvrir

chacune un petit carré. Deux grenouilles ne recouvrent jamais le même carré. Entre deux instants, chaque grenouille saute du carré où elle se trouve vers un carré voisin.

On suppose que la somme des nombres visibles vaut 10 à l'instant 1, puis 10^2 à l'instant 2, puis 10^3 à l'instant 3, et ainsi de suite jusqu'à l'instant k où la somme vaut 10^k. Quelle est la plus grande valeur possible de k ?

Exercice 5
On rappelle (voir Exercice 1) que la partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.

Soit x un nombre réel positif. On suppose que $\lfloor x^2 \rfloor$, $\lfloor x^3 \rfloor$ et $\lfloor x^4 \rfloor$ sont des carrés d'entiers. Montrer qu'alors $\lfloor x \rfloor$ est aussi le carré d'un entier.

– Énoncés destinés aux élèves de lycée –

Exercice 6
Soit $ABCD$ un parallélogramme, et P un point à l'intérieur de $ABCD$ tel que $CP = CB$. On note M et N les milieux de $[AP]$ et $[CD]$. Montrer que les droites (BP) et (MN) sont perpendiculaires.

Exercice 7
Soit (u_n) une suite d'entiers telle que $u_1 > 0$ et, pour tout $n \geqslant 0$, le nombre u_{n+1} est la somme de u_n et de son plus grand diviseur excepté lui-même. Par exemple, si $u_n = 12$, alors $u_{n+1} = 12 + 6 = 18$.

Montrer qu'il existe N tel que, pour tout $n > N$, l'entier u_n est divisible par 3^{2019}.

Exercice 8
Soient m et n deux entiers impairs avec $m, n \geqslant 3$. Dans une grille $m \times n$, on colorie chaque petit carré en bleu ou en rouge. On note A le nombre de lignes où les carrés bleus sont majoritaires, et B le nombre de colonnes où les carrés rouges sont majoritaires.

Quelle est la plus grande valeur possible de $A + B$?

– Solutions –

Solution de l'exercice 1
Soit x une solution du problème. On note $n = \lfloor x \rfloor$ et $y = \{x\}$. On a alors n entier et $0 \leqslant y < 1$. L'équation se réécrit $ny = 2019(n + y)$, soit $(n - 2019)y = 2019n$. En particulier, si $n = 2019$, on obtient $0 = 2019^2$, ce qui est impossible, donc $y = \frac{2019n}{n-2019}$.

On distingue maintenant plusieurs cas selon la valeur de n. Si $n > 2019$, alors $2019n > n > n - 2019 > 0$, donc $y > 1$, ce qui est impossible. Si $0 < n < 2019$, alors $2019n > 0 > n - 2019$ donc $y < 0$, ce qui est aussi impossible. On doit donc avoir $n \leqslant 0$, donc on pose $n = -n'$ avec $n' \geqslant 0$. On a alors $y = \frac{-2019n'}{-n'-2019} = \frac{2019n'}{n'+2019}$.

Mais on a aussi $y < 1$, donc $2019n' < n' + 2019$, soit $2018n' < 2019$, donc $n' < \frac{2019}{2018}$, donc n' vaut 0 ou 1, donc n vaut 0 ou -1. Dans le premier cas, on a $y = 0$ donc $x = 0$. Dans le second cas, on a $y = \frac{2019}{2020}$, donc $x = -1 + \frac{2019}{2020} = -\frac{1}{2020}$. Il y a donc deux solutions, qui sont 0 et $-\frac{1}{2020}$.

Solution de l'exercice 2

Pour commencer, un nombre solution doit être divisible par 10, donc on doit avoir $d = 0$, et le nombre qui s'écrit $ab2019c$ doit être divisible par 36, donc par 4. Le nombre qui s'écrit $ab20100$ est divisible par 100 donc par 4, donc le nombre qui s'écrit $9c$ doit aussi être divisible par 4, donc c vaut 2 ou 6.

Enfin, le nombre doit être divisible 36 donc par 9, donc la somme de ses chiffres doit être divisible par 9, donc $a+b+2+0+1+9+c$ est divisible par 9, donc $a+b+c+3$ est divisible par 9, donc $a+b+c$ vaut 6 ou 15 ou 24 (la somme de trois chiffres ne peut pas dépasser 27).

Si $c = 2$, alors $a+b+c \leqslant 2+9+9 = 20$, donc $a+b+c$ vaut 6 ou 15, donc $a+b$ vaut 4 ou 13, ce qui donne les solutions suivantes :

$$13201920, 22201920, 31201920, 40201920,$$

$$49201920, 58201920, 67201920, 76201920, 85201920, 94201920.$$

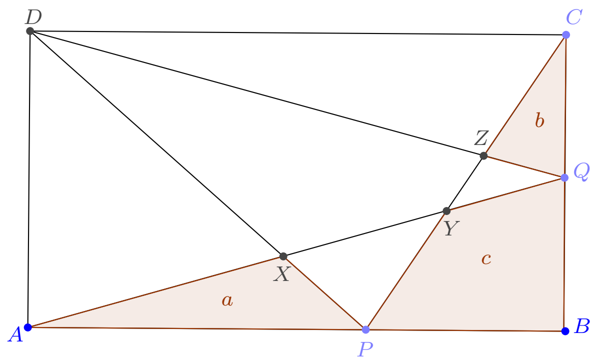
Si $c = 6$, comme $a > 0$, on a $a+b+c > 6$ donc $a+b+c$ vaut 15 ou 24, donc $a+b$ vaut 9 ou 18, ce qui donne les solutions suivantes :

$$18201960, 27201960, 36201960, 45201960, 54201960, 63201960, 72201960, 81201960, 90201960,$$

$$99201960.$$

On a donc au total 20 solutions.

Solution de l'exercice 3



On notera par exemple $\mathscr{A}_{ABC}$ l'aire du triangle ABC. On a alors

$$\begin{aligned} \mathscr{A}_{DXYZ} &= \mathscr{A}_{CDP} - \mathscr{A}_{CDZ} - \mathscr{A}_{PXY} = \mathscr{A}_{CDP} - (\mathscr{A}_{CDQ} - b) - (\mathscr{A}_{ABQ} - a - c) \\ &= a + b + c + \mathscr{A}_{CDP} - \mathscr{A}_{CDQ} - \mathscr{A}_{ABQ}. \end{aligned}$$

Or, on a

$$\mathscr{A}_{CDP} = \frac{1}{2} CD \times BC$$

et

$$\mathscr{A}_{CDQ} + \mathscr{A}_{ABQ} = \frac{1}{2} CD \times CQ + \frac{1}{2} AB \times BQ = \frac{1}{2} AB \times (CQ + BQ) = \frac{1}{2} AB \times BC = \mathscr{A}_{CDP},$$

d'où $\mathscr{A}_{DXYZ} = a + b + c$.

Solution de l'exercice 4

On va montrer que la plus grande valeur possible de k est 6. Vérifions tout d'abord que 6 est bien atteignable. Pour cela, on isole un rectangle de taille 2×3 en haut à gauche de la grille. Sur toutes les cases qui ne sont pas dans ce rectangle, on inscrit le nombre 0. Sur les cases du rectangle, on inscrit les nombres $10, 100, \ldots, 10^6$ comme suit :

10^3	10^4
10^2	10^5
10	10^6

À l'instant 1, les grenouilles occupent les 5 cases portant les nombres $10^2, \ldots, 10^6$, de sorte que seul le nombre 10 est visible (ainsi que tous les 0). Puis à l'instant 2, les grenouilles tournent dans le sens des aiguilles d'une montre, de sorte que 10^2 est visible (ainsi que les 0), et ainsi de suite... On a alors bien une configuration comme on voulait avec $k = 6$.

Montrons maintenant que $k > 6$ est impossible. Supposons $k \geqslant 7$. En passant de l'instant 1 à l'instant 2, au plus 5 nouveaux nombres sont révélés (les 5 qui étaient couverts à l'instant 1), et la somme des nombres visibles augmente de $10^2 - 10 = 90$. Par conséquent, la somme des nombres découverts entre l'instant 1 et l'instant 2 vaut au moins 90. Comme il y a au plus 5 nombres découverts, au moins un est plus grand que $90/5 = 18$. D'un autre côté, la somme des nombres visibles à l'instant 2 vaut 100, donc les nombres découverts ne dépassent pas 100, donc il y a une case portant un nombre entre 18 et 100. En raisonnant de même entre les instants 2 et 3, puis 3 et 4 et ainsi de suite jusqu'à 6 et 7, on trouve une case portant un nombre entre 180 et 1000, puis entre 1800 et 10000, et ainsi de suite jusqu'à 18×10^5 et 10^7. On a donc trouvé 6 cases supérieures à 18. Comme il n'y a que 5 grenouilles à l'instant 1, au moins une de ces cases était visible à l'instant 1 donc la somme valait au moins 18, d'où la contradiction.

Solution de l'exercice 5

Tout d'abord, si $x < 2$, alors $\lfloor x \rfloor$ vaut 0 ou 1, donc est un carré. Dans la suite, on supposera donc $x \geqslant 2$.

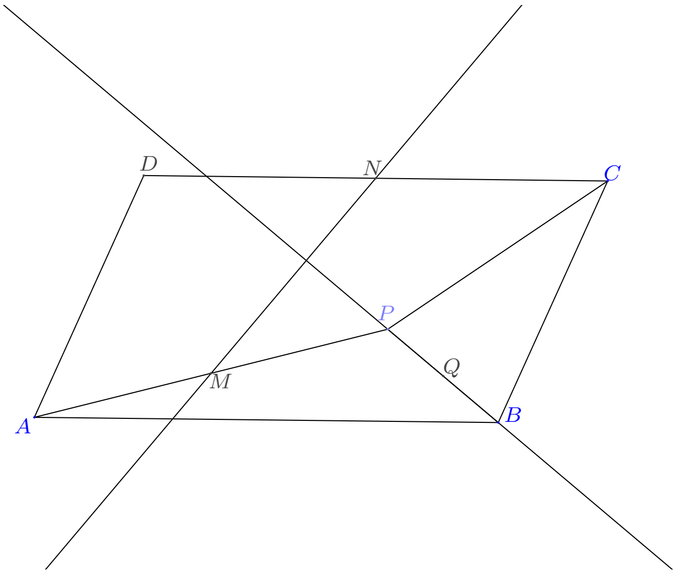
Soit $n \geqslant 0$ entier tel que $\lfloor x^2 \rfloor = n^2$. Notons que $x \geqslant 2$, donc $n \geqslant 2$. On commence par montrer que $\lfloor x^4 \rfloor = n^4$. En effet, par définition de la partie entière, on a $n^2 \leqslant x^2 < n^2 + 1$, donc $n^4 \leqslant x^4 < (n^2+1)^2$, donc $n^4 \leqslant \lfloor x^4 \rfloor < (n^2+1)^2$. La partie entière de x^4 est donc un carré d'entier compris entre $(n^2)^2$ et $(n^2+1)^2$, donc ça ne peut être que n^4.

On vérifie maintenant que $\lfloor x^3 \rfloor = n^3$. En effet, on a $x^2 \geqslant n^2$, donc $x^3 \geqslant n^3$. De plus, comme $\lfloor x^4 \rfloor = n^4$, on a $n^4 \leqslant x^4 < n^4 + 1$, donc

$$x^3 = \frac{x^4}{x} \leqslant \frac{n^4+1}{x} \leqslant \frac{n^4+1}{n} = n^3 + \frac{1}{n} < n^3 + 1,$$

où la dernière inégalité utilise $n \geqslant 2$. On en déduit $\lfloor x^3 \rfloor = n^3$. Par hypothèse, le nombre n^3 est donc le carré d'un entier, donc n en est un aussi.

Solution de l'exercice 6



On note Q le milieu de $[BP]$. Le triangle BCP étant isocèle en C, la droite (CQ) est la médiatrice de $[BP]$, donc elle est perpendiculaire à (BP). Il suffit donc de montrer que (CQ) est aussi parallèle à (MN). Pour cela, on va montrer que $CNMQ$ est en fait un parallélogramme.

D'après le théorème de la droite des milieux, la droite (QM) est parallèle à (AB), donc aussi à (CD), c'est-à-dire (CN). De plus, toujours d'après le théorème de la droite des milieux, on a

$$QM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = CN.$$

Le quadrilatère $CNMQ$ est donc bien un parallélogramme, donc (MN) est parallèle à (CQ), et donc perpendiculaire à (BP).

Solution de l'exercice 7

Dans toute la solution, on notera $d(n)$ le plus grand diviseur de n exepté n, de sorte que $u_{n+1} = u_n + d(u_n)$. Commençons par deux remarques assez simples. Premièrement, si u_n est impair, alors $d(u_n)$ doit être impair aussi, donc u_{n+1} est pair. Deuxièmement, si u_n est pair, alors $d(u_n) = \frac{u_n}{2}$, donc $u_{n+1} = 3\frac{u_{n+1}}{2}$ est divisible par 3.

Ces deux remarques assurent qu'il existe dans la suite un terme u_N divisible par 3, soit $u_N = 3k$, avec $k \geqslant 3$ quitte à attendre assez longtemps. Supposons dans un premier temps que k est impair, soit $k = 2\ell + 1$. Alors le plus grand diviseur non trivial de u_N est $2\ell + 1$, donc

$$u_{N+1} = 3(2\ell + 1) + 2\ell + 1 = 4(2\ell + 1)$$

puis

$$u_{N+2} = 4(2\ell + 1) + 2(2\ell + 1) = 6(2\ell + 1),$$

puis

$$u_{N+3} = 6(2\ell + 1) + 3(2\ell + 1) = 9(2\ell + 1) = 3 \times 3(2\ell + 1),$$

où $3(2\ell+1)$ est impair. En répétant le même argument, on obtient $u_{N+6} = 3^3(2\ell+1)$, puis $u_{N+9} = 3^4(2\ell+1)$ et ainsi de suite. On peut donc décrire tous les termes de la suite à partir de u_N, et à partir d'un certain rang tous les termes seront divisibles par 3^{2019}.

Supposons maintenant que k est pair. On peut alors écrire $k = 2^\alpha(2\ell+1)$, où 2^α est la plus grande puissance de 2 qui divise k. On a alors $u_N = 3 \times 2^\alpha \times (2\ell+1)$, donc

$$u_{N+1} = 3 \times 2^\alpha \times (2\ell+1) + \frac{1}{2} 3 \times 2^\alpha \times (2\ell+1) = 3^2 \times 2^{\alpha-1} \times (2\ell+1),$$

puis

$$u_{N+2} = 3^3 \times 2^{\alpha-2} \times (2\ell+1),$$

et ainsi de suit jusqu'à

$$u_{N+\alpha} = 3^{1+\alpha} \times (2\ell+1) = 3 \times 3^\alpha(2\ell+1),$$

où $3^\alpha(2\ell+1)$ est impair. On est donc ramené au cas décrit plus haut, ce qui permet de conclure.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

On va montrer que la valeur recherchée vaut $m+n-2$. Cette valeur peut toujours être atteinte par la construction suivante, où les B représentent des cases bleues et les A des cases rouges.

$$\begin{array}{ccccccc} B & B & B & B & A & A & A \\ B & B & B & B & A & A & A \\ A & A & A & A & A & A & A \\ A & A & A & B & B & B & B \\ A & A & A & B & B & B & B \end{array}$$

On a pris ici $m = 5$ et $n = 7$, mais cet exemple se généralise aisément à m et n impairs quelconques. Les bleus sont majoritaires dans toutes les lignes sauf celle du milieu, et les rouges sont majoritaires dans toutes les colonnes sauf celles du milieu, donc $A = m-1$ et $B = n-1$, donc $A + B = m+n-2$.

Il reste à montrer qu'il est impossible d'atteindre $m+n-1$. Notons que $m+n$ est impossible car si $A = m$ et $B = n$, alors les bleus sont majoritaires dans chaque ligne donc il y a plus de bleus que de rouges au total, mais les rouges sont majoritaires dans chaque colonne, ce qui est absurde.

Si $A + B = m+n-1$, supposons sans perte de généralité que $A = m$ et $B = n-1$. Alors les bleus sont majoritaires dans toutes les lignes, donc il y a au moins $\frac{n+1}{2}$ bleus dans chaque ligne, soit $\frac{m(n+1)}{2}$ cases bleues au total, et donc au plus $\frac{m(n-1)}{2}$ cases rouges.

D'un autre côté, il y a $n-1$ colonnes où les rouges sont majoritaires, chacune contenant au moins $\frac{m+1}{2}$ cases rouges, donc il y a au moins $\frac{(n-1)(m+1)}{2}$ cases rouges au total. On en déduit

$$\frac{m(n-1)}{2} \geqslant \text{nombre de cases rouges} \geqslant \frac{(m+1)(n-1)}{2},$$

ce qui est impossible (car $n > 1$), donc on ne peut pas atteindre $m+n-1$.

III. Groupe A

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre et géométrie

1 Introduction aux maths (Rémi Lesbats)

Ce cours a été quasiment intégralement repris sur celui de Franck de l'année dernière, en retirant la dernière partie intitulée « Inégalités » Certains exercices ont été ajoutés. Ce cours peut être retrouvé page 24 du polycopié suivant :

http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/02/stage_ete_2018.pdf

2 Boîte à outils du géomètre (Mathieu Barré)

Le cours a repris en partie le cours de chasse aux angles donné au groupe B lors du stage olympique de Montpellier en 2016 (disponible ici). Les notions qui furent effectivement traitées sont :

— Angles alternes-internes, angles correspondants

— Somme des angles d'un triangle, d'un quadrilatère (avec preuve)

— Triangle isocèle

— Théorème de l'angle au centre (avec preuve)

— Théorème de l'angle inscrit (avec preuve)

— Triangle rectangle, théorème de Thalès anglais (avec preuve)

— Cocyclicité, théorème de Fifi (preuve du sens direct) $\rightarrow$ Exercice 1

— Théorème de l'angle inscrit : cas limite $\rightarrow$ Exercice 2

— Triangles semblables (définition, propriétés métriques) $\rightarrow$ Exercice 3

Exercices

Exercice 1
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en A et B. Une droite d passant par A coupe Γ_1 en P et Γ_2 en Q. De même, une droite d' passant par B recoupe Γ_1 en P' et Γ_2 en Q'. Montrer que les droites (PP') et (QQ') sont parallèles.

Exercice 2
Soient A, B, C et D quatre points cocycliques. On note E l'intersection des droites (AB) et (CD). La tangente en D au cercle circonscrit de ADE recoupe (BC) en F. Montrer que DCF est isocèle en F.

Exercice 3
(puissance d'un point par rapport à un cercle) Soit $\mathcal{C}$ un cercle et P un point à l'extérieur de $\mathcal{C}$. Deux droites partant de P recoupent $\mathcal{C}$ en A, B et en C, D respectivement. Montrer que $PA.PB = PC.PD$. Que devient ce résultat si P est à l'intérieur du cercle ?

Exercice 4
Soient A, B, C et D quatre points cocycliques. On note respectivement A' et C' les projetés

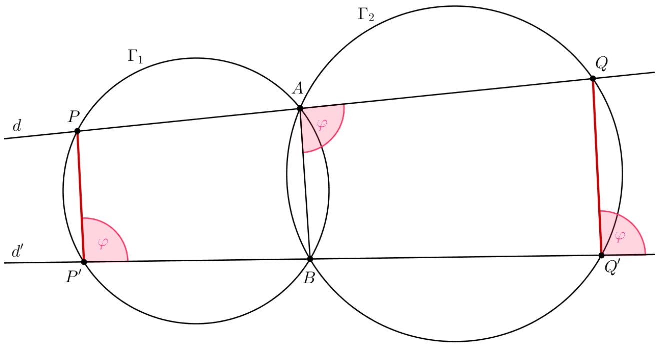
orthogonaux de A et C sur (BD), et B' et D' les projetés orthogonaux de B et D sur (AC). Montrer alors que A', B', C' et D' sont également cocycliques.

Exercice 5
Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Soient H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de B et C. Prouver que $(H_BH_C) \perp (AO)$.

Exercice 6
Soit $ABCD$ un trapèze circonscriptible, avec (AB) // (CD) et $AB > CD$. Le cercle inscrit au triangle ABC est tangent aux côtés $[AB]$ et $[AC]$ en M et N respectivement. Montrer que le centre du cercle inscrit à $ABCD$ appartient à la droite (MN).

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
La chasse aux angles classiques figure sur le dessin ci-dessous.



En rédigeant avec les angles orientés, on écrit

$$\begin{aligned}(P'B, P'P) &= (AB, AP) \text{ car } A, B, P' \text{ et } P \text{ sont cocycliques}\\ &= (AB, AQ) \text{ car } P, A \text{ et } Q \text{ sont alignés}\\ &= (Q'B, Q'Q) \text{ car } A, B, Q' \text{ et } Q \text{ sont cocycliques}\\ &= (P'B, Q'Q) \text{ car } P', B \text{ et } Q' \text{ sont alignés}\end{aligned}$$

ce qui signifie bien que (PP') et (QQ') sont parallèles puisqu'on peut écrire

$$(P'P, Q'Q) = (P'P, P'B) + (P'B, Q'Q) = -(P'B, Q'Q) + (P'B, Q'Q) = 0$$

Solution de l'exercice 2
La droite (DF) étant tangente en D au cercle circonscrit à ADE, le théorème de l'angle inscrit (cas limite) permet d'affirmer que $\widehat{EDF} = \widehat{EAD}$. Par ailleurs, les points A, B, C et D étant cocycliques, le théorème de Fifi fournit : $\widehat{BAD} = \widehat{DCF}$. Ainsi, $\widehat{DCF} = \widehat{CDF}$ donc FCD est isocèle en F.

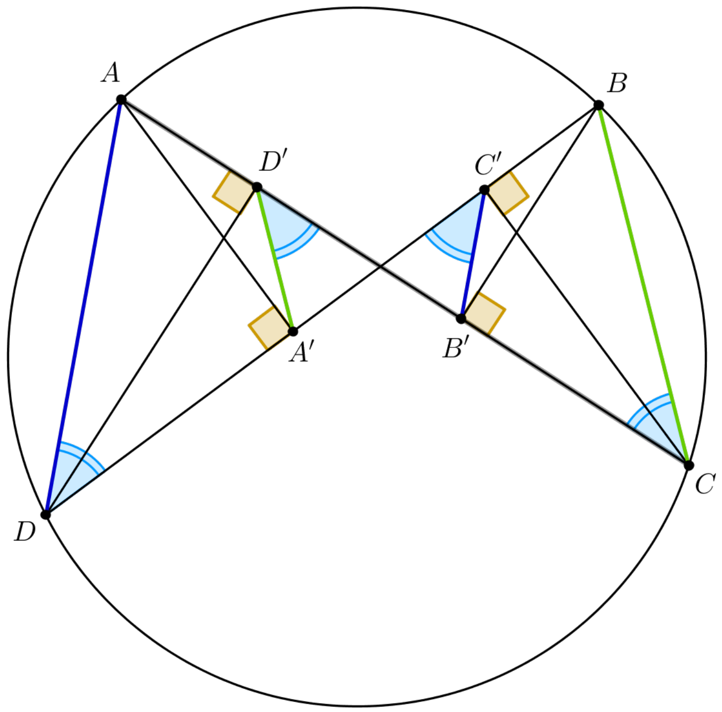
Solution de l'exercice 3

Réécrivons l'égalité à prouver sous la forme d'un ratio de longueur pour nous rapprocher de la propriété métrique des triangles semblables : $PA.PB = PC.PD \Leftrightarrow \frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$. Cette écriture suggère de montrer que $PAC \sim PDB$, ce qui est une conséquence du théorème de Fifi. Le résultat reste vrai si P est à l'intérieur du cercle. C'est alors le théorème de l'angle inscrit qu'on utilise pour montrer que $PAC \sim PDB$.

Solution de l'exercice 4

Puisque $\widehat{AD'D} = \widehat{AA'D} = 90$, le théorème de l'angle inscrit permet d'affirmer que A, D, A' et D' sont cocycliques. On obtient de la même façon que B, C, B' et C' sont cocycliques.

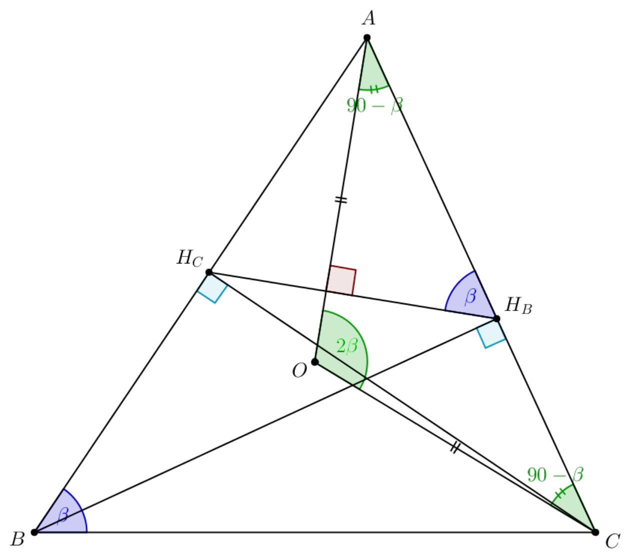
On en déduit alors que $(DA', DA) = (D'A', D'A)$ car A, D, A' et D' sont cocycliques et que $(CB, CB') = (C'B, C'B')$ car B, C, B' et C' sont cocycliques. Or, A, B, C et D étant cocycliques, nous savons que $(DB, DA) = (CB, CA)$ et l'alignement des points D, A' et B d'une part et de C, B' et A d'autre part fait que cette dernière égalité se réécrit $(DA', DA) = (CB, CB')$. Finalement, on en conclut que $(D'A', D'A) = (C'B, C'B')$ soit $(D'A', D'B') = (C'A', C'B')$, ce qui démontre que A', B', C' et D' sont cocycliques.



Solution de l'exercice 5

Les triangles BH_BC et BH_CC étant respectivement rectangles en H_B et H_C, le théorème de l'angle inscrit nous dit que B, C, H_B et H_C sont cocycliques, d'où on tire que $(BC, BH_C) = (H_BC, H_BH_C)$ soit $(BC, BA) = (H_BA, H_BH_C)$.

D'autre part, le théorème de l'angle au centre indique que $(OC, OA) = 2(BC, BA)$. Le triangle AOC étant isocèle en O, on en déduit que $(AO, AH_B) = (AO, AC) = 90 - (BC, BA)$.



La relation de Chasles donne finalement

$$(AO, H_BH_C) = (AO, H_BA) + (H_BA, H_BH_C) = 90 - (BC, BA) + (BC, BA) = 90$$

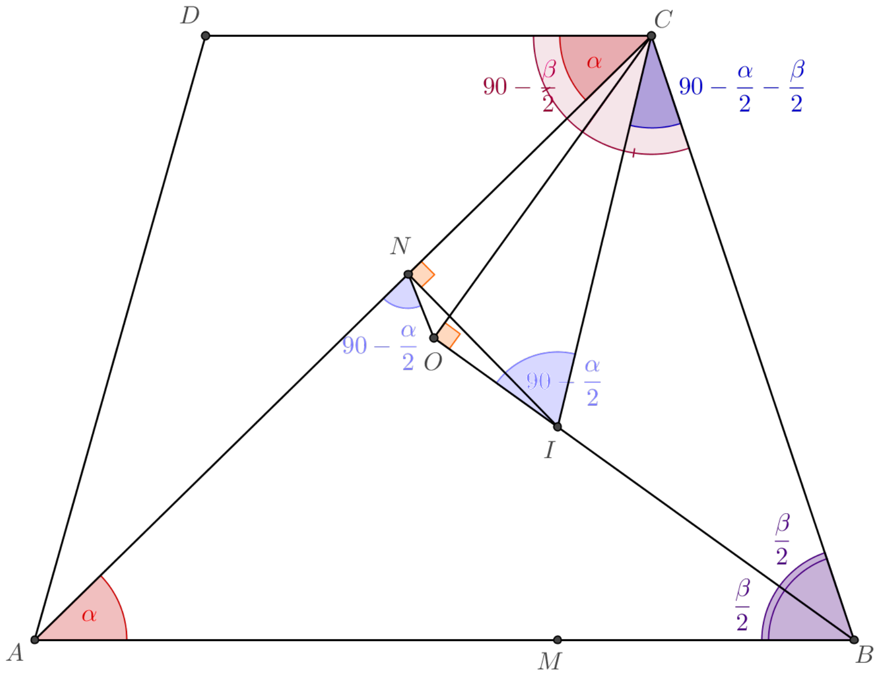
Solution de l'exercice 6
Le triangle AMN étant isocèle en A, $(NA, NM) = 90 - \frac{(AB,AC)}{2}$. Pour prouver que N, O et M sont alignés, il suffit donc de montrer que $(NA, NO) = 90 - \frac{(AB,AC)}{2}$.

$ABCD$ étant un trapèze, $(CD, CB) = 180 - (BC, BA)$. Puisque O est le centre du cercle inscrit à $ABCD$, on a $(CO, CB) = \frac{(CD,CB)}{2} = 90 - \frac{(BC,BA)}{2}$. De plus, I étant le centre du cercle inscrit à ABC, $(BC, BI) = \frac{(BC,BA)}{2}$. On en déduit alors que

$$\begin{aligned}(OB, OC) &= (OB, BC) + (BC, OC) \text{ par la relation de Chasles}\\ &= -(BC, OB) - (OC, BC)\\ &= -(BC, BI) - (CO, CB) \text{ car } B, I \text{ et } O \text{ sont alignés}\\ &= -90 \text{ d'après les calculs faits précedemment}\\ &= 90 \text{ par définition modulo 180 des angles orientés}\end{aligned}$$

Par ailleurs, par définition du point N, $(IN) \perp (AC)$. Ainsi, $(OB, OC) = (NI, NC)$, si bien que N, O, I et C sont cocycliques d'après le théorème de l'angle inscrit. On sait alors que $(NA, NO) = (IC, IO)$. Pour conclure, on calcule enfin

$$\begin{aligned}(IC, IO) &= (IC, BC) + (BC, BI) \text{ d'après la relation de Chasles}\\ &= \frac{(CA, CB)}{2} + \frac{(BC, BA)}{2} \text{ par définition du point I}\\ &= \frac{(CA, BA)}{2} \text{ encore par Chasles}\\ &= 90 - \frac{(AB, AC)}{2}\end{aligned}$$



3 TD (Lucie Wang, Martin Rakovsky, Mathieu Barré)

Chasse aux angles

Exercice 1
Soit k un cercle de centre O et ABC sur k avec $\widehat{ABC} > 90$. La bissectrice de $\widehat{AOB}$ coupe le cercle circonscrit au triangle BOC une deuxième fois en D. Montrer que D se trouve sur (AC).

Exercice 2
Deux cercles ω_1 et ω_2 se coupent en M et N distincts. Une droite t est tangente à ω_1 en P et à ω_2 en Q de sorte que t est plus proche de N que de M. (PN) recoupe ω_2 en R. Montrer que $\widehat{PMQ} = \widehat{QMR}$.

Exercice 3
Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit. La tangente à Γ en A coupe (BC) en D. La bissectrice de $\widehat{CDA}$ coupe (AB) en E et (AC) en F. Montrer que : $AE = AF$.

Exercice 4
(non abordé en groupe). Soient Γ et Γ' deux cercles tangents en T, Γ' étant à l'intérieur de Γ. Soit B un point de Γ' autre que T, on note M et N les points d'intersection de la tangente à Γ' en B avec Γ. Montrer que : $\widehat{BTM} = \widehat{BTN}$.

Triangles semblables

Exercice 5
(puissance d'un point par rapport à un cercle).

Soit Γ un cercle, P un point à l'extérieur de Γ. Deux droites passant par P recoupent Γ en A, B, et C, D respectivement. Montrer que : $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. Que dire de ce résultat si on prend P à l'intérieur du cercle ?

Exercice 6
Soit ABC un triangle rectangle en C et D le pied de la hauteur issue de C. Montrer les relations d'Euclide :

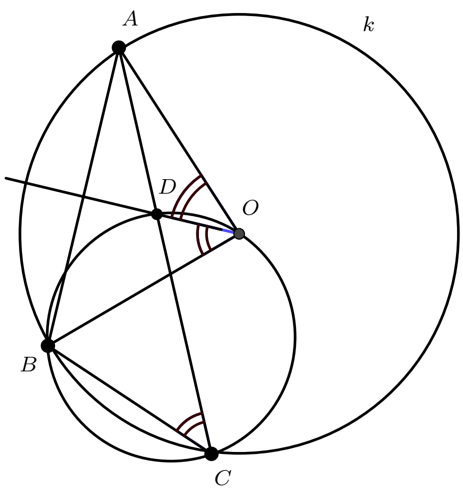
- $CD^2 = AD \cdot BD$
- $CB^2 = BD \cdot AB$
- $AC^2 = AD \cdot AB$

Exercice 7
(premier théorème de Miquel)**.**
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2, s'intersectant en deux points X et Y. Soit A un point de Γ_1 distinct de X et Y, on note B l'intersection de (AY) et Γ_2. Montrer que les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.

Exercice 8
Dans un parallélogramme $ABCD$, on prend un point M sur la diagonale (AC). De M on trace une perpendiculaire à (AB), elle coupe (AB) en un point E. De même, la perpendiculaire à (AD) passant par M coupe (AD) en un point F. Démontrer que : $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$.

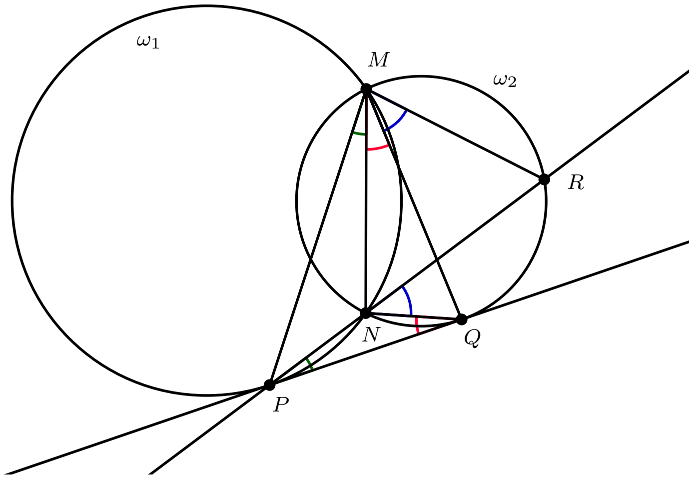
Solution des exercices

Solution de l'exercice 1



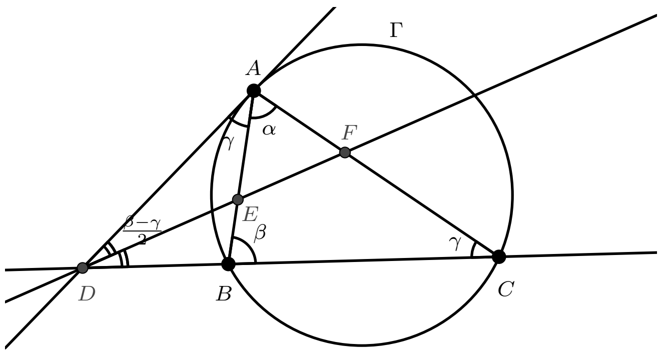
Pour obtenir A, D, C alignés, il suffit de montrer que : $\widehat{BCA} = \widehat{BCD}$.
D'une part, le théorème de l'angle inscrit dans le cercle B, C, D, O donne : $\widehat{BCD} = \widehat{BOD}$. D'autre part, dans le cercle k, par le théorème de l'angle au centre : $\widehat{BCA} = \frac{1}{2}\widehat{BOA} = \widehat{BOD}$, car (OD) bissecte $\widehat{AOB}$. On a bien : $\widehat{BCA} = \widehat{BCD}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2



Pour décomposer l'angle $\widehat{PMQ}$, traçons la corde commune $[MN]$ aux deux cercles ω_1 et ω_2. Alors on peut appliquer le cas limite du théorème de l'angle inscrit : $\widehat{PMN} = \widehat{NPQ}$ et : $\widehat{NMQ} = \widehat{NQP}$, d'où : $\widehat{PMQ} = \widehat{NPQ} + \widehat{NQP}$. D'autre part, $\widehat{QMR} = \widehat{QNR}$ dans le cercle ω_2. Il reste à voir que : $\widehat{NPQ} + \widehat{NQP} = \widehat{QNR}$, ce qui est vrai car : $\widehat{QNP} = 180° - \widehat{NPQ} - \widehat{NQP} = 180° - \widehat{QNR}$.

Solution de l'exercice 3

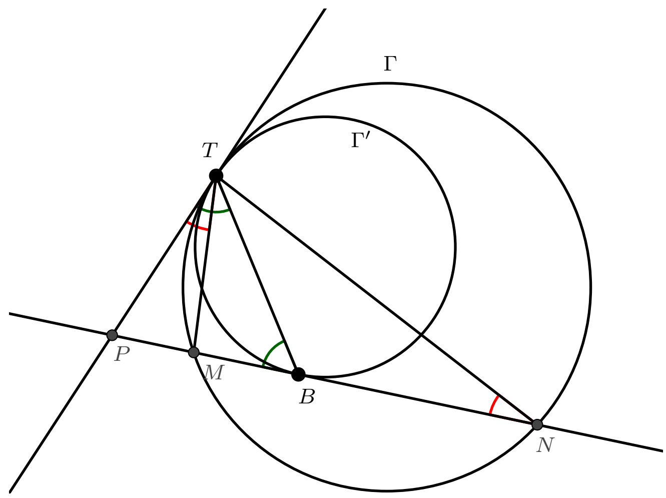


Soient α, β, γ les angles du triangle ABC (notation générique). On suppose sans perte de généralité que D, B, C sont alignés dans cet ordre ($\beta > \gamma$), quitte à intervertir B et C.
Par le cas limite de l'angle inscrit : $\widehat{BAD} = \gamma$, d'où : $\widehat{CDA} = \widehat{ABC} - \widehat{BAD} = \beta - \gamma$. Il vient alors :

$$\widehat{AEF} = \widehat{EAD} + \widehat{ADE} = \gamma + \frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{\beta + \gamma}{2} = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Ainsi, le triangle AEF a pour angles : $\widehat{EAF} = \alpha$ et : $\widehat{AEF} = \widehat{AFE} = 90° - \frac{\alpha}{2}$, d'où : $AE = AF$.

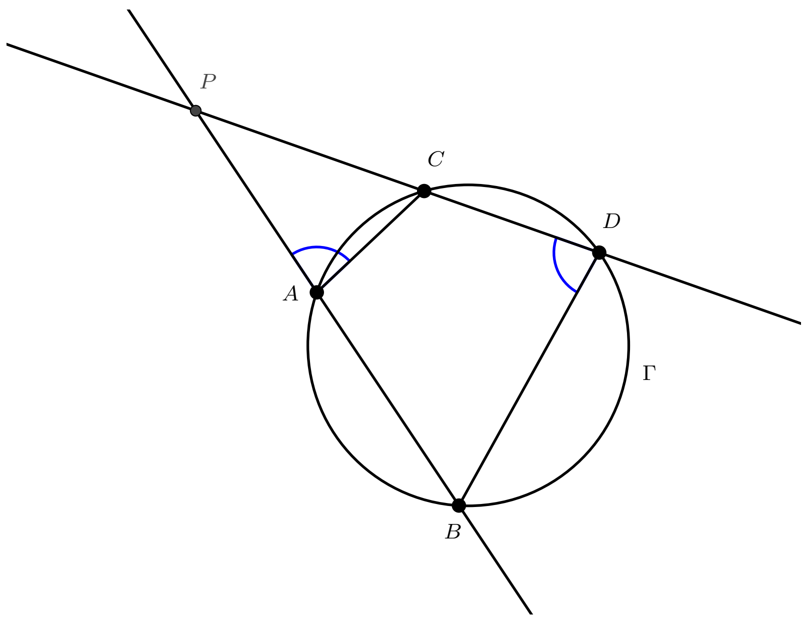
Solution de l'exercice 4



Soit P le point d'intersection des tangentes à Γ' en B et en T, supposons sans perte de généralité que les points P, M, B, N sont alignés dans cet ordre. En appliquant le cas limite de l'angle inscrit dans Γ et Γ', on a :

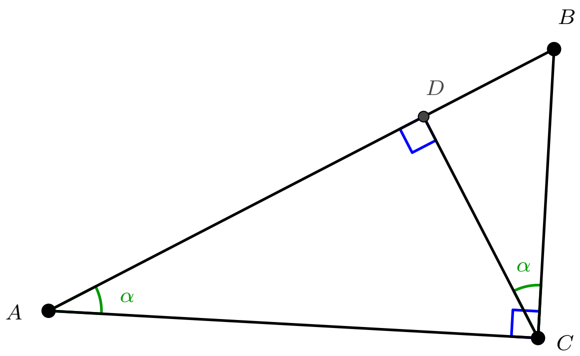
$$\widehat{BTM} = \widehat{BTP} - \widehat{MTP} = \widehat{PBT} - \widehat{MNT} = \widehat{BTN}.$$

Solution de l'exercice 5



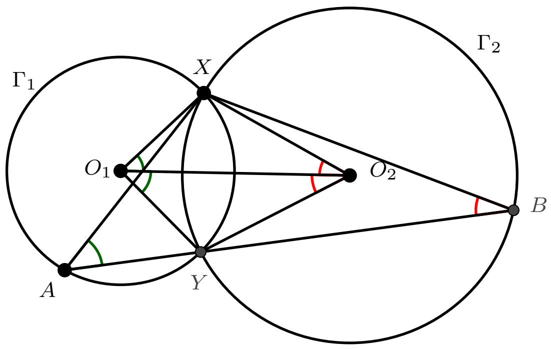
Commençons par réécrire l'égalité souhaitée comme une égalité de rapports : $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$. Dans le cas où P est à l'extérieur du cercle : le lemme $\varphi\varphi$ (voir cours précédent de Mathieu) nous permet d'écrire : $\widehat{PAC} = \widehat{PDB}$. De plus, les angles $\widehat{APC}$ et $\widehat{DPB}$ sont confondus. Ainsi, les triangles PAC et PDB sont semblables. Il en découle l'égalité voulue : $\frac{PA}{PC} = \frac{PD}{PB}$.

Solution de l'exercice 6



Procédons par chasse aux angles, afin d'identifier des triangles semblables dans la figure. Appelons α l'angle $\widehat{BAC}$. Les triangles ABC et ACD partagent un angle (en A) et ont un angle droit ($\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADC}$ respectivement), ils sont donc semblables. On en déduit la troisième égalité : $AC^2 = AD \cdot AB$.
Dans le triangle BCD, on retrouve un angle droit et : $\widehat{BCD} = 90° - \widehat{CBD} = 90° - \widehat{CBA} = \alpha$. Ainsi, CBD est semblable à ABC et à ACD. De CBD semblable à ABC, on tire la première égalité : $CB^2 = BD \cdot AB$; de CBD semblable à ACD, on tire : $CD^2 = AD \cdot BD$.

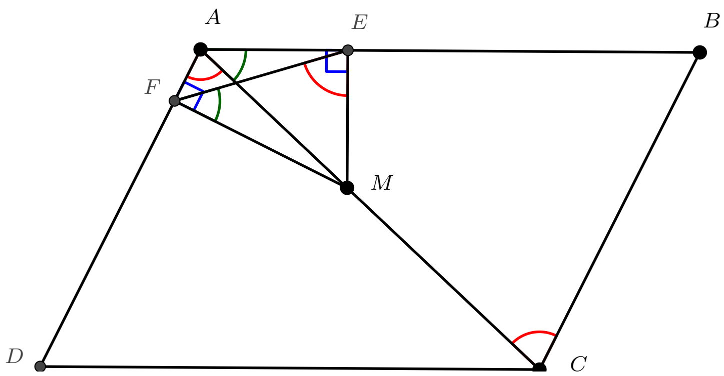
Solution de l'exercice 7



Procédons par chasse aux angles, afin de montrer que les triangles XO_1O_2 et XAB ont les mêmes angles.
En posant : $\alpha = \widehat{XAY}$, on trouve : $\widehat{XO_1Y} = 2\alpha$ grâce au théorème de l'angle au centre. Or, la figure (excepté les points A et B) étant symétrique par rapport à l'axe (O_1O_2), on en déduit que : $\widehat{XO_1O_2} = \alpha = \widehat{XAY}$. De même, on montre que : $\widehat{XO_2O_1} = \widehat{XBA}$, ce qui conclut.

Remarque 1.
On remarque au passage que, pour deux cercles de centres O_1 et O_2 s'intersectant en deux points X et Y, les droites (O_1O_2) et (XY) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 8



On va calculer les angles du triangle MEF, dans l'espoir de trouver un triangle qui lui est semblable.
D'après les angles droits en E et en F, les points A, E, F, M sont tous sur le cercle de diamètre $[AM]$. D'une part : $\widehat{EFM} = \widehat{EAM} = \widehat{BAC}$, d'autre part : $\widehat{FEM} = \widehat{FAM} = \widehat{DAC} = \widehat{ACB}$ (car $(AD)//(BC)$). Les triangles MEF et BCA sont semblables, d'où : $\frac{ME}{MF} = \frac{BC}{BA} = \frac{AD}{AB}$.

4 Récurrence, inégalités (Thomas Leplumey)

L'objectif de ce cours était de découvrir le principe de récurrence et de s'initier aux inégalités.

La partie sur le principe de récurrence est directement issu du cours de récurrence groupe A dans le poly de stage de 2018 (III.3.2, page 50) : http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/02/stage_ete_2018.pdf

La partie sur les inégalités est directement issue du cours d'inégalités groupe A de Mathieu Barré dans le poly de stage de 2017 (V.2.1 - Inégalités, page 43) : http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/10/stage_ete_2017.pdf

5 TD (Henry Bambury)

– Géométrie : Les points du triangle –

Centre de gravité

On note A', B', C' les milieux des côtés du triangle ABC. Soit G l'intersection des médianes (AA'), (BB'), (CC').

Exercice 1
Pour quels triangles (AA') est-elle une hauteur ?

Solution de l'exercice 1
Dans ce cas (AA') coupe BC perpendiculairement en son milieu, c'est donc une médiatrice, le triangle est isocèle en A. La réciproque est rapidement vérifiée.

Exercice 2
Pour quels triangles la longueur de la médiane AA' est-elle la égale à la longueur de la hauteur correspondante ?

Solution de l'exercice 2
On note D le pied de la hauteur. DAA' est donc isocèle avec deux angle droits, les droites sont confondues et le triangle ABC isocèle en A. La réciproque est facile.

Exercice 3
Redémontrer le théorème de la droite des milieux et sa réciproque sans utiliser Thalès.

Solution de l'exercice 3
Dans un sens, introduire le point symétrique à B' par rapport à B. Dans l'autre, introduire le point D tel que $B'CBD$ soit un parallélogramme.

Exercice 4
Quelle est l'aire du triangle $A'B'C'$ en fonction de celle du triangle initial ABC ?

Solution de l'exercice 4
On trouve 4 triangles semblables grâce aux angles alternes-internes. Les triangles extérieurs ont tous un côté commun avec le triangle central. Ils sont donc de même aire, donc l'aire de ABC est 4 fois celle de $A'B'C'$.

Exercice 5
En raisonnant sur les aires des 6 petits triangles obtenus en traçant les médianes, montrer qu'elles sont concourrantes.

Solution de l'exercice 5
On trace AA' et BB'. Soit P leur intersection. Montrons que CP coupe AB en C'. On note Q l'intersection de AB et CP. On note a, b, c, d, e, f les aires de APB', $B'PC$, CPA', $A'PB$, BPQ, QPA. En remarquant que certains triangles ont la même hauteur et une base égale, on obtient : $a+b+c=d+e+f$, $a+f+e=b+c+d$, $a=b$, $c=d$. Ainsi $a=b=c=d$. On calcule ensuite le rapport des aires de AQC et BQC puis AQP et BQP. Par la formule base fois hauteur ils sont égaux. Avec les aires on obtient $\frac{b+a+f}{c+d+e}=\frac{f}{e}$. Cela suffit à conclure que $a=b=c=d=e=f$, d'où $Q=C'$.

Exercice 6
Montrer que $\widehat{A'AC}=\widehat{ABB'}$ si et seulement si $\widehat{AC'C}=\widehat{AA'B}$.

Solution de l'exercice 6
Il suffit de remarquer que si $\widehat{AC'C}=\widehat{AA'B}$, $BA'GC'$ est circonscriptible, donc $\widehat{C'BG}=\widehat{C'A'G}$. Ensuite $(C'A')$ étant parallèle à (AC), le théorème des angles alternes internes permet de conclure.

Exercice 7
Calculer le ratio $\frac{AG}{GA'}$.

Solution de l'exercice 7
On introduit les droites parallèles aux côtés du triangle et passant par le sommet opposé. On le note $A''B''C''$, on remarque que A, B, C sont les milieux des côtés de ce nouveau triangle. $B''AG$ est semblable à $BA'G$. On a de plus $2BA'=B''A$. Ainsi le facteur de grandissement est de 2. C'est le ratio recherché.

Exercice 8
Démontrer la relation

$$AB^2+AC^2=\frac{BC^2}{2}+2AA'^2$$

.

Solution de l'exercice 8
On introduit H le pied de la hauteur issue de A. $AC^2 = AH^2 + CH^2$ et $AB^2 = AH^2 + BH^2$ et $AH^2 + HA'^2 = AA'^2$. En combinant ces égalités, on obtient le résultat voulu.

Centre du cercle inscrit

On note D, E, F les intersections des bissectrices avec les côtés du triangle ABC. Soit I l'intersection des bissectrices (AD), (BE), (CF).

Exercice 9
La perpendiculaire à (BC) passant par D passe-t-elle par I ?

Solution de l'exercice 9
Non, sauf si le triangle est isocèle.

Exercice 10
Construire I à la règle et au compas.

Solution de l'exercice 10
Il suffit de construitre deux bissectrices. Pour celà, on génère en piquant le compas sur A un triangle isocèle APQ où $P \in AB$ et $Q \in AC$. On pique ensuite le compas en P puis Q en conservant le même écartement pour obtenir un nouveau point R sur la médiatrice de PQ. Celle-ci se trouve aussi être la bissectrice de $\widehat{A}$.

Exercice 11
Montrer que les bissectrices sont concourrantes.

Solution de l'exercice 11
Comme pour G, on trace les bissectrices issues de A et B. On pose P leur intersection. P est sur la bissectrice en A donc équidistant de AB et AC. De même P est équidistant de AB et BC. Ainsi P est équidistant de BC et AC. Il est donc sur la bissectrice issue de C. Donc $P = I$.

Exercice 12
Exprimer le rayon du cercle inscrit en fonction des côtés du triangle s'il est rectangle en C.

Solution de l'exercice 12
On note X, Y et Z les intersections du cercle inscrit avec les côtés, dans l'ordre alphabétique correspondant aux sommets. On pose $x = AY = AZ$, $y = BX = BZ$ et $r = CX = CY$. On a ensuite $r = \frac{1}{2}((x+r) + (y+r) - (x+y)) = \frac{1}{2}(AC + CB - AB)$.

Exercice 13
Soit S l'intersection de la bissectrice issue de A avec le cercle circonscrit, et O le centre de ce dernier. Montrer que (OS) et (BC) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 13
$ABCS$ est dans un cercle. Donc $\widehat{BAS} = \widehat{BCS}$ et $\widehat{SAC} = \widehat{SBC}$. Donc SBC est isocèle en S. S est donc sur la médiatrice de BC, tout comme O.

Centre du cercle circonscrit

On note O l'intersection des médiatrices et et D, E, F leurs pieds.

Exercice 14
Montrer que $\widehat{ABH} = \widehat{CBO}$.

Solution de l'exercice 14
On note α l'angle en A. Par angle au centre, $\widehat{COB} = 2\alpha$, puis comme O est à équidistance de B et C, $\widehat{CBO} = 90 - \alpha$. D'autre part, on a directement $\widehat{ABH} = 90 - \alpha$.

Exercice 15
Calculer OA dans le cas d'un triangle équilatéral en fonction du côté.

Solution de l'exercice 15
On trouve $\frac{AB}{\sqrt{3}}$.

Exercice 16
Montrer que les médiatrices sont concourrantes.

Solution de l'exercice 16
Comme pour I, on trace les médiatrices de AB et BC. On pose P leur intersection. P est sur la médiatrice de AB donc équidistant de A et B. De même P est équidistant de B et C. Ainsi P est équidistant de A et C. Il est donc sur la médiatrice de AC. Donc $P = O$.

Exercice 17
Montrer la loi des sinus :

$$\frac{AB}{\sin \widehat{C}} = \frac{BC}{\sin \widehat{A}} = \frac{CA}{\sin \widehat{B}}$$

Quel rapport ces rapports ont-ils avec le rayon du cercle circonscrit ?

Solution de l'exercice 17
On se place dans DOB. Comme $\widehat{DOB} = \widehat{A}$, ainsi $\sin(\widehat{A}) = \frac{DB}{OB} = \frac{BC}{2R}$ ie $\frac{BC}{\sin(\widehat{A})} = 2R$. De même des deux autres côtés, comme $2R$ reste constant, la relation est vérifiée.

Orthocentre

On note D, E, F les pieds des hauteurs et H leur intersection.

Exercice 18
Dans quels triangles a-t-on $O = H$?

Solution de l'exercice 18
Les médiatrices et hauteurs assossiées à un même côté sont parallèles. Ainsi pour avoir $O = H$, elles doivent être nécessairement confondues, le triangle devient équilatéral.

Exercice 19
Trouver six quadrilatères circonscriptibles dans la figure.

Solution de l'exercice 19
$ABDE, BCEF, CAFD, AFDE, BDEF, CEFD.$

Exercice 20
Le triangle DEF est appelé triangle orthique. Calculer ses angles. Que dire de H par rapport à ce triangle ?

Solution de l'exercice 20
En utilisant la cocyclicité de $AFDE$, $BDEF$ et $CEFD$, on trouve $\widehat{EFH} = \widehat{HFD} = 90 - \widehat{C}$, $\widehat{FEH} = \widehat{DEH} = 90 - \widehat{B}$ et $\widehat{EDH} = \widehat{FDH} = 90 - \widehat{A}$.

Exercice 21
En déduire que les hauteurs sont bien concourrantes.

Solution de l'exercice 21
On en déduit que H est l'intersection des bissectrices de EFD. Celles-ci étant concourrantes, on en déduit que les hauteurs le sont aussi.

Exercice 22
Que dire de A par rapport à BCH ? Trouver 4 triangles qui ont le même triangle orthique.

Solution de l'exercice 22
A est l'orthocentre de BCH. ABC, ABH, ACH, BCH ont le même triangle orthique.

Exercice 23
On construit un triangle à partir des parallèles aux côtés du triangle qui passent par les sommets opposés. Montrer ainsi d'une autre façon que les hauteurs d'un triangle concourrent.

Solution de l'exercice 23
Cette fois ci, on a directement que H est le centre du cercle circonscrit au grand triangle. On conclut par concourrance des médiatrices.

Exercice 24
Montrer que $BD \times DC = AD \times HD$ et $AH \times HD = BH \times HE = CH \times HF$

Solution de l'exercice 24
Il s'agit de reformuler la question pour trouver des triangles semblables et déduire le résultat des rapports qui en découlent. En montrant que ABD et HCD sont semblables, $\frac{BD}{AD} = \frac{HD}{CD}$, d'où la première égalité. En montrant que DEH et BAH sont semblables, $\frac{AH}{BH} = \frac{HE}{HD}$, d'où la deuxième égalité. En montrant que HAC et HFD sont semblables, $\frac{AH}{CH} = \frac{HF}{HD}$, d'où la dernière égalité.

6 TD manipulations algébriques, récurrence (Yohann D'Anello)

Le but de ce cours était de renforcer les notions découvertes lors des jours précédents, sans introduire de nouvelles choses. Seule la récurrence double a été présentée.

Exercices

Exercice 1
Montrer que la somme des n premiers entiers impairs vaut n^2.

Exercice 2
Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, la somme des angles intérieurs d'un polygone non croisé à n côtés est de $(n-2) \times 180°$.

Exercice 3
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 1 \\ u_1 &= 4 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n \end{cases}$$

Montrer que pour tout entier naturel n, $u_n = 2 \times 3^n - 2^n$.

Exercice 4
Soit x un réel non nul tel que $x + \frac{1}{x} = \sqrt{2019}$. Que vaut $x^2 + \frac{1}{x^2}$?

Exercice 5 (*Non traité en cours*)
Soit x un réel non nul tel que $x + \frac{1}{x}$ soit entier. Montrer que pour tout entier naturel n, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier.

Exercice 6

— Montrer que pour tout réel strictement positif x : $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$. Chercher le·s cas d'égalité.

— Montrer que pour tous réels strictement positifs a et b : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$. Chercher le·s cas d'égalité.

— Déterminer le minimum pour a et b deux réels non nuls de :

$$\frac{a^6}{b^6} + \frac{a^4}{b^4} + \frac{a^2}{b^2} + \frac{b^6}{a^6} + \frac{b^4}{a^4} + \frac{b^2}{a^2}.$$

et chercher là où il est atteint.

Exercice 7
Quels sont les entiers k tels que l'identité suivante soit toujours vraie quelque soient les réels a, b et c?

$$(a+b)(b+c)(c+a) = (a+b+c)(ab+bc+ca) + kabc$$

Exercice 8
Soit a et b des réels tels que $a + b = 7$ et $ab = 5$. Que vaut $a^3 + b^3$? On ne cherchera pas à expliciter a et b.

Exercice 9
Résoudre pour a et b réels :

$$a + b < ab + 1$$

Exercice 10
Soit $a > b > 0$. Montrer que $4a^3(a - b) \geq a^4 - b^4$.

Exercice 11 (*Non traité en cours*)
Montrer que pour tout $a,\ b$ réels :

$$a^2 + b^2 + 2(a - 1)(b - 1) \geq 1.$$

Exercice 12 (*Non traité en cours*)
Soit $n \geq 2$. Montrer que $n^4 + n^2 + 1$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 13
Montrer que pour tous réels a, b strictement positifs, on a :

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geq 2^{n+1}$$

Exercice 14 (Bonus)
Montrer que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n-1} \geq n(\sqrt[n]{2} - 1).$$

Solutions

Solution de l'exercice 1
Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ ».

— Initialisation : $1 = 1^1$ donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée. (*On aurait pu aussi initialiser à 0 mais cela peut être plus difficile à comprendre*)

— Hérédité : Soit n un entier tel que $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée, montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est également. $1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$ car par hypothèse de récurrence, $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Par principe de récurrence, on a montré que la somme des n premiers entiers impairs vaut n^2.

Solution de l'exercice 2
Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : « La somme des angles intérieurs de tout polygone non croisé à n côtés est $(n - 2)\pi$ rad = $(n - 2) \times 180°$ ».

— Initialisation : On sait que la somme des angles d'un triangle vaut $180°$ (vu en cours de géométrie), donc la propriété $\mathcal{P}_3$ est vraie.

— Hérédité : Soit n un entier tel que $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée, et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est également. Considérons un polygone non croisé à $n+1$ côtés. Considérons trois sommets consécutifs, disons A, B et C. Retirons le point B et considérons le polygone formé par l'arête $[AC]$ et le reste du polygone initial. C'est un polygone non croisé à n côtés : la somme de ses angles intérieurs vaut donc par hypothèse de récurrence $(n-2)\pi$. Réintroduisons désormais le point B. On doit ajouter les angles $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$. Or le polygone ABC est un triangle, donc la somme de ses angles vaut $180°$. La somme totale des angles de notre polygone initial est donc $(n-2)\times 180° + 180° = (n-1)\times 180°$: c'est ce que nous voulions.

Par principe de récurrence, on a montré que la somme des angles d'un polygone non croisé à n sommets valait $180°$.

Solution de l'exercice 3

Montrons cette propriété par récurrence double.

— Initialisation : $u_0 = 1 = 2\times 3^0 - 2^0$ donc l'égalité est établie au rang 0.
$u_1 = 1 = 2\times 3^1 - 2^1$ donc l'égalité est établie au rang 1.

— Hérédité : Soit n un entier tel que l'égalité soit établie aux rangs n et $n+1$ et montrons-la au rang $n+2$.

$$\begin{aligned}u_{n+2} &= 5u_{n+1} - 6u_n\\ &= 5(2\times 3^{n+1} - 2^{n+1}) - 6(2\times 3^n - 2^n) \quad \text{(Hypothèse de récurrence)}\\ &= 30\times 3^n - 10\times 2^n - 12\times 3^n + 6\times 2^n\\ &= 18\times 3^n - 4\times 2^n\\ &= 2\times 3^{n+2} - 2^{n+2}\end{aligned}$$

Ce qui est nous voulions.

Par principe de récurrence double, on a montré que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\times 3^n - 2^n$.

Solution de l'exercice 4

On a $2019 = \left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$, donc $x^2 + \frac{1}{x^2} = 2017$.

Solution de l'exercice 5

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété « $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier ». Raisonnons par récurrence double pour montrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

— Initialisation : Les propriétés $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiées par hypothèse.

— Hérédité : Soit n un entier tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vérifiées, et montrons que $\mathcal{P}_{n+2}$ l'est également. Notons que :

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right) = x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} + x^n + \frac{1}{x^n}$$

Donc $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+1}}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)$ est entier car tous les termes le sont par hypothèse de récurrence : c'est exactement $\mathcal{P}_{n+2}$.

Par principe de récurrence (double), on a montré que si $x + \frac{1}{x}$ est entier, alors $x^n + \frac{1}{x^n}$ l'est également pour tout entier naturel n.

Solution de l'exercice 6

— Puisque x doit être strictement positif, l'inégalité est équivalente à $x^2 - 2x + 1 \geq 0$, soit $(x-1)^2 \geq 0$ ce qui est toujours vrai, avec égalité si et seulement si $x = 1$.

— Il suffit d'appliquer la question précédente à $x = \frac{a}{b}$, et on a égalité si et seulement si $a = b$.

— On a $\frac{a^6}{b^6} + \frac{b^6}{a^6} \geq 2$, $\frac{a^4}{b^4} + \frac{b^4}{a^4} \geq 2$ et $\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} \geq 2$ donc en sommant le tout, le minimum de l'expression vaut 6, avec égalité si et seulement si $a = b$.

Solution de l'exercice 7
En développant :

$$(a+b)(b+c)(c+a) = abc + aba + acc + aca + bbc + bba + bcc + bca$$
$$(a+b+c)(ab+bc+ca) = aab + abc + aca + bab + bbc + bca + cab + cbc + cca$$

En substituant les deux égalités, on obtient $2abc = 3abc - kabc$ ce qui donne $k = -1$. Le calcul assure que cette solution fonctionne.

Solution de l'exercice 8
On a $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, donc $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 7^3 - 3 \cdot 5 \cdot 7 = 7(49 - 15) = 7 \times 34 = 238$.

Solution de l'exercice 9
L'inégalité est équivalente à $ab - a - b + 1 > 0$, soit $(a-1)(b-1) > 0$. Ainsi, $(a-1)$ et $(b-1)$ doivent être non nuls et de même signes. Les solutions de cette inéquation sont alors les couples (a, b) tels que soit $a > 1$ et $b > 1$, soit $a < 1$ et $b < 1$.

Solution de l'exercice 10
On rappelle que $a^4 - b^4 = (a-b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$. Puisque $a > b$, on a $a - b > 0$ et l'inégalité est équivalente à $4a^3 \geq a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ en divisant par $a - b$. Or $a > b > 0$ donc $a^3 > b^3$, $a^3 > ab^2$ et $a^3 > a^2b$. En sommant toutes les inégalités, on obtient bien $4a^3 > a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$, et donc on a l'inégalité souhaitée.

Solution de l'exercice 11
L'inégalité est équivalente à $a^2 + 2ab + b^2 - (a+b) + 1 \geq 0$ en développant, c'est-à-dire $(a+b)^2 - (a+b) + 1 \geq 0$. Posons alors $x = a + b$, on veut montrer $x^2 - x + 1 \geq 0$. Or $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ qui est toujours strictement positif.

Solution de l'exercice 12
On a $n^4 + n^2 + 1 = (n^2+1)^2 - n^2 = (n^2+n+1)(n^2-n+1)$ en appliquant les diverses identités remarquables. Or si $n \geq 2$, $n^2 + n + 1 > 1$ et $n^2 - n + 1 > 1$ car $n^2 > n$, donc $n^4 + n^2 + 1$ admet une décomposition en produit d'entiers et n'est pas premier.

Solution de l'exercice 13
Par inégalité arithmético-géométrique, on a $\dfrac{\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n}{2} \geq \sqrt{\left(1+\frac{a}{b}\right)^n \left(1+\frac{b}{a}\right)^n}$. Or

$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 4$ d'après l'exercice 6, donc $\sqrt{\left(1+\frac{a}{b}\right)^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n}\geq\sqrt{4^n}=2^n$. En multipliant par 2 des deux membres de l'inégalité, on obtient le résultat souhaité.

Solution de l'exercice 14
L'inégalité équivaut à :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\left(1+\frac{1}{2n-1}\right)\geq\sqrt[n]{2}.$$

Par inégalité arithmético-géométrique, cette expression est supérieure ou égale à $\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1} 1+\frac{1}{n+k}}=\sqrt[n]{\prod_{k=0}^{n-1}\frac{n+k+1}{n+k}}$. Or, le produit se télescope et est égal à $\frac{n+(n-1)+1}{n}=2$, d'où l'inégalité voulue.

2 Entraînement de mi-parcours

– Énoncés –

Exercice 1
Soit $n \geqslant 1$ un entier. Montrer que $2^n \geqslant n$.

Exercice 2
Soit $\mathcal{C}$ un cercle, (d) une droite coupant $\mathcal{C}$ en B et C. Soit A un point de $\mathcal{C}$ distinct de B et C, et (t) la tangente à $\mathcal{C}$ en A. On note E l'intersection de (d) et (t). La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en D. Montrer que ADE est isocèle.

Exercice 3
Soit x un réel positif. Montrer que $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \geqslant 5x^2$.

Exercice 4
Soient A, B, C, D et E cinq points dans cet ordre sur un cercle, vérifiant $AB = BC$ et $CD = DE$. On appelle respectivement P, Q et T l'intersection des droites (AD) et (BE), (AC) et (BD), (BD) et (CE).

a) Montrer que A, B, P et Q sont cocycliques.

b) Montrer que le triangle PQT est isocèle.

– Solutions –

Solution de l'exercice 1
On peut procéder par récurrence. L'initialisation se fait à $n = 1$. On a $2^1 = 2 \geqslant 1$. Pour l'hérédité, on suppose la popriété vraie à un rang n fixé : $2^n \geqslant n$. On veut la montrer au rang $n+1$. On écrit : $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \geqslant 2n$ par hypothèse de récurrrence. Ensuite, on constate que $2n = n + n \geqslant n + 1$ d'après l'énoncé. Finalement, $2^{n+1} \geqslant n + 1$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2
On note α l'angle $\widehat{ACD}$, et β l'angle $\widehat{CAD}$. Comme (Δ) est la tangente à $\mathcal{C}$ en A, on a $\widehat{ACD} = \widehat{BAE} = \alpha$, d'après le théorème de l'angle tangent. De plus, $\widehat{DAC} = \widehat{DAB} = \beta$, car (AD) est la bissectrice de $\widehat{CAB}$. En sommant les deux relations obtenues, on obtient $\widehat{DAE} = \alpha + \beta$. D'autre part, dans le triangle ACD, on a $\widehat{ADC} = 180° - \widehat{ACD} - \widehat{CAD} = 180° - \alpha - \beta$. Ainsi, $\widehat{ADE} = 180° - \widehat{ADC} = \alpha + \beta$. Finalement, $\widehat{DAE} = \widehat{ADE}$, donc ADE est isocèle en E.

Solution de l'exercice 3

— Première solution : On applique directement l'IAG :

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \geqslant 5\sqrt[5]{1 \cdot x \cdot x^2 \cdot x^3 \cdot x^4} = 5x^2$$

— Deuxième solution : On regroupe les termes deux par deux pour appliquer l'IAG. On a $1 + x^4 \geqslant 2\sqrt{x^4} = 2x^2$, et de même $x + x^3 \geqslant 2\sqrt{x \cdot x^4} = 2x^2$. En sommant ces deux inégalités, on obtient $1 + x + x^3 + x^4 \geqslant 4x^2$, d'où le résultat en ajoutant x^2 de chaque côté.

Solution de l'exercice 4

Les points A, B, C et D étant cocycliques, le théorème de l'angle inscrit nous permet d'écrire $(BC, BD) = (AC, AD)$. Puisque D est le milieu de l'arc $\widehat{CE}$, le théorème du pôle Sud affirme que $(BC, BD) = (BD, BE)$. Les deux résultats précédents, combinés à l'alignement des points B, P et E d'une part et B, Q, T et D d'autre part, donnent $(AQ, AP) = (BQ, BP)$, ce qui démontre que les points A, B, P et Q sont cocycliques. On prouve de la même façon que les points E, D, P et T sont cocycliques.

On a ainsi $(AB, AP) = (QT, QP)$ et $(EP, ED) = (TP, TQ)$. Mais $(AB, AP) = (EP, ED)$ car A, B, D et E sont cocycliques, d'où $(QT, QP) = (TP, TQ)$. Le triangle PQT est donc isocèle en P.

3 Deuxième partie : Arithmétique et combinatoire

1 Notions de base d'arithmétique (Théo Lenoir)

Le cours proposé est directement issu du cours d'arithmétique de la POFM, chapitre 2. Pendant le cours ont été vus la notion de divisibilité, l'algorithme d'Euclide, la notion de PGCD et le théorème fondamental de l'arithmétique. http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/arith_base.pdf

2 Principe des tiroirs (Andrei Barbu)

Intitulé

Si on place $n+1$ chaussettes dans n tiroirs, il y aura au moins un tiroir contenant au moins deux chaussettes !

Applications pour bien comprendre !

Exercice 1
Combien de personnes faut-il pour être certain qu'il en existe au moins deux ayant le même jour d'anniversaire ?

Exercice 2
J'ai dans un tiroir 12 chaussettes blanches, 14 vertes et 15 rouges, combien faut-il que j'en prenne pour être sûr d'en avoir au moins deux de la même couleur ?

Exercice 3
Il y a trois réels entre 0 et 1, montrer qu'on peut en trouver deux, a et b tels que $a - b \leqslant 0.5$.

Exercice 4
Le plan est colorié en rouge et bleu, prouver qu'il existe deux points de la même couleur à distance x, quel que soit x un réel.

Solution de l'exercice 1
Tiroirs : Jours d'anniversaire, Chaussettes : personnes, donc on a besoin d'une personne de plus que de jours possibles : 367 personnes.

Solution de l'exercice 2
Tiroirs : Couleurs, Chaussettes : chaussettes, on a besoin d'une chaussette de plus que de couleurs donc 4 chaussettes.

Solution de l'exercice 3
On veut que deux nombres dans le même tiroir soient à une distance plus petite que $0,5$. On crée donc deux tiroirs : $[0;0,5]$ et $[0,5;1]$. Les chaussettes sont les nombres.

Solution de l'exercice 4
On fixe x, on va montrer la propriété pour n'importe quel x.

On veut montrer que deux points seront de la même couleur. Les tiroirs seront donc les couleurs. Comme il y en a deux, on a besoin de trois points respectant la propriété : « ils sont à distance x ». On trace donc un triangle équilatéral de coté x. Les trois sommets sont les tiroirs.

Exercices pour bien s'entraîner !

Exercice 5
Montrer que parmi les élèves du stage, il en existe 2 qui connaissent le même nombre de personnes. La connaissance est une relation réciproque.

Exercice 6
On dispose 6 points dans le plan. On trace tous les segments possibles entre ces points. On colorie chaque segment en bleu ou rouge. Montrer qu'il existe un triangle dont tous les segments sont de même couleur.

Exercice 7
Le plan est colorié en 3 couleurs, montrer qu'on peut trouver un rectangle dont les sommets sont de la même couleur.

Exercice 8
On place 5 points dans un triangle équilatéral de coté 1. Montrer que deux sont à distance moins de 0.5.

Exercice 9
On place 51 points dans un carré de côté 1, montrer qu'on peut en recouvrir 3 avec un disque de rayon $\frac{1}{7}$.

Exercice 10
On place $2n + 1$ points dans le plan tels que pour tous trois points il y en ait deux à distance inférieure à 1. Montrer qu'on peut en recouvrir $n + 1$ avec un disque de rayon 1.

Exercice 11 (Exercice de transition)
Soient 5 points à coordonnées entières, montrer qu'il en existe deux tels que le milieu du segment les reliant soit lui aussi à coordonnées entières.

Solution de l'exercice 5
On veut montrer que deux élèves respectent le même propriété, les élèves seront donc les chaussettes. Quels seront les tiroirs ? Le nombre de connaissances. Un élève peut connaître entre 0 et $n - 1$ élèves (on ne se connaît jamais soi même !). Cela fait n tiroirs. Cependant on peut éliminer un tiroir en remarquant qu'il ne peut pas à la fois y avoir un élève connaissant tout le monde et un élève ne connaissant personne, ce qui conduit à n'avoir plus que $n - 1$ tiroirs.

Solution de l'exercice 6
Partons d'un sommet S. Parmi les 5 arêtes partant de S, il y en a au moins trois ayant la même couleur A. Il suffit maintenant de les considérer ainsi que le triangle formé par les extrémités de ces trois arêtes. Si le triangle n'est pas entièrement de couleur B alors il y a une arête de couleur A et forme un triangle de couleur A avec les arêtes partant de S.

Solution de l'exercice 7
Cet exercice peut être résolu sur une grille, donc également dans le plan puisque celle-ci est contenue dans le plan.

Sur une première ligne verticale (l_1) on peut trouver une infinité de points (intersections de la grille) de la même couleur, par le principe des tiroirs. On nomme cette couleur A, on ne s'intéresse plus qu'à l'infinité de lignes horizontales de la grille qui passent par un des points de la couleur A appartenant à (l_1).

On regarde une deuxième ligne verticale (l_2), on peut trouver une infinité de points d'une même couleur. Si cette couleur est la couleur A, on a une infinité de rectangles avec des sommets de la couleur A, on rappelle qu'on ne considère que des points « en face » des points de couleur A de (l_1).

Si ces points sont tous de couleur B on ne s'intéresse plus qu'à l'infinité de lignes horizontales passant à la fois par les points de couleur A sur (l_1) et ceux de couleur B sur $l(l_2)$.

On regarde les intersections de cette droite avec une troisième droite verticale (l_3). Par le même raisonnement, il y a une infinité de points de la même couleur sur cette droite et si ils sont de couleur A ou B on a fini.

Si ils sont de couleur C, on peut rappliquer le même raisonnement et conclure en regardant une dernière droite verticale (l_4). On remarque que le raisonnement peut montrer qu'il existe une infinité de rectangles avec les sommets de la même couleur, si il y a un nombre fini de couleurs.

Solution de l'exercice 8
De la même façon qu'à l'application 3, on veut créer des tiroirs de façon à ce que deux points dans le même tiroir soient à distance inférieure à $0,5$. Il y a 5 points, il y a fort à parier qu'on doit créer 4 tiroirs. On reformule donc : Comment découper un triangle équilatéral de coté 1 en 4, de façon à créer des aires où la distance maximale est $0,5$? On relie les milieux des cotés et la condition est remplie.

Solution de l'exercice 9
On découpe le carré de coté 1 en 49 carrés de coté $\frac{1}{7}$. Un tel carré est entièrement recouvrable par un disque de rayon $\frac{1}{7}$ car sa diagonale vaut $\sqrt{2} \times \frac{1}{7} < 2 \times \frac{1}{7}$ qui est le diamètre du disque. De plus, comme il y a 51 points à placer, il y a au moins un petit carré qui contient au moins 2 points.

Solution de l'exercice 10
On a besoin de deux tiroirs. Considérons deux points A et B à distance supérieure à 1, si ils n'existent pas la propriété est vérifiée : on peut bien tous les recouvrir avec un cercle de rayon 1. Si ils existent, tout troisième point sera à distance inférieure à un de l'un ou de l'autre. On peut donc tracer les disques de centres A et B de rayon 1. Ces disques contiennent tous les points, ce sont nos deux tiroirs : l'un des deux contient donc au moins $n+1$ des points.

Solution de l'exercice 11
Les coordonnées du milieu du segment $[AB]$ sont $(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2})$. Colorions les points avec leurs deux coordonnées paires en bleu, ceux avec leur deux coordonnées impaires en rouge, ceux avec l'abscisse paire et l'ordonnée impaire en vert et ceux avec leur abscisse impaire et leur ordonnée paire en jaune. Le milieu du segment reliant deux points de la même couleur a des coordonnées entières. Comme il y a 5 points et 4 couleurs, on en trouvera deux de la même couleur.

Exercices pour bien se tester !

Exercice 12
Un pâtissier confectionne au moins une pâtisserie par jour. Sur une période de 30 jours, il

confectionne au total 45 pâtisseries. Montrer qu'il existe une période de jours consécutifs où il a confectionné exactement 14 pâtisseries.

Exercice 13
Considérons 50 points dans le plan, trois jamais alignés. Ces points sont coloriés en 4 couleurs. Montrer qu'il existe une couleur telle que les points coloriés en cette couleur forment au moins 130 triangles non isocèles.

Solution de l'exercice 12
On nomme p_1, p_2 … p_{30} le nombre de pâtisseries confectionnées chaque jour. On nomme $i_j = p_1 + p_2 + \ldots + p_j$, le nombre de pâtisseries confectionnées jusqu'au jour j inclus. On considère les 60 nombres $i_1, i_2, \ldots, i_{30}, i_1 + 14, i_2 + 14, \ldots, i_{30} + 14$. Ils valent entre 1 et 59. Par le principe des tiroirs il y en a deux égaux. Cependant comme le pâtissier fabrique au moins une pâtisserie par jour, $i_j < i_{j+1}$ donc tous les i_j sont différents, de même, les $i_j + 14$ sont tous différents. Ainsi les deux nombres égaux ne peuvent être que i_{j+d} et $i_j + 14$. On peut donc dire qu'entre les jours $j + 1$ et $j + d$, il a confectionné 14 pâtisseries.

Solution de l'exercice 13
Cf C2 JBMO shortlist 2007

– Coloriages –

Exercice 14
Peut-on paver un échiquier 8×8 dont on a retiré les coins opposés avec des dominos 1×2 ?

Exercice 15
Peut-on paver un échiquier 3×3 avec des pièces en **L** qui recouvrent trois cases ?

Exercice 16
Peut-on paver un échiquier 10×10 avec des tetraminos en forme de **T** ? Et avec des tetraminos en forme de **L** ? Et de **I** ?

Exercice 17
Peut-on paver un échiquier 8×9 avec des pièces 6×1 ?

Exercice 18
Six nids sont placés en cercle et dans chacun des nids il y a un oiseau ? Toutes les nuits chaque oiseau s'en va vers un nid voisin. Est-il possible que tous les oiseaux se retrouvent dans un même nid après un nombre fini de nuits ?

Exercice 19
Sur les cases d'un échiquier $n \times n$, il y a des hérissons sur chaque case. Toutes les secondes, les hérissons bougent sur une cas adjacente en diagonale. Quel est le nombre minimum de cases occupées à tous les coups ?

Exercice 20
Un échiquier 4×4 est colorié entièrement en blanc à l'exception d'une case qui est noire.

On a le droit aux opérations suivantes : inverser les couleurs de toutes les cases d'une colonne ou d'une ligne. Pour quelles position de la case est-il possible de se retrouver avec toutes les cases de la même couleur ?

Même question si on a maintenant le droit d'inverser les couleurs d'une diagonale également (n'importe quelle diagonale).

Solution de l'exercice 14
On colorie l'échiquier comme un échiquier (!). Les coins opposés sont de la même couleur, disons noir, il y a donc deux cases noires de moins que de cases blanches. Or un domino pave exactement une case noire et une case blanche. Il est donc impossible de paver l'échiquier avec ces dominos.

Solution de l'exercice 15
On colorie les 4 coins du carré. Un **L** ne peut recouvrir qu'un coin à la fois, cependant on doit utiliser trois **L** car il y a neuf cases à paver.

Solution de l'exercice 16
Avec des tetraminos en forme de **T**.

On colorie l'échiquier en "échiquier" en alternant les cases noires et blanches. Un pièce couvre soit une soit trois cases noires. Si on pouvait paver l'échiquier on utiliserait 25 pièces, on couvrirait donc un nombre impair de cases noires au total. C'est une contradiction car dans notre coloriage on a un nombre pair de cases noires.

Avec des tetraminos en forme de **L**.

Le coloriage va exploiter le même argument de parité. On colorie les colonnes en entier en alternant colonne noire et colonne blanche. De la même façon on a qu'une pièce recouvre un nombre impair de cases noires et qu'il y a 50 cases noires au total.

Avec des tetraminos en forme de **I**.

L'idée ici est différente : on cherche un coloriage où une pièce recouvre exactement une case noire. Numérotons les colonies de 1 à 10 et les lignes de A à J. On colorie des diagonales de droite à gauche et haut en bas. On colorie les diagonales suivantes : celle commençant par la case $1A$ et finissant sur la $10J$, celle de $5A$ à $10F$, celle de $1E$ à $6J$, celle de $9A$ à $10B$ et enfin celle de $1I$ à $2J$. Toute pièce couvre exactement une case et il y a 26 cases ainsi coloriées. Or il faut utiliser 25 pièces.

Solution de l'exercice 17
Même idée que l'exercice précédent avec le tetramino en forme de **I**.

Solution de l'exercice 18
On colorie un nid sur deux en bleu et les autres en rouge. Un oiseau sur un nid rouge ira forcément sur un nid bleu et vice versa. Ainsi lors d'une nuit le nombre d'oiseaux sur nids rouges et sur nids bleus vaut toujours 3. On ne peut pas arriver dans une configuration où il n'y a pas d'oiseaux dans les nids d'une couleur donc on ne peut pas avoir tous les oiseaux dans un même nid.

Solution de l'exercice 19
Coloriage 1 : en échiquier, on en déduit que les hérissons sur une couleur ne peuvent pas aller sur l'autre donc il y a au moins deux cases.

Coloriage 2 : on colorie les lignes en entier en alternant les lignes rouges et les lignes bleues. Un hérisson sur une ligne rouge ira sur une ligne bleue et inversement.

Ainsi un hérisson sur une case noire et bleue ne pourra pas être sur la même cas qu'un hérisson sur une case noire et rouge, de même pour les hérissons sur des cases blanches et bleues et blanches et rouges. On a donc au moins quatre cases. Ces quatre cases peuvent être atteintes en en choisissant quatre formant un carré et en amenant les hérissons sur une des cases du carré et alternant à chaque tour la case sur laquelle chaque hérisson est tout en restant dans le carré : un hérisson dans le carré peut ne plus le quitter. On continue jusqu'à ce que tous les hérissons soient dans le carré.

Solution de l'exercice 20
Ceci est un exercice d'invariant.

Si on peut inverser les couleurs que sur une ligne où une colonne, la parité du nombre de cases noires est un invariant. Quelque soit la case noire on ne peut pas passer d'un nombre impair de cases noires à un nombre pair de celles-ci donc on ne pourra pas avoir toutes les cases de la même couleur.

Si on peut inverser également les couleurs des diagonales, certaines cases peuvent fonctionner mais pas toutes. Numérotons les colonnes de 1 à 4 et les lignes de A à D. La parité des cases noires sur l'ensemble de 8 cases $2A$, $3A$, $1B$, $1C$, $4B$, $4C$, $2D$, $3D$ est un invariant donc si la case noire est parmi celles là on ne peut pas aboutir à la configuration où toutes les cases sont de la même couleur. Inversement, si la case coloriée sen est une autre on peut y aboutir, la stratégie est laissée au lecteur.

3 Stratégie des jeux (Félix Breton, Andrei Barbu)

Théorie des jeux

– Stratégie miroir –

La stratégie dite "miroir", consistant à recopier les coups de l'adversaire permet de gagner certains jeux. En voici quelques exemples :

Exercice 1
Alice et Bob jouent à un jeu sur un échiquier (8 fois 8) : à tour de role, en commençant par Alice, ils placent des dominos sur deux cases libres de l'échiquier. Le premier joueur qui ne peut plus placer de domino sans chevaucher un domino existant a perdu. Lequel des deux joueurs dispose d'une stratégie gagnante ? Et sur un plateau de 8 cases sur 7 ?

Exercice 2
Alice et Bob jouent à un jeu : il y a initialement deux tas de cailloux, un de a cailloux et un de b cailloux. A tour de rôle, en commençant par Alice, ils enlèvent un ou plusieurs cailloux, mais toujours issus d'un seul tas (pas forcément le même d'un coup sur l'autre). Celui qui prend le dernier caillou gagne. Qui a une stratégie gagnante ?

Le jeu précédent se généralise avec plus de deux tas : il s'agit du jeu de Nim, qui a une stratégie gagnante assez jolie, mais trop avancée pour être expliquée dans un cours au groupe A.

Exercice 3
Alice et Bob ont une tablette rectangulaire de chocolat dont le coin en bas à gauche est empoisonné. A tour de rôle, ils choisissent un carré, et mangent tous les carrés situés au moins aussi haut et au moins autant à droite que ce carré (en particulier, ils mangent le carré choisi). Quel joueur a une stratégie qui lui évite de manger le carré empoisonné dans un rectangle $2 * n$? Et dans un carré $n * n$ avec $n \geqslant 2$?

– Vol de stratégie –

Le vol de stratégie consiste à recopier non pas les coups de l'adversaire, mais sa stratégie. Bien évidemment, il n'est pas possible en pratique de connaitre la stratégie d'un adversaire : cette technique est utile uniquement pour des problèmes théoriques où on veut prouver l'existence ou l'absence d'une stratégie gagnante pour un joueur.

Par exemple, on peut considérer le jeu dit des "échecs marseillais", qui est identique aux échecs, si ce n'est que chaque joueur joue 2 fois d'affilée. Si noir avait une stratégie gagnante, blanc pourrait "passer son tour" en sortant et rentrant un cavalier, puis utiliser cette stratégie pour gagner. On en déduit que noir ne peut pas avoir de stratégie gagnante.

Exercice 4
Alice et Bob jouent au jeu de l'exercice précédent avec un rectangle quelconque. Lequel des deux a une stratégie gagnante ?

Cet argument peut s'appliquer à de nombreux jeux, par exemple Hex, Gomoku, ou même le Tic-tac-toe : le second joueur ne peut avoir de stratégie gagnante dans aucun de ces jeux car si il y en avait une, le premier joueur pourrait jouer un coup quelconque, puis copier la stratégie en question.

– Positions gagnantes et perdantes –

Dans certains jeux, en particulier ceux où les deux joueurs peuvent jouer les mêmes coups (par exemple le jeu du chocolat empoisonné, mais pas les échecs), il est utile de diviser les positions en deux types : celles où le joueur dont c'est le tour peut gagner, dites positions gagnantes, et celles où ce n'est pas le cas, dites positions perdantes. Une position est gagnante si elle mêne à au moins une position perdante, et perdante si elle ne mêne qu'à des positions gagnantes.

Exercice 5
Un pion est sur un échiquier $8x8$. A tour de rôle, deux joueurs peuvent déplacer le pion en bas, à gauche, ou le long de la diagonale en bas et à gauche, d'une ou plusieurs cases. Le joueur qui atteint la case tout en bas à gauche gagne. Quelles sont les positions gagnantes et perdantes de ce jeu ?

Exercice 6
Deux joueurs jouent à un jeu avec un tas de cailloux : à tour de roles, ils peuvent prendre 1,3 ou 6 cailloux, et celui qui prend le dernier caillou perd. Quelles sont les positions gagnantes et perdantes de ce jeu ?

– Invariants –

Comme le nom l'indique, un invariant est quelque chose qui ne varie pas. Par exemple, si on a une pile de 2019 jetons, et qu'on peut à tout moment diviser une pile en deux piles plus petites, il est impossible d'arriver à une situation où le nombre de jetons dans chaque pile est 10, car le nombre total de jetons est invariant, et ne peut donc pas passer de 2019 à un multiple de 10.

Exercice 7
On a une pile de 2019 jetons, et on peut à tout moment jeter un jeton d'une pile qui en contient au moins 3, puis diviser le reste de la pile en deux piles (non vides). Peut on arriver à une situation où le nombre de jetons dans chaque pile est 10 ?

Exercice 8
(cet exercice nécessite de connaitre la notion de modulo) Une ile contient 7 caméléons rouges, 10 bleus et 17 jaunes. Quand deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils deviennent tous deux de la même couleur.

a) Montrer que la différence entre le nombre de caméléons rouges et le nombre de jaunes est invariante modulo 3.

b) Un jour, un voyageur arrive sur l'ile et se rend compte que tous les caméléons sont devenus de la même couleur. Quelle est cette couleur ?

Les invariants peuvent apparaitre là où on ne s'y attend pas : par exemple on peut prouver la formule d'Euler sur le nombre de sommets, d'arêtes et de faces d'un graphe connexe ou d'un polyèdre (S+F=A+2) en ajoutant les arêtes une par une et en montrant que (S+F-A) est un invariant qui vaut 2 initialement.

– Solutions des exercices –

Solution de l'exercice **??**
Bob a une stratégie gagnante : il peut jouer les coups symétriques de ceux d'Alice selon une symétrie centrale. Après chaque coup de Bob, le plateau est symétrique, donc si Alice joue quelque part, l'endroit opposé est libre aussi et Bob peut y jouer. Sur un plateau 8 fois 7, c'est Alice qui peut gagner : elle occupe les deux cases centrales avec son premier domino, puis utilise la stratégie de la symétrie centrale.

Solution de l'exercice **??**
Si $a = b$, Bob peut gagner : à chaque fois qu'Alice prend des cailloux dans un tas, il prend le même nombre de cailloux dans l'autre tas. Ainsi, les deux tas restent égaux après le tour de Bob, et c'est forcément lui qui prend le dernier caillou. Si les deux tas sont de tailles différentes, Alice gagne en prenant des cailloux dans le tas le plus gros afin d'égaliser les deux tas, puis en appliquant la stratégie précédente.

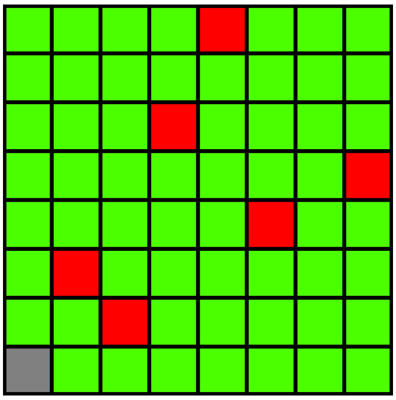
Solution de l'exercice **??**
Alice peut gagner à tous les coups dans un rectangle $2 * n$ en prenant le carré en haut à droite. Si Bob prend un carré de la rangée du haut, elle prend le carré situé un cran en bas et à droite de ce carré, et si il prend un carré de la rangée du bas, elle prend celui situé un cran en haut à gauche. Ainsi, elle laisse toujours un rectangle $2 * n$ sans le coin en haut à droite à Bob, et

finit par gagner. Dans un carré, Alice peut aussi gagner en prenant le carré situé un cran en haut à droite du carré empoisonné. Elle laisse ainsi deux lignes égales à Bob (une verticale et une horizontale), et dès que Bob prend une partie d'une de ces lignes, elle peut prendre une partie égale de l'autre, comme dans le problème précédent. Ainsi, c'est elle qui achèvera les deux lignes, laissant le carré empoisonné à Bob. Cette stratégie a aussi l'avantage de lui permettre de manger la majorité du chocolat.

Solution de l'exercice **??**

Supposons que Bob aie une stratégie gagnante. Si Alice commence par prendre le carré en haut à droite, quelque soit le choix de Bob, on arrive dans une situation qu'Alice aurait pu atteindre dès le premier coup (car tous les coups suppriment le carré en haut à droite). Alice aurait donc pu jouer le coup en question directemet, puis voler la stratégie de Bob. Par conséquent, Bob ne peut pas avoir de stratégie gagnante, et comme le match nul est impossible, Alice a une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice **??**



Les cases vertes sont les positions gagnantes, les rouges sont les positions perdantes. La case grise en bas à gauche peut être considérée comme une position perdante, étant donné que si on arrive dans cette position, le joueur dont c'est le tour vient de perdre.

Solution de l'exercice **??**

Les positions avec 1,3 ou 5 cailloux sont perdantes, celles avec 2,4,6,7,8 ou 9 sont gagnantes, et on se rend rapidement compte que ce motif se répète à chaque fois qu'on ajoute 9 cailloux.

Solution de l'exercice **??**

C'est impossible : ici l'invariant est la somme du nombre de jetons et du nombre de piles. Quand on sépare une pile en deux et qu'on jette un jeton, cette somme ne change pas, donc elle restera toujours égale à sa valeur de départ, soit 2020. Or, pour que toutes les piles fassent 10 jetons, ils faut qu'il y ait n piles et $10n$ jetons pour un certain n, soit un total de $11n$. 2020 n'étant pas un multiple de 11, on ne peut pas arriver à cette situation.

Solution de l'exercice **??**

a) On note R,B et J les nombres de caméléons rouges, bleus et jaunes. On cherche donc à montrer que R-J est invariant modulo 3. Si un caméléon bleu et un rouge se rencontrent, R diminue de 1 et J augmente de 2, donc R-J diminue de 3. Si un bleu et un jaune se rencontrent, R augmente de 2 et J diminue de 1, donc R-J augmente de 3. Enfin, si un rouge et un jaune se rencontrent, R et J diminuent tous deux de 1, donc R-J reste constant. Dans tous les cas, R-J est invariant modulo 3.

b) R-J vaut initialement -10, et reste constant modulo 3, donc il ne peut jamais atteindre 0. Cela signifie qu'il n'y a jamais 0 caméléons rouges et 0 jaunes à la fois, donc tous les caméléons ne peuvent pas être bleus. Le même raisonnement s'applique pour J-B, donc tous les caméléons ne peuvent pas être rouges. Par conséquent, tous les caméléons sont jaunes. Il est possible de trouver une séquence de rencontres qui mène à cette situation, mais ce n'est pas demandé par l'exercice.

4 Dénombrement (Maena Quemener)

Ce cours sera disponible sur le polycopié à partir du 10 septembre 2019.

5 Modulo, TD (Aline Cahuzac)

– Rappels sur les bases de l'arithmétique –

Rappel 1 (Divisibilité)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{N}$. On dit que a **divise** b lorsqu'il existe $k \in \mathbb{N}$, $b = ka$. On dit alors aussi que a est un **diviseur** de b.

Tout entier divise 0 mais 0 ne divise que lui-même.

Rappel 2 (PGCD et PPCM)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{N}$.

— Le **PGCD** de a et b noté $a \wedge b$ est le plus grand entier d qui divise a et b.
— Le **PPCM** de a et b noté $a \vee b$ est le plus petit entier m qui admet a et b comme diviseurs.
— $a \wedge b \geqslant 1$ avec égalité si et seulement si a et b sont **premiers entre eux**.
— $a \vee b \leqslant ab$ avec égalité si et seulement si $a \wedge b = 1$
— $(a \vee b) \cdot (a \wedge b) = a \cdot b$

Rappel 3 (Nombres premiers)**.**

— Tout $n \in \mathbb{N}$ est divisible par 1 et n.
— Un nombre entier p est dit **premier** si il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
— 1 n'est pas premier, car il n'a qu'un seul diviseur, lui-même.
— Le seul nombre premier pair est 2.

Lemme 4 (Lemme d'Euclide)**.**
Soit p un nombre premier et $a, b \in \mathbb{N}$. Alors :

$$p \mid a \cdot b \Leftrightarrow p \mid a \text{ ou } p \mid b$$

Lemme 5 (Lemme de Gauss)**.**
Soit $a, b, c \in \mathbb{N}$ tel que $a \wedge c = 1$. Alors :

$$a \mid b \cdot c \Leftrightarrow a \mid b$$

Théorème 6 (Théorème de Bézout)**.**
oit $a, b \in \mathbb{N}$. Il existe $u, v \in \mathbb{N}$ tel que $a \cdot u + b \cdot v = a \wedge b$.

Démonstration. On peut calculer explicitement un couple (u, v) convenable grâce à une extension de l'algorithme d'Euclide pour le calcul du PGCD. □

Les nombres premiers sont des briques élémentaires pour construire tous les entiers :

Théorème 7 (Décomposition en produit de facteurs premiers)**.**
oit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe des nombres premiers distincts $p_1 < ... < p_r$ et des exposants $\alpha_1, ..., \alpha_r > 0$ tel que $n = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r}$.
Cette décomposition est unique (si on impose l'ordre des facteurs).

Démonstration. C'est un bon exercice pour appliquer le principe de récurrence, en utilisant les lemmes qui précèdent. □

– Réduction modulo p –

Rappel 8 (S)**.**
oit $p \in \mathbb{N}^*$. Si $n \in \mathbb{Z}$, il existe un unique entier r dans $[\![0, p-1]\!]$ telle que $p|n - r$, c'est le reste de la division euclidienne de n par p.
Si $n, m \in \mathbb{N}$, on note $n \equiv m\ [p]$ si et seulement si n et m ont même reste modulo p, ce qui équivaut à dire que $p|n - m$. On dit alors que n **et** m **sont congrus modulo** p ou encore que n **est congru à** m **modulo** p.
La relation de congruence modulo p est compatible avec l'addition, la soustraction, la multiplication **mais pas la division en général**.

Théorème 9 (Inverse modulo p)**.**
oit $n, p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$. Il existe $m \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $nm \equiv 1\ [p]$ si et seulement si $n \wedge p = 1$. Dans ce cas on appelle m l'**inverse de** n **modulo** p.

Démonstration. Par le théorème de Bézout, il existe u, v entiers tels que $nu - pv = 1$ si et seulement si $n \wedge p = 1$. m le reste de u modulo p convient dans ce cas. Puis si $m' \in [\![1, p-1]\!]$ vérifie $nm \equiv nm' \equiv 1\ [p]$, $p|n(m - m')$ donc par le lemme de Gauss, $p|(m - m')$. Nécessairement $m = m'$, d'où l'unicité. □

Ainsi, on peut parfois simplifier une égalité modulo p en multipliant les deux membres par l'inverse d'un élément n. Attention, il faut que cet inverse existe, ie que $n \wedge p = 1$! C'est comme pour les égalités classiques : on peut toujours simplifier si l'élément que l'on simplifie a un inverse, ie qu'il est non nul.

Théorème de Fermat

Théorème 10 (Ordre modulo p)**.**
oit $n, p \in \mathbb{N}$, $p \geqslant 1$. Il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $n^k \equiv 1$ $[p]$ si et seulement si $n \wedge p = 1$. On appelle alors **ordre de** n **modulo** p le plus petit entier $k \leqslant 1$ vérifiant cette propriété, et on le note par exemple $\omega_p(n)$.

Démonstration. Si $d = n \wedge p \neq 1$, on a pour tout entier $k \geqslant 1, d|n^k$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, si $n^k \equiv m$ $[p]$, alors $p|n^k - m$ donc en particulier $d|n^k - m$, donc $d|m$. Mais $d \nmid 1$ donc $n^k \not\equiv 1$ $[p]$.
Sinon, par le principe des tiroirs, il existe $k, l \in [\![0, p-1]\!]$ tels que $k < l$ et $n^k \equiv n^l$ $[p]$. En multipliant par l'inverse de n^k modulo p, on obtient que $n^{l-k} \equiv 1$ $[p]$. $\square$

On a alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $n^k \equiv 1$ $[p] \Leftrightarrow \omega_p(n)|k$.

Théorème 11 (Petit théorème de Fermat)**.**
oit p un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$. Alors $a^p \equiv a$ $[p]$.
Si de plus p ne divise pas a, alors $a^{p-1} \equiv 1$ $[p]$.

Démonstration. Si p divise a, p divise aussi a^p donc $a^p \equiv a \equiv 0$ $[p]$.
Sinon, les restes modulo p de $a, 2a, 3a, ...(p-1)a$ sont tous différents (et non nuls car p est premier avec $1, ..., p-1$ et a). En effet, si $k, l \in [\![1, p-1]\!]$ vérifient $ka \equiv la$ $[p]$, on a vu que $k = l$.
Alors :

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot ... \cdot (p-1)a \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-1) \equiv (p-1)! \ [p]$$

Mais aussi :

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot ... \cdot (p-1)a \equiv (p-1)! \cdot a^{p-1} \ [p]$$

Or $(p-1)!$ est inversible modulo p, donc on peut simplifier l'égalité $(p-1)! \cdot a^{p-1} \equiv (p-1)!$ $[p]$ en $a^{p-1} \equiv 1$ $[p]$. On obtient alors en multipliant à nouveau par a le thèorème. $\square$

En particulier, on obtient que $\forall a \in \mathbb{N}$ tel que $p \nmid a$, $\omega_p(a) \mid p-1$.

Carrés modulo p

Si $p \in \mathbb{N}^*$, on appelle **carré modulo** p tout nombre entier n tel qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$, $m^2 \equiv n$ $[p]$ (c'est équivalent à dire qu'il existe $m \in [\![0, p-1]\!]$ tel que $m^2 \equiv n$ $[p]$). On définit de même les **cubes modulo** p, ...

On retiendra par exemple :

— Un carré est toujours congru à 0 (pour un nombre pair) ou 1 (pour un impair) modulo 4.

— Un carré est toujours congru à 0 (multiple de 3) ou à 1 modulo 3.

— Les cubes modulo 7 sont $0, 1, -1$.

Théorème 12.
oit p un nombre premier impair. Il existe exactement $\frac{p-1}{2}$ nombres dans $[\![1, p-1]\!]$ qui sont des carrés modulo p.

Démonstration. Soit $x \in [\![1, p-1]\!]$. On a $x^2 \equiv (p-x)^2\ [p]$ où comme p est impair, $x \neq p-x$. Chaque carré modulo p a donc au moins deux racines carrées distinctes dans $[\![1, p-1]\!]$. De plus si $x, y \in [\![1, p-1]\!]$ vérifient $x^2 \equiv y^2\ [p]$, alors p divise $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$. p est premier donc soit par le lemme d'Euclide, soit p divise $x-y$ et $x = y$, soit il divise $x+y$ donc $x+y = p$ et $y = p-x$. Ainsi, un carré a *exactement* 2 racines modulo p. Il en résulte qu'il y a deux fois moins de restes non nuls de carrés modulo p que de restes non nuls modulo p, soit $\frac{p-1}{2}$. □

Théorème 13.
oit p un nombre premier et $x \in \mathbb{Z}$. Alors :
x est un carré modulo $p \Leftrightarrow x^{\frac{p-1}{2}} = 1$.

Démonstration. Si x est un carré, $\exists y \in \mathbb{Z}$, $x \equiv y^2\ [p]$. Donc $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv y^{p-1} \equiv 1\ [p]$ par le petit théorème de Fermat.
(Pour la réciproque, on a besoin de l'intégrité de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, que l'on ne va pas démontrer ici, et du résultat précedent). □

Corollaire 14.
Soit p un nombre premier. -1 est un carré modulo $p \Leftrightarrow p \equiv 1\ [4]$

Démonstration. D'après le théorème précédent, puisque $p \nmid 2$:
-1 est un carré modulo $p \Leftrightarrow\ (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p] \Leftrightarrow\ p-1$ est pair $\Leftrightarrow\ p \equiv 1\ [4]$ □

– Résolution des équations arithmétiques –

Les équations arithmétiques font intervenir des sommes ou produits de puissances entières de nombres entiers. On les résout par des considérations principalement arithmétiques (divisibilités, congruences), auxquelles on rajoute parfois un argument d'analyse (une quantité devient trop grande si un paramètre dépasse un seuil par exemple).

Factorisation et identités remarquables

Lemme 15 (Somme d'une suite géométrique)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$(a-b)(a^n + a^{n-1}b + \ldots + ab^{n-1} + b^n) = a^{n+1} - b^{n+1}$$

et pour n pair tel que $n = 2p$:

$$a^{2p+1} + b^{2p+1} = (a+b)(a^{2p} - a^{2p-1}b + \ldots - ab^{2p-1} + b^{2p})$$

En particulier :

$$(a-1)(a^n + a^{n-1} + \ldots + a + 1) = a^{n+1} - 1$$

On retrouve l'identité bien connue : $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Il est souvent utile de réécrire les équations arithmétiques comme des égalités de produits : un facteur premier qui apparaît à gauche doit diviser un des facteurs de droite et vice-versa, on peut ainsi souvent utiliser le lemme de Gauss pour obtenir des informations sur les inconnues du problème.

Réduction modulo p et tables de congruences

Il peut aussi être utile de considérer un nombre p bien choisi et de regarder ce que donne l'équation aux restes modulo p. En effet, $\forall\ a, b \in \mathbb{Z},\ a = b \Rightarrow a \equiv b\ [p]$. On peut obtenir des contradictions dans un raisonnement par l'absurde de cette façon par exemple.

Pour le choix de p, on peut considérer :

— Un nombre premier qui divise certains termes de l'équation

— Une des potentielles solutions du problème

— Parfois, il faut juste essayer et être astucieux...

Dans le doute, toujours écrire une table de congruence : cela permet de trouver les puissances n-ièmes modulo p, de ne pas se tromper dans les simplifications, de remarquer des propriétés, de trouver l'ordre d'un élément...

– Ecriture dans une base –

Définition

Théorème 16 (Décomposition en base b)**.**
oit b un entier positif supérieur ou égal à 2. Tout nombre entier n peut se **décomposer en base** b, c'est-à-dire qu'il existe une suite finie $a_0, ..., a_d$ d'entiers dans $[\![0, b-1]\!]$ tels que :

$$n = \sum_{k=0}^{d} a_k b^k$$

Par exemple, l'écriture que l'on utilise couramment est la base 10 (base décimale). On utilise aussi souvent la base 2 (base binaire) parce qu'elle n'a que deux chiffres, c'est la plus simple :

1	2	3	4	5	10	12	15	23	32
1	10	11	100	101	1 010	1 100	1 111	10 111	100 000

Démonstration.

Pour écrire un nombre en base b, on applique l'algorithme suivant :

1. On pose $n_0 = n$.
2. Pour un entier k tel que l'on ait défini n_k et que $n_k > 0$, on pose a_k le reste de n_k modulo b et $n_{k+1} = \frac{n_k - a_k}{b}$.
3. Lorsque $n_k = 0$, on a fini, et alors $d = k$ est le plus grand entier tel que $b^d \leqslant n$.

□

Quelques propriétés

Lemme 17.
Soit b, d des entiers, $b \leqslant 2$ et $a_0, ..., a_d \in [\![0, b-1]\!]$. On pose

$$n = \sum_{k=0}^{d} a_k b^k$$

On a alors :

$$n \equiv a_0 + ... + a_d \ [b-1]$$

Corollaire 18.
En particulier :

$$b-1 \mid n \ \Leftrightarrow \ b-1 \mid a_0 + ... + a_d$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur d :
Si $d = 0$ c'est vrai. Supposons que $d \leqslant 1$ et que c'est vrai pour $d-1$:

$$\sum_{k=0}^{d} a_k b^k \equiv a_0 + \sum_{k=1}^{d} (a_k b^{k-1}(b-1) + a_k b^{k-1}) \equiv a_0 + \sum_{k=0}^{d-1} a_{k+1} b^k \ [b-1]$$

par hypothèse de récurrence on conclut :

$$n \equiv a_0 + \sum_{k=0}^{d-1} a_{k+1} \equiv \sum_{k=0}^{d} a_k \ [b-1]$$

□

– Exercices –

Exercice 1
Trouver tous les entiers relatifs (x, y) tels que $2x^3 + xy - 7 = 0$.

Solution de l'exercice 1
On écrit $x(2x^2 + y) = 7$. Il vient donc $(x, 2x^2 + y) = \pm(1, 7)$ ou $\pm(7, 1)$. On teste les différentes valeurs de x possibles et on obtient les solutions : $(-7, -99)$, $(-1, -9)$, $(1, 5)$, $(7, -97)$.

Exercice 2
Trouver tous les couples d'entiers naturels (x, y) tels que $x \wedge y + \frac{xy}{x \wedge y} = x + y$.

Solution de l'exercice 2
L'égalité est symétrique en x, y. Elle est vraie si $x \mid y$ ou si $y \mid x$. Sinon, supposons $x < y$. On a alors $x \wedge y + \frac{xy}{x \wedge y} > x \vee y \geqslant 2 * y > x + y$, donc les seules solutions sont les couples (x, y) ou $y \mid x$.

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}$. Peut-on trouver une suite de n entiers consécutifs dont aucun n'est premier ?

Solution de l'exercice 3
Il suffit de prendre la suite $(n+1)!+2, \ldots, (n+1)!+(n+1)$. Si $k \in [\![2]\!] n+1$, on remarque que $k \mid (n+1)!+k$ ou $k \neq 1$ et $k \neq (n+1)!+k$, donc $(n+1)!+k$ n'est pas premier.

Exercice 4
Quels sont les $n \in \mathbb{N}$ tels que $n+1|n^2+1$?

Solution de l'exercice 4
On sait que $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 \mid n^2-1 = n^2+1-2$. Donc une solution vérifie $n+1 \mid (n^2+1)-(n^2-1) = 2$. Nécessairement $n=0$ ou $n=1$, ce sont les deux solutions.

Exercice 5
Existe-t-il une base b dans laquelle tous les nombres de la forme 101, 10101, 1010101, etc sont premiers ?

Solution de l'exercice 5
Soit $b \geqslant 2$. Le nombre $101 \ldots 101$ avec b^2-1 chiffres 1 s'écrit $11 \ldots 11$ avec b^2-1 chiffres 1 dans la base b^2. Il est donc divisible par $b^2-1 \geqslant 3$, et est lui-même plus grand que $(b^2)^2 > b^2-1$. Il n'est donc pas premier.

Exercice 6
Soit $a \in \mathbb{N}^*$, $n, m \in \mathbb{N}$. Calculer le PGCD de a^n-1 et a^m-1.

Solution de l'exercice 6
En écrivant une étape de l'algorithme d'Euclide, supposant par exemple $n \geqslant m$, on obtient que :
$(a^n-1) \wedge (a^m-1) = (a^{n-m}-1) \wedge (a^m-1)$. On est donc en fait en train d'appliquer l'algorithme d'Euclide aux exposants, et il vient : $(a^n-1) \wedge (a^m-1) = a^{n \wedge m}-1$.

Exercice 7
Quel est le plus petit multiple de 29 dont les deux derniers chiffres en base 10 sont 29 et dont la somme des chiffres vaut 29 ?

Solution de l'exercice 7
Un tel multiple est de la forme $(100*m+1) \cdot 29$. La somme des chiffres de $29m$ doit donc valoir 18. Il faut au moins trois chiffres puisque $29 \nmid 99$, et $9 \mid m$. On regarde donc les multiples successifs de $9 \cdot 29 = 261$. On trouve 783.

Exercice 8 (JBMO 2010)
Trouver les $n \in \mathbb{N}$ tels que $2^{n+1}n$ est un carré parfait.

Solution de l'exercice 8
Si n est pair, alors pour que la valuation 2-adique de 2^{n+1} soit paire il faut que $4 \nmid n$. Puis il faut que $n/2$ soit un carré parfait. Réciproquement, si m est impair et $n = 2m^2$, alors $2^{n+1}n = 2^{2m^2+2}m^2 = (2^{m^2+1}m)^2$. Si n est impair, on constate de même que ceux qui fonctionnent sont exactement les carrés de nombres impairs.

Exercice 9
Soit n un nombre dont $1, 3, 7, 9$ sont des chiffres en base 10. Montrer qu'on peut permuter les chiffres de n pour obtenir un multiple de 7.

Solution de l'exercice 9
Il suffit de vérifier que l'on peut obtenir toutes les classes de congruences modulo 7 avec des nombres à 4 chiffres écrits avec $1, 3, 7, 9$. On place ensuite comme on veut les autres chiffres au début du nombre, ce qui donne un nombe de la forme $***0000$. On regarde son reste modulo 7, puis on rajoute le suffixe qui a le reste complémentaire.

Exercice 10 (JBMO 2008)
Trouver tous les triplets de nombres premiers (p, q, r) tels que

$$\frac{p}{q} - \frac{4}{r+1} = 1$$

.

Solution de l'exercice 10
On multiplie tout par $q(r+1)$ pour obtenir $p(r+1) - 4q = q(r+1)$ ie $p(r+1) = q(r+5)$. Puis on regarde modulo q : q doit diviser $p(r+1)$ donc soit $q = p$, soit q divise $r+1$. Dans le premier cas, il vient en divisant par q : $r+1 = r+5$, c'est impossible. On écrit $r+1 = kq$. Alors il vient de même $r+5 = k'p$. Nécessairement $k = k'$ et $k \mid 4$, donc $k = 1, 2$ ou 4. Si $k = 1$, il vient $r = 2, q = 3, p = 7$.
Si $k = 2$, on écrit $p + q = r + 3$ et $p - q = 2$. En regardant les possibilités pour le reste de r modulo 6, on trouve $q = 3, p = 5, r = 7$.
Enfin si $k = 4$, on trouve $p - q = 1$ donc $p = 3, q = 2, r = 5$.
Finalement, les solutions sont $(7, 3, 2)$, $(5, 3, 5)$ et $(5, 3, 7)$.

Exercice 11 (JBMO 2014)
Trouver les triplets de nombres premiers (p, q, r) tels que $3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26$.

Solution de l'exercice 11
On regarde modulo 5, sachant que les seuls carrés sont 1, -1 et 0. Si $p \neq 5$, c'est impossible, donc $p = 5$. Puis on regarde modulo 3, il vient de même $q = 3$. Le calcul fournit alors $r = 19$. La solution est $(5, 3, 19)$.

Exercice 12 (JBMO 2011)
Trouver tous les nombres premiers p tel qu'il existe $x, y \in \mathbb{N}^*$, $x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$.

Solution de l'exercice 12
On écrit $(x + y + 5)p = xy(x + y)$. $p \mid xy(x + y)$ donc p divise l'un des facteurs. Si par exemple $p \mid x$ et $p \neq x$, on a $x \geqslant 2p$ et $xy(x + y) \geqslant 2p(x + y) > p(x + y + 5)$ sauf si $x + y = 5$, ce qui fournit $p = 2$ et $(x, y) = (4, 1)$. Si $x = p, il vient p + y + 5 = y(p + y)$ et par le même argument, $p + y = 5, y = 2$ et $p = 3$. Sinon, $p \mid x + y = kp$. Il vient $kp + 5 = kxy$, donc $5 = k(xy - p)$. Si $k = 1$, $xy = p + 5 = x + y + 5$, sinon $xy = x + y + 1$. Dans le premier cas, $(x - 1)(y - 1) = 5$ donc $x + y = 6$ et $p = 2$ ou $p = 3$, dans le deuxième, $(x - 1)(y - 1) = 2$ donc $x + y = 3$ et $p = 3$. Donc les solutions sont 2 et 3.

Exercice 13 (JBMO 2007)
Trouver tous les nombres premiers p tels que $7p + 3^p - 4$ soit un carré parfait.

Solution de l'exercice 13
On écrit $7p + 3^p - 4 = a^2$. $p = 2$ n'est pas solution donc p est impair. On regarde modulo 4 : $-p - 1 \equiv a^2$ $[4]$. Comme $a^2 \equiv 0$ ou 1 $[4]$, et que $p \equiv 1$ ou 3 $[4]$, nécessairement $p \equiv 3$ $[4]$ et a est pair. On regarde alors modulo p en utilisant le petit théorème de Fermat : $3 - 4 \equiv -1 \equiv a^2$ $[p]$. Mais -1 n'est pas un carré modulo p puisque $p \equiv 3$ $[4]$. Il n'y a donc pas de solution.

6 TD (Savinien Kreczman, Andrei Barbu)

– TD Combinatoire –

Les exercices sont ici groupés par thème puis par difficulté au sein d'un thème. Dans le cours, ils ont été triés par ordre de difficulté estimée.

– Récurrence –

Exercice 1
Dans un certain pays, deux villes sont toujours reliées soit par une ligne aérienne, soit par un canal navigable. Montrer qu'un des deux moyens de transport permet de voyager de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre.

Exercice 2
Les gentils animatheux organisent un tournoi de jeu de hex (il n'y a donc pas de parties nulles). Chacun joue contre tous les autres participants. A la fin du tournoi, chacun écrit la liste des joueurs qu'il a battus et des joueurs que ceux-ci ont battus. Montrer qu'un des joueurs a sur sa liste tous les autres participants.

Exercice 3
Dans le plan, on donne un polygone régulier à $n \geqslant 3$ côtés. Ses sommets sont coloriés en rouge, bleu ou vert de manière à ce que deux sommets consécutifs ne soient jamais de la même couleur et qu'il y ait au moins un sommet de chaque couleur. Montrer qu'on peut tracer des diagonales du polygone qui ne s'intersectent que sur ses sommets de manière à le découper en triangles ayant chacun trois sommets de couleur différente.

Exercice 4
Dans le plan, on se donne $2N$ points. Montrer que si l'on trace $N^2 + 1$ segments reliant ces points entre eux, on pourra trouver trois des $2N$ points tels que les trois segments les reliant auront été tracés.

– Tiroirs –

Exercice 5
Soit $S \subset \{1, \ldots, 2n\}$ ayant $n + 1$ éléments. Montrer qu'on peut trouver deux éléments de S premiers entre eux, ainsi qu'un élément multiple d'un autre.

Exercice 6
On a n nombres entiers $a_1, ..., a_n$ (non nécessairement distincts). Montrer qu'on peut trouver

i et j entiers avec $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ tels que $a_i + a_{i+1} + ... + a_j$ soit multiple de n.

Exercice 7
Dans un cube de côté 15, on place 11000 points. Montrer qu'il existe une sphère de rayon 1 contenant au moins 6 de ces points.

– Jeux –

Exercice 8
Philippe et Emmanuel ont face à eux 2018 cartes numérotées de 1 à 2018. Tour à tour, ils prennent chacun une des cartes face à eux et l'ajoutent à leur main, jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de cartes devant eux. A ce moment, ils font chacun la somme des numéros dans leur main. Celui qui a une somme paire gagne. Philippe commence. Qui gagne ?

Exercice 9
Aragorn et Boromir ont devant eux 2019 flèches, pointant toutes vers le nord. Ils jouent au jeu suivant : Aragorn commence. Ils peuvent à tour de rôle retourner une flèche (si elle pointait au nord, elle pointe alors au sud et vice-versa) mais ils ne peuvent revenir à une configuration déjà vue auparavant. Celui qui ne sait pas jouer perd. Qui gagne ?

Exercice 10
Le nombre 10^{2019} est écrit au tableau. Gottfried et Isaac jouent à un jeu : à tour de rôle, ils peuvent soit effacer un nombre x écrit au tableau et le remplacer par deux nombres entiers a et b, à condition que $ab = x$, soit effacer deux nombres égaux écrits au tableau. Celui qui ne peut plus jouer perd. Si Gottfried commence, qui a une stratégie gagnante ?

– Extrema –

Exercice 11
Lors d'un bal, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon. Montrer que l'on peut trouver deux garçons g et g' et deux filles f et f' tels que g a dansé avec f mais pas f' et g' a dansé avec f' mais pas f.

Exercice 12
La Reine d'Angleterre veut partager la Chambre des Lords de façon originale : chaque Lord ayant au plus trois ennemis (l'inimité est réciproque), elle veut partager la Chambre en deux groupes, chaque Lord ayant au plus un ennemi dans son groupe. Est-ce possible ?

Exercice 13
Soit S un ensemble fini de points du plan tel que trois points quelconques de S forment toujours un triangle d'aire $\leqslant 1$. Montrer que S est inclus dans un rectangle d'aire $\leqslant 4$.
Montrer également que S est inclus dans un triangle d'aire $\leqslant 4$.

– Invariants –

Exercice 14
Sur une île se trouvent des moutons magiques. Il y en a 22 bleus, 18 rouges et 15 verts. Lorsque deux moutons de couleurs différentes se croisent, ils prennent tous deux la troisième couleur. Est-il possible qu'après un certain nombre fini de rencontres, tous les moutons soient de la même couleur ? Si oui, quelle peut être cette couleur ?

Exercice 15
On a 2018 piles de jetons. Sur la i-ème pile, il y a p_i jetons, où p_i est le i-ème nombre premier. On s'autorise :

— à séparer une pile en deux autres et ajouter un jeton à l'une des deux piles ainsi créées.

— à fusionner deux piles et ajouter un jeton à la pile créée.

Peut-on aboutir à la situation avec 2018 piles de 2018 jetons chacune ?

– Coloriages –

Exercice 16
Sur une grille 2018×2018, on peut bouger un jeton d'une case vers une autre si ces deux cases ont un côté commun. Est-il possible, en partant avec le jeton dans le coin inférieur gauche, d'amener le jeton dans le coin supérieur droit en passant une et une seule fois par toutes les cases ?

Exercice 17
On part d'un échiquier 8×8 dont toutes les cases sont blanches. Un coup consiste à inverser les couleurs de trois cases d'un rectangle 1×3 (le noir devient blanc, le blanc devient noir). Est-il possible qu'après un certain nombre de coups l'échiquier soit entièrement noir ?

– Solutions –

Solution de l'exercice 1

— Initialisation : $P(2)$ est vraie : Si le pays compte deux villes et qu'elles sont reliés par un moyen de transport, ce moyen de transport permet de passer de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre.

— Hérédité : Supposons que $P(j)$ soit vraie et montrons $P(j+1)$. Soit un pays de $j+1$ villes. Choisissons-en une et écartons-la. Il nous reste un pays de j villes. Par hypothèse de récurrence, il existe un moyen de transport (on peut supposer vu la symétrie que c'est l'avion) qui permet de faire n'importe quel trajet entre ces j villes. Dès lors, si la ville supplémentaire est reliée par avion à une des j premières, l'avion permet de faire tout trajet entre les $j+1$ villes. Dans le cas contraire, la ville supplémentaire est reliée par bateau à toutes les autres, donc le bateau permet de faire tout trajet entre les $j+1$ villes (en passant par la dernière).

— Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est donc vraie pour tout n supérieur ou égal à 2, et l'énoncé est donc prouvé.

Solution de l'exercice 2

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 2$ la propriété $P(n)$: « Dans un tournoi à n joueurs se passant comme dans l'énoncé, quelqu'un a sur sa liste le nom de tous les autres ».

— Initialisation : $P(2)$ est vraie : S'il n'y a que deux joueurs, l'un d'eux a battu l'autre et a le nom de l'autre joueur sur sa liste.

— Hérédité : Supposons que $P(j)$ soit vraie et montrons $P(j+1)$. Considérons un tournoi à $j+1$ joueurs. Choisissons un joueur X et ignorons-le momentanément. On peut considérer que les j autres joueurs ont joué un tournoi à eux seuls. Vu l'hypothèse de récurrence, il y a un joueur A qui a sur sa liste les noms de tous les autres joueurs. Soit S l'ensemble contenant A et les joueurs que A a battus. Reprenons maintenant X en compte. Si X a battu tous les joueurs de S, alors il a tous les joueurs sur sa liste (puisque tout le monde sauf X était sur la liste de A, tout le monde a été battu par un joueur de S). Sinon, il existe un joueur de S qui a battu X, donc A a battu un joueur qui a battu X : X est sur la liste de A, donc A a tout le monde sur sa liste.

— Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est donc vraie pour tout n supérieur ou égal à 2, et l'énoncé est donc prouvé.

Solution de l'exercice 3

Montrons par récurrence sur $n \geqslant 3$ la propriété $P(n)$: « Si les sommets d'un n-gone sont coloriés en bleu, rouge et vert de telle sorte que deux sommets consécutifs soient de couleurs différentes et que chaque couleur soit représentée, alors on peut le découper par des diagonales en triangles tricolores ».

— Initialisation : $P(3)$ est vraie : si les sommets d'un triangle sont coloriés de trois couleurs différentes et que chaque couleur est représentée, alors ce triangle est tricolore et ne pas tracer de diagonale conduit au découpage souhaité.

— Hérédité : Supposons que $P(j)$ soit vraie et montrons $P(j+1)$. Considérons un $(j+1)$-gone colorié en accord avec l'énoncé. Montrons par l'absurde qu'il possède trois sommets consécutifs de couleurs différentes : on peut numéroter les sommets dans le sens horlogique et supposer spdg que le premier sommet est bleu et le deuxième rouge. Dans ce cas, le troisième sommet ne peut être vert vu l'hypothèse d'absurde, ni rouge car deux sommets consécutifs sont de couleur différentes. Il est donc bleu. De même, le

quatrième sommet est rouge, le cinquième bleu,... et aucun sommet n'est vert, ce qui est une contradiction puisque cette couleur doit être utilisée au moins une fois.
Dès lors, considérons trois sommets consécutifs de couleurs différentes. Si le sommet du milieu est le seul de sa couleur, en le reliant à chacun des autres sommets, on obtient des triangles tricolores (puisque les deux autres sommets de chaque triangle sont consécutifs sur le polygone, donc de couleurs différentes). Si le sommet du milieu n'est pas le seul de sa couleur, en l'ignorant, on obtient un j-gone colorié en accord avec l'énoncé (il y a un sommet de chaque couleur puisque le sommet ignoré n'était pas le seul de sa couleur, et deux sommets consécutifs sont de couleurs différentes, puisque ceux de part et d'autre du sommet ignoré l'étaient). Par hypothèse de récurrence, on peut le découper en triangles tricolores. En rajoutant la diagonale liant les deux sommets de part et d'autre du sommet ignoré, on obtient un découpage correct du (j+1)-gone de départ.

— Conclusion : Par récurrence, $P(n)$ est donc vraie pour tout n supérieur ou égal à 3, et l'énoncé est donc prouvé.

Solution de l'exercice 4

— Initialisation : on procède par récurrence sur N. Pour $N = 4$, la seule manière de tracer 5 segments entre 4 points $ABCD$ est de ne pas en tracer un (spdg CD), et le triangle ABC est alors tracé.

— Hérédité : supposons que la propriété est vraie pour N et donnons-nous $2N$ points reliés par $(N+1)^2+1 = N^2+2N+2$ segments. Choisissons deux points reliés et isolons-les. S'il y a au moins N^2+1 segments tracés parmi les $2N$ autres points, on a fini par l'hypothèse de récurrence. Sinon, il reste au moins $2N+1$ segments qui ne peuvent que relier un des points non isolés à un des points isolés. Il n'y a que $2N$ points non isolés, donc un d'eux est relié aux deux points isolés par le principe des tiroirs, ce qui complète un triangle puisque les deux points isolés sont reliés entre eux, on a donc fini.

Solution de l'exercice 5
Pour la première partie , les tiroirs sont $\{1,2\}, ..., \{2n-1, 2n\}$. Il y a deux nombres dans le même tiroir. Ces nombres ont une différence de 1, donc ils sont premiers entre eux. Pour la deuxième partie, les tiroirs sont $1, 3, ..., 2n-1$ et on met chaque nombre pair dans le tiroir du plus grand nombre impair qui le divise. Il y a deux nombres dans le même tiroir, qui son tous deux une puissance de 2 multipliée par un même nombre impair. Un de ces deux nombres est donc une puissance de 2 multipliée par l'autre.

Solution de l'exercice 6
On considère les sommes $a_1, a_1+a_2, ..., a_1+...+a_n$ modulo n.. Si elles sont toutes différentes, une d'elles est 0 et on a fini. Sinon, deux sont identiques (tiroirs). Si $a_1+...+a_i = a_1+...+a_j \bmod n$ avec $i < j$, on a alors que $a_{i+1}+...+a_j$ est multiple de n comme voulu.

Solution de l'exercice 7
Une sphère de rayon 1 contient un cube de diagonale 2, donc de côté $2/\sqrt{3}$. Puisque $13(2/\sqrt{3}) > 15$ (mettez au carré pour vérifier), le cube de côté 15 est peut être entièrement recouvert par nos petits cubes en les arrangeant en réseau $13 \times 13 \times 13$, donc en en utilisant 2189. Puisque $\lceil 11000/2189 \rceil = 6$, il y a 6 points dans le même cube, donc ces 6 points sont contenus dans une sphère de rayon 1.

Solution de l'exercice 8
Philippe gagne. Il commence par prendre une carte paire, puis prend chaque fois un carte de la même parité que celle qu'Emmanuel vient de prendre. A un moment, Emmanuel sera forcé de prendre la dernière carte impaire. Il aura donc pris 505 cartes impaires au total, et perdra.

Solution de l'exercice 9
Aragorn gagne. Il choisit une flèche et joue toujours cette flèche-là. Appelons *associées* deux configurations qui ne diffèrent que par l'état de cette flèche. Après le tour d'Aragorn, dans chaque paire de configurations associées, on a vu soit aucune soit les deux configurations. Boromir doit donc à chaque fois entamer une paire, et Aragorn peut finir immédiatement cette paire, ce qu'il fait. Il n'est donc jamais bloqué, et c'est lui qui gagne.

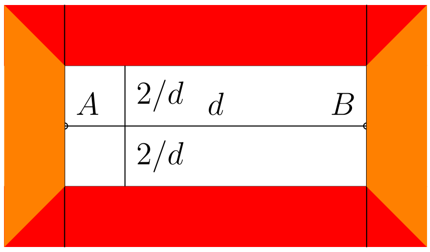
Solution de l'exercice 10
Gottfried commence par effacer 10^{2019} et écrit à la place 5^{2019} et 2^{2019}. Le jeu se limite alors à des puissances de 5 d'un côté et à des puissances de 2 de l'autre, et il est donc ainsi décomposé en deux jeux similaires qui n'interagissent plus (une puissance de 5 n'est jamais égale à une puissance de 2). Dès qu'Isaac joue quelque chose, Gottfried n'a qu'à jouer le coup correspondant de l'autre « côté » du jeu. Il n'est jamais bloqué, c'est donc lui qui gagne.

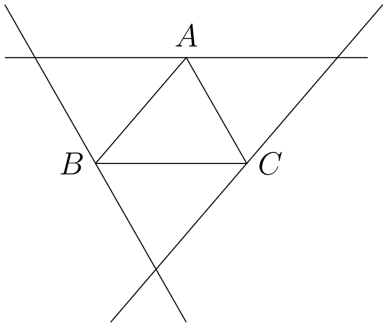
Solution de l'exercice 11
Considérons le garçon g qui a dansé avec le plus de filles, f' une fille avec laquelle il n'a pas dansé et g' un garçon avec lequel f' a dansé. Si on ne peut trouver les quatre personnes désirées par l'énoncé, alors pour toute fille f ayant dansé avec g, f doit également avoir dansé avec g'. Mais alors, g' a dansé avec au moins une fille de plus que g, ce qui contrdit la maximalité de g. Absurde.

Solution de l'exercice 12
Choisissons une répartition qui minimise le nombre de paires de Lords ennemis se trouvant dans le même groupe. Si un Lord était dans le même groupe que deux de ses ennemis, le nombre de telles paires diminuerait d'au moins 1 en le changeant de groupe, ce qui est impossible. Dès lors, la répartition choisie satisfait la condition imposée par la Reine.

Solution de l'exercice 13
Pour le rectangle : soient A et B les points les plus éloignés de l'ensemble. Supposons que la disatnce entre eux soit d. Vu la condition sur l'ensemble, aucun point C ne peut être à une distance supérieure à $2/d$ de la droite AB (condition en rouge sur le dessin). Vu la maximalité de la distance AB, aucun point de l'ensemble ne peut être de l'autre côté de la perpendiculaire à AB par B (sinon la distance de ce point à A seriat plus grande que AB), et de même de l'autre côté (condition en orange sur le dessin). L'ensemble est donc bien inclus dans un rectangle de côtés d et $4/d$, qui est donc bien d'aire 4.

Pour le triangle : soit ABC le triangle de points de l'ensemble ayant la plus grande aire. Vu cette condition, aucun point de l'ensemble ne peut être au-dessus de la parallèle à BC par A, à droite de la parallèle à AB par C ou à gauche de la parallèle à AC par B. L'ensemble aire donc inclus dans un triangle d'aire égale à 4 fois celle de ABC, donc inférieure à 4.





Solution de l'exercice 14

Ici, les transformations autorisées sont au nombre de 3 : on peut passer de (b, r, v) à $(b-1, r-1, v+2)$, $(b-1, r+2, v-1)$ ou $(b+2, r-1, v-1)$. En particulier, on peut remarquer que $r - v \pmod 3$ est constant, et vaut 0 dans la position initiale. Si après les rencontres tous les moutons étaient rouges ou verts, on aurait 55 moutons d'une couleur et 0 de l'autre, et la différence vaudrait respectivement 1 ou $-1 \pmod 3$ ce qui est impossible. La seule couleur finale possible est donc le bleu. De fait, en faisant se rencontrer un mouton bleu et un mouton rouge, puis 17 fois un mouton rouge et un mouton vert, tous les moutons deviennent bleus. Remarquons que la construction (ou une preuve d'existence) est importante, le fait qu'un invariant soit constant entre deux positions ne garantit pas qu'on puisse passer de l'une à l'autre.

Solution de l'exercice 15

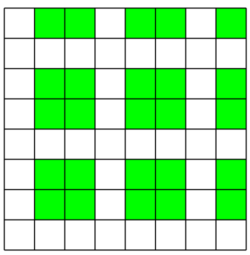
En traitant les diverses possibilités de mouvement, on remarque que la parité du nombre de piles de hauteur paire reste inchangée. Comme ce nombre est impair dans la position initiale et pair dans la position à atteindre, il est impossible d'aboutir à cette dernière.

Solution de l'exercice 16

En coloriant la grille comme un damier, on voit qu'un déplacement vers une case ayant un côté commun change la couleur de la case sur laquelle on se trouve. De plus, les cases de départ et d'arrivée sont de la même couleur, il faut donc avoir réalisé un nombre pair de mouvements pour passer de l'une à l'autre. Mais si l'on visite toutes les cases de la grille, on aura fait $2018^2 - 1$ déplacements, ce qui est impair, d'où une impossibilité.

Solution de l'exercice 17

Dans la figure ci-dessous, chaque rectangle 1×3 contient soit 0 soit 2 cases vertes. La parité du nombre de cases vertes noires ne change donc pas quand on fait des transformations. Elle est paire au début, on ne peut donc pas atteindre une configuration où elle est impaire.



4 Entraînement de fin de parcours

Exercice 1
Trouver les entiers positifs n tels que $n+2$ divise $n^3+3n+29$. On pensera à vérifier que les n trouvés sont solution.

Solution de l'exercice **??**
Supposons que $n+2 \mid n^3+3n+29$. Comme $n+2 \mid (n+2)n^2$, $n+2 \mid n^3+3n+29-(n+2)n^2 = -2n^2+3n+29$. Comme $n+2 \mid (n+2)\times 2n$, $n+2 \mid -2n^2+3n+29+2n\times(n+2) = 7n+29$. Comme $n+2 \mid 7(n+2)$, $n+2 \mid 7n+29-7(n+2) = 15$. Vu que $n+2 \geqslant 2$ et $n+2 \mid 15$, $n+2$ vaut 3, 5 ou 15, donc n vaut 1, 3 ou 13.

On vérifie désormais que $n = 1$, 3 et 13 sont solutions :

1. Pour $n = 1$, $n^3+3n+29 = 33 = 3\times 11$ est divisible par $n+2 = 30$
2. Pour $n = 3$, $n^3+3n+29 = 65 = 5\times 13$ est divisible par $n+2 = 5$
3. Pour $n = 13$, $n^3+3n+29 = 2265 = 15\times 151$ est divisible par $n+2 = 15$

Les solutions du problème sont donc $1, 3$ et 13

Exercice 2
Maena et Aline jouent à un jeu : on note les entiers de 1 à 2019 au tableau. Chacun son tour, Aline et Maena effacent deux nombres et les remplacent par la valeur absolue de leur différence. Aline gagne si le nombre final est pair, sinon Maena gagne. Qui gagne ?

Solution de l'exercice **??**
On va montrer que la parité de la somme des nombres est invariante : si la personne efface deux nombres impairs (de somme paire), ils sont remplacés par un nombre pair. Si la personne efface deux nombres pairs (de somme paire), ils sont remplacés par un nombre pair. Si la personne efface un nombre pair et un nombre impair, ils sont remplacés par un nombre impair. Bilan, la parité du dernier nombre est celle de la somme des entiers de 1 à 2019. Il y a $\frac{2020}{2} = 1010$ entiers impairs au début, donc la somme des nombres de 1 à 2019 est paire. En particulier le dernier nombre est pair : Aline gagne !

Exercice 3
Déterminer tous les couples d'entiers positifs (a, n) tels que $a^2 - n! = 2019$. On pensera à vérifier que les couples trouvés sont solution.

Solution de l'exercice **??**
La présence du a^2 fait penser à regarder modulo 4. Si $n \geqslant 4$, $4 \mid n!$ donc comme $a^2 = 2019 = 3 \pmod 4$. Or un carré modulo 4 est 0 ou 1 ce qui est absurde. On a donc $n = 0, 1, 2$ ou 3. Or $45^2 = 2025$ et $44^2 = 1936$. Comme $1936 < 2019 \leqslant a^2 = 2019 + n! \leqslant 2019 + 6 = 2025$, on a forcément $a = 45$ et $n! = 2025 - 2019 = 6$ donc $n = 3$.

Pour $n = 3$ et $a = 45$, on a bien $a^2 - 3! = 2025 - 6 = 2019$.

Exercice 4
Savinien et Andrei ont volé la banque de Russie : ils ont volé 10 billets distincts de valeur entre 1 et 99 roubles.

1. Savinien décide de repartir avec différents billets. Avec combien de combinaisons de billets différents peut-il partir, s'il ne veut pas repartir sans argent ?

2. Comme Savinien et Andrei sont jaloux, ils veulent repartir chacun avec la même somme d'argent non nulle, quitte à laisser une partie du butin. Montrer qu'ils peuvent chacun repartir avec la même somme.

Solution de l'exercice **??**

1. On numérote les billets de 1 à 10. Pour Savinien, il y a $2^{10}-1$ possibilités pour son butin : il peut choisir le premier billet ou non, choisir le second ou non et ainsi de suite donc 2^{10} choix, mais il ne peut pas tout laisser, d'où $2^{10}-1$ possibilités.
2. Dans tous les cas le butin est entre 1 et 1000 roubles. Comme $2^{10}-1=1023>1000$ il y a deux butins différents qui ont le même montant, on note $i_1,\dots,i_k$ et $j_1,\dots j_h$ les numéros des billets des deux butins, et S la somme des montants. On enlève les numéros en commun, et on appelle S_1 la somme des billets du premier butin restant, S_2 celle du second butin, et T la somme des billets communs. On a donc $S_1+T=S=S_2+T$ donc $S_1=S_2$. On ne peut pas avoir $S_1=S_2=0$, sinon les deux butins initiaux étaient identiques. On a donc $S_1=S_2\neq 0$ donc chacun a un butin disjoint de l'autre et de même valeur.

5 Derniers cours

1 Homothéties (Martin Rakovsky)

Ce cours reprend l'excellent cours de Thomas Budzinski maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/geom_transfos.pdf sur les homothéties.

2 Maths et magie (Aline Cahuzac)

Ce cours sera disponible sur le polcopié à partir du 10 septembre 2019.

IV. Groupe B

Contenu de cette partie

1 Première partie : Arithmétique et combinatoire

1 Notions de base d'arithmétique (Thomas Leplumey, Pierre-Marie Esmenjaud)

Le cours ci-dessous n'a pas été traité dans son intégralité pendant le stage. Cependant, je le laisse à disposition pour les intéressés. Par ailleurs, les sections n'ont pas nécessairement été traitées dans le même ordre en cours qu'elles apparaissent dans le document, mais l'intégralité y est.

Divisibilité

Définition 1.
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $a \neq 0$. On dit que a divise b (ou que b est divisible par a, ou que b est un multiple de a, ou que a est un facteur de b), et on note $a|b$, si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$.

Proposition 2.
Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

1) Transitivité : Si $a|b$ et $b|c$, alors $a|c$.
2) Si $a|b$, alors $a|bc$.
3) Si $a|b$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a^n|b^n$.
4) Si $a|b$ et $a|c$, alors pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, $a|(\lambda b + \mu c)$.
5) Pour tout entier $\lambda \neq 0$, $a|b$ si et seulement si $\lambda a|\lambda b$.
6) Si $a|b$ et $b \neq 0$, alors $|a| \leqslant |b|$.
7) Si $a|b$ et $b|a$, alors $|a| = |b|$.

Démonstration.
1) Il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $b = ka$ et $c = lb$. Alors $c = (kl)a$, donc $a|c$.
2) Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$. Alors $bc = (kc)a$, donc $a|(bc)$.
3) Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b^n = k^n a^n$, donc $a^n|b^n$.
4) Il existe $k, l \in \mathbb{Z}$ tels que $b = ka$ et $c = la$. Alors, pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$, $\lambda b + \mu c = (\lambda k + \mu l)a$, donc $a|(\lambda b + \mu c)$.
5) $a|b$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$, ce qui équivaut à $\lambda b = k(\lambda a)$ (car $\lambda \neq 0$) ie $\lambda a|\lambda b$.
6) Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$, puis $|b| = |k||a|$. Comme $b \neq 0$, alors $k \neq 0$, donc $|k| \geqslant 1$, puis $|k||a| \geqslant |a|$ ie $|b| \geqslant |a|$.
7) Si $a|b$ et $b|a$, alors $|a| \leqslant |b|$ et $|b| \leqslant |a|$, d'où $|a| = |b|$.

□

Remarque 3.

1) Tout nombre entier est divisible par 1 et par lui-même. Ainsi, tout tout entier supérieur ou égal à 2 admet au moins deux diviseurs positifs.

2) 0 n'est diviseur d'aucun nombre.
3) Tout nombre divise 0.

Théorème 4 ([).
ivision euclidienne] Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $b \neq 0$. Alors il existe un unique couple d'entiers $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ tel que :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < |b| \end{cases}$$

Démonstration. 1. Supposons tout d'abord $a, b \geqslant 0$.

Unicité : Supposons l'existence du couple (q, r). Comme $0 \leqslant r < b$, alors on a $bq \leqslant bq + r < bq + b$, ie $bq \leqslant a < b(q+1)$, puis $q \leqslant \frac{a}{b} < q + 1$, c'est à dire : $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$. Alors, on a également : $r = a - b\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$. L'unicité de q et de r découle alors de l'unicité de la partie entière de $\frac{a}{b}$.

Existence : Posons $q = \lfloor \frac{a}{b} \rfloor$ et $r = a - b\lfloor \frac{a}{b} \rfloor$. On a bien $a = bq + r$, et : $q \leqslant \frac{a}{b} < q + 1$, ie $bq \leqslant a < bq + b$ ie $0 \leqslant a - bq < b$ ie $0 \leqslant r < b$.

2. Si désormais $a \leqslant 0$ et $b > 0$, alors, comme $-a \geqslant 0$, d'après le cas précédent, il existe des uniques $q', r' \in \mathbb{Z}$ tels que $-a = bq' + r'$ et $0 \leqslant r' < b$. Alors, $a = b(-q') - r'$.
   — Si $r' = 0$, alors, en posant $q = -q'$ et $r = 0$, on a bien $a = bq + r$ et $0 \leqslant r < b$.
   — Si $r' > 0$, on a : $a = b(-q' - 1) + (b - r')$. En posant $q = -q' - 1$ et $r = b - r'$, on a bien $a = bq + r$, et $0 < r' < b$, d'où : $0 \leqslant r < b$.

   L'unicité de q et r découle alors de celle de q' et de r'.
3. Enfin, si $b < 0$, alors d'après les cas précédents, il existe des uniques $a', r' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = (-b)q' + r'$ et $0 \leqslant r' < -b$. Alors, en posant $q = -q'$ et $r = r'$, on a bien $a = bq + r$ et, étant donné que $b < 0$, on a $|b| = -b$, d'où $0 \leqslant r < |b|$.

□

Exercice 1
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $n(n+1)$ est pair.

Solution de l'exercice 1
2 méthodes :

— n et $n+1$ sont deux entiers consécutifs, donc nécessairement l'un des deux est pair, donc leur produit est pair dans tous les cas.
— $n(n+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k$

Exercice 2
Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n|(n^2 + 2n + 27)$.

Solution de l'exercice 2
Supposons que n soit solution. Comme $n|(n^2+2n)$, alors $n|((n^2+2n+27)-(n^2+2n))$ ie $n|27$.
Réciproquement, on montre de même que si $n|27$, alors $n|(n^2 + 2n + 27)$.
Ainsi, les solutions sont les diviseurs de 27, c'est à dire 1, 3, 9 et 27.

Exercice 3
Trouver tous les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $(n+1)|(n^2+1)$.

Solution de l'exercice 3
Supposons n solution. Comme $(n+1)|(n+1)^2$, alors $(n+1)|((n+1)^2-(n^2+1))$ ie $(n+1)|2n$, puis $(n+1)|(2(n+1)-2n)$ ie $(n+1)|2$ ie $n \in \{0,1\}$.
Réciproquement, on vérifie bien que 0 et 1 fonctionnent.
Ainsi, les solutions sont 0 et 1.

Exercice 4
Trouver tous les entiers $x, y \in \mathbb{Z}$ tel que $(x^2+y^2+x+y)|3$.

Solution de l'exercice 4
On écrit $x^2y^2+x+y = x(x+1)+y(y+1)$, qui est pair d'après l'exercice 1, donc ne peut pas diviser 3 qui est impair.
Ainsi, il n'y a pas de solutions.

PGCD

Définition 5.
[PGCD] Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On appelle Plus Grand Diviseur Commun de a et b, et on note $\mathrm{pgcd}(a,b)$ ou $a \wedge b$, le plus grand nombre entier qui divise à la fois a et b.

Proposition 6.
Soient $a, b, q \in \mathbb{Z}$.

1) Si $a|b$, alors $\mathrm{pgcd}(a,b) = |a|$
   En particulier, $\mathrm{pgcd}(a,0) = |a|$ et $\mathrm{pgcd}(a,a) = |a|$.
2) $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(b, a-bq)$

Démonstration. 1) Supposons que $a|b$. Alors, a est un diviseur commun de a et b.
   Soit d un diviseur commun de a et b. En particulier, $d|a$, donc $d \leqslant a$. Ainsi, a est bien le plus grand diviseur commun de a et b.
2) Si d est un diviseur commun de a et b, alors on a aussi $d|(a-bq)$, donc d est un diviseur commun de b et $a-bq$.
   Réciproquement, si d est un diviseur commun de b et $a-bq$, alors on a aussi $d|(a-bq)+bq)$, soit $d|a$, donc d est un diviseur commun de a et b.
   Ainsi, les diviseurs communs de a et b sont les mêmes que les diviseurs communs de b et $a-bq$. En particulier, leurs PGCD sont égaux : $\mathrm{pgcd}(a,b) = \mathrm{pgcd}(b, a-bq)$.

□

Algorithme d'Euclide

Soient $a, b \in \mathbb{N}$, tels que $a > b$. On souhaite déterminer le PGCD de a et b. On va pour cela effectuer plusieurs divisions euclidiennes.

1) Effectuer la division euclidienne de a par b : $a = b \times q_1 + r_1$ avec $0 \leqslant r_1 < b$

2) Effectuer la division euclidienne de b par r_1 : $b = r_1 \times q_2 + r_2$ avec $0 \leqslant r_2 < r_1$
3) Supposons que l'on dispose déjà de $r_1, r_2, ..., r_k$. On construit r_{k+1} de la manière suivante :
   Effectuer la division euclidienne de r_{k-1} par r_k : $r_{k-1} = r_k \times q_{k+1} + r_{k+1}$ avec $0 \leqslant r_{k+1} < r_k$
4) Répéter l'étape 3) jusqu'à l'obtention d'un r_n nul.

Le PGCD de a et b est alors égal à r_{n-1}, c'est à dire au dernier reste non nul dans l'algorithme d'Euclide.

Démonstration. On a : $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_1)$ (car $r_1 = a - bq_1$).
On a aussi, de même : $\text{pgcd}(b, r_1) = \text{pgcd}(r_1, r_2)$ (car $r_2 = b - r_1 q_2$).
Et à chaque étape : $\text{pgcd}(r_{k-1}, r_k) = \text{pgcd}(r_k, r_{k+1})$ (car $r_{k+1} = r_{k-1} - r_k q_{k+1}$). Ainsi, on a : $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r_1) = \text{pgcd}(r_1, r_2) = ... = \text{pgcd}(r_{n-1}, r_n)$.
Or $r_n = 0$, donc comme tout nombre divise 0, le PGCD de r_{n-1} et 0 est le plus grand diviseur de r_{n-1}, c'est à dire r_{n-1}.
Ainsi : $\text{pgcd}(a, b) = r_{n-1}$. □

Nombres premiers entre eux

Définition 7.
[Nombres premiers entre eux] Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. a et b sont dits premiers entre eux si leurs seuls diviseurs communs sont 1 et -1, c'est à dire que $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Théorème 8 ([).
ezout] Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$au + bv = 1$$

Démonstration. $\Rightarrow$) Supposons a est b premiers entre eux.
Notons $\mathbb{E}$ l'ensemble des nombres entiers strictement positifs s'écrivant sous la forme $au + bv$, avec $u, v \in \mathbb{Z}$. Soit m le plus petit élément de $\mathbb{E}$, notons $m = au_0 + bv_0$. Effectuons la division euclidienne de a par m : $a = mq + r$ avec $0 \leqslant r < m$.
Alors $r = a - mq = a(1 - qu_0) + b(-v_0)$, donc $r \in \mathbb{E}$. Or $r < m$, donc nécessairement $r = 0$ (car sinon, m ne serait pas le plus petit élément de $\mathbb{E}$).
On a donc $a = mq$, soit $m|a$. Avec le même raisonnement, on a également $m|b$. Ainsi, m est un diviseur commun de a et b. Or a et b sont premiers entre eux, donc leur seul diviseur commun est 1. Ainsi $m = 1$, soit : $au_0 + bv_0 = 1$.

$\Leftarrow$) Supposons qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$.
Soit d un diviseur commun de a et b. Alors $d|(au + bv)$, c'est à dire $d|1$, puis $d = 1$ (le seul diviseur de 1 est 1).
Ainsi le seul diviseur commun de a et b est 1, c'est à dire que a et b sont premiers entre eux.

□

Proposition 9.
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ et $\delta \in \mathbb{N}$. $\delta = \text{pgcd}(a, b)$ si et seulement si il existe $a', b' \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux tels que $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$.
En d'autres termes :

1) Si $\delta = \text{pgcd}(a, b)$, alors $\frac{a}{\delta}$ et $\frac{b}{\delta}$ sont premiers entre eux.
2) Si a et b sont premiers entre eux, alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\text{pgcd}(\lambda a, \lambda b) = |\lambda|$.

Démonstration. $\Rightarrow$) Supposons que $\delta = \text{pgcd}(a, b)$. Alors $\delta|a$ et $\delta|b$, donc il existe $a', b' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$.
Soit d un diviseur commun de a' et b'. Alors il existe $a'', b'' \in \mathbb{Z}$ tels que $a' = da''$ et $b' = db''$, puis $a = \delta da''$ et $b = \delta db''$, d'où $(\delta d)|a$ et $(\delta d)|b$, soit δd est un diviseur commun de a et b. Comme δ est le plus grand diviseur commun de a et b, on a donc $|\delta d| \leqslant |\delta|$, soit $|d| \leqslant 1$, soit $|d| = 1$.
Ainsi, les seuls diviseurs communs de a' et b' sont 1 et -1, c'est à dire que a' et b' sont premiers entre eux.

$\Leftarrow$) Supposons qu'il existe $a', b' \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux tels que $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$. δ est donc un diviseur commun de a et b.
Comme a' et b' sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $a'u + b'v = 1$, puis $\delta a'u + \delta b'v = \delta$, soit $au + bv = \delta$.
Soit d un diviseur de a et b. Alors $d|(au + bv)$, soit $d|\delta$, donc $|d| \leqslant \delta$.
Ainsi, δ est le plus grand diviseur commun de a et b, soit $\delta = \text{pgcd}(a, b)$.
Le 2) s'obtient ensuite en appliquant ce résultat à λa et λb, avec $|\lambda|$ dans le rôle de δ et a, b dans les rôles respectifs de a', b'.

□

Proposition 10 (Homogénéité)**.**
Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{Z}$. Alors : $\text{pgcd}(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| \times \text{pgcd}(a, b)$.

Démonstration. Soit $\delta = \text{pgcd}(a, b)$. Par le 1) de la proposition précédente, il existe $a', b' \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux tels que $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$.
Alors : $\text{pgcd}(\lambda a, \lambda b) = \text{pgcd}((\lambda\delta)a', (\lambda\delta)b')) = \lambda\delta = \lambda \times \text{pgcd}(a, b)$ (d'après le 2) de la proposition précédente). □

Proposition 11.
Soient $a, b, d \in \mathbb{Z}$.

1) Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que : $\text{pgcd}(a, b) = au + bv$
2) Si il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $d = au + bv$, alors $\text{pgcd}(a, b)|d$.

Démonstration. 1) Posons $\delta = \text{pgcd}(a, b)$. Il existe $a', b' \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux tels que $a = \delta a'$ et $b = \delta b'$. Alors, a' et b' étant premiers entre eux, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $a'u + b'v = 1$, puis $(\delta a')u + (\delta b')v = \delta$, soit $au + bv = \delta$.

2) Supposons qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $d = au + bv$. Comme $\text{pgcd}(a, b)$ divise a et b, alors il divise $au + bv$, c'est à dire qu'il divise d.

□

Théorème 12 (S)**.**
ient $a, b \in \mathbb{Z}$. Pour tout $d \in \mathbb{Z}$:

$$d|\text{pgcd}(a, b) \iff (d|a \text{ et } d|b)$$

Autrement dit, les diviseurs communs de deux entiers sont exactement les diviseurs de leur PGCD.

Démonstration. $\Rightarrow$) pgcd(a, b) divise a et b, donc par transitivité, d divise a et b.

$\Leftarrow$) D'après la proposition précédente, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que pgcd$(a, b) = au+bv$. Comme d divise a et b, alors il divise $au + bv$, c'est à dire qu'il divise pgcd(a, b).

□

Proposition 13.
Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

1) Si $a|(bc)$ et que a et b sont premiers entre eux, alors $a|c$. (aka. Théorème de Gauss)
2) Si a et b sont premiers entre eux et $a|c$ et $b|c$, alors $(ab)|c$.
3) Si a est premier avec b et avec c, alors a est premier avec bc.

Démonstration. 1) a et b étant premiers entre eux, on a pgcd$(ac, bc) = c$. Or $a|(ac)$ et de plus $a|(bc)$ par hypothèse, donc d'après le théorème précédent, $a|$pgcd(ac, bc), c'est à dire que $a|c$.

2) a et b étant premiers entre eux, on a pgcd$(ac, bc) = c$. Or $a|c$, donc $(ab)|(bc)$, et de même $b|c$, donc $(ab)|(ac)$. Alors, ab divise ac et bc, donc il divise leur PGCD, c'est à dire $(ab)|c$.

3) Par l'absurde, supposons que a ne soit pas premier avec bc. Soit donc p un diviseur premier commun à a et bc. Comme $p|(bc)$ et que p est premier, alors $p|b$ ou $p|c$. Alors, comme p divise aussi a, on a que dans un cas, p est un diviseur commun de a et b, et dans l'autre cas, p est un diviseur commun de a et c, c'est à dire que dans un cas, a et b ne sont pas premiers entre eux, et dans l'autre cas, a et c ne sont pas premiers entre eux, ce qui contredit les hypothèses.

□

PPCM

Définition 14.
[PPCM] Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On appelle Plus Petit Multiple Commun de a et b, et on note ppcm(a, b) ou $a \vee b$, le plus petit nombre entier positif qui soit divisible à la fois par a et b.

Théorème 15 (S).
ient $a, b \in \mathbb{Z}$.

1) pgcd$(a, b) \times$ ppcm$(a, b) = ab$
2) Pour tout $m \in \mathbb{Z}$: ppcm$(a, b)|m \iff (a|m$ et $b|m)$
   Autrement dit, les multiples communs de deux entiers sont exactement les multiples de leur PPCM.

Démonstration. On va montrer 1) et 2) en même temps. Soit $\delta =$ pgcd(a, b) et $\mu = \frac{ab}{\delta}$. On a donc $ab = \mu\delta$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{Z}$:
$(a|m$ et $b|m) \iff (ab|mb$ et $ab|ma) \iff ab|$pgcd$(ma, mb) \iff \mu\delta|m\delta \iff \mu|m$
Alors les multiples communs de a et b sont exactement les multiples de μ. Donc μ est lui-même un multiple commun de a et b,et c'est le plus petit (car il divise tous les autres). Ainsi, $\mu =$ ppcm(a, b), et le 2) résulte de ce qui vient d'être dit sur μ. □

Exercice 5
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que $\text{pgcd}(a,b) + \text{ppcm}(a,b) = a + b$. Montrer que $a|b$ ou $b|a$.

Solution de l'exercice 5
Posons $\delta = \text{pgcd}(a,b)$. On a donc $\delta + \text{ppcm}(a,b) = a + b$, puis $\delta^2 + \delta\text{ppcm}(a,b) = \delta a + \delta b$ ie $\delta^2 + ab = \delta a + \delta b$ ie $(\delta - a)(\delta - b) = 0$, d'où $\delta = a$ ou $\delta = b$, c'est à dire $a|b$ ou $b|a$.

Nombres premiers

Définition 16.
[Nombre premier] Soit $p \in \mathbb{N}$. p est dit premier si il admet exactement deux diviseurs positifs (1 et lui-même).

Remarque 17.
Il n'existe pas de formule mathématique connue à ce jour permettant de trouver tous les nombres premiers. Cependant des algorithmes permettent, moyennant un certain temps de calcul, d'obtenir des listes de nombres premiers.

Crible d'Eratosthène.

Etant donné un entier positif n fixé, on souhaite déterminer tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à n. Pour cela, on dresse une liste de tous les nombres entre 2 et n, et on procède comme suit :

1) Entourer 2, puis rayer tous les multiples de 2.
2) Entourer le prochain nombre qui ne soit ni rayé ni entouré, puis rayer tous ses multiples.
3) Répéter l'étape 2) jusqu'à ce que tous les nombres de la liste soient rayés ou entourés.

A l'issue de ce procédé, les seuls nombres premiers entre 1 et n sont alors les nombres entourés.

Démonstration. En effet, lorsque l'on atteint un nombre p qui n'est pas rayé, cela signifie qu'il n'est multiple d'aucun nombre avant lui (sinon il aurait été rayé à cette étape). Or tous les diviseurs d'un nombre lui sont inférieurs, on en déduit que p n'a pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même, c'est à dire qu'il est premier.
Réciproquement, si un nombre est rayé, cela signifie qu'il est multiple d'un autre nombre avant lui, différent de 1 et lui-même, c'est à dire qu'il n'est pas premier. □

Proposition 18.
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, et p, q des nombres premiers.

1) Le plus petit diviseur supérieur ou égal à 2 de a est premier.
2) Si p ne divise pas a, alors p est premier avec a.
3) Si $p|q$, alors $p = q$.
4) Si $p \neq q$, alors p est premier avec q.
5) Si $p|(ab)$, alors $p|a$ ou $p|b$.

Démonstration. 1) Soit d le plus petit diviseur supérieur ou égal à 2 de a. Supposons par l'absurde que d ne soit pas premier. d admet donc un diviseur positif d' différent de 1 et lui-même. Comme $d'\|d$ et $d|a$, alors par transitivité, $d'|a$ ie d' est un diviseur de a. Comme de plus, $d' \neq 1$ et $d' \neq d$, alors $2 \leqslant d' < d$, ce qui contredit la minimalité de d. Donc d est premier.

2) Les seuls diviseurs positifs de p sont 1 et p. Comme p ne divise pas a, alors le seul diviseur commun positif de a et p est 1, c'est à dire que p est premier avec a.

3) Les seuls diviseurs positifs de q sont 1 et q. Comme p est premier, alors $p \neq 1$, donc nécessairement $p = q$.

4) En contraposant 3), si $p \neq q$, alors p ne divise pas q, donc par 2), p est premier avec q.

5) Supposons que p ne divise pas a. Alors p est premier avec a, donc par le théorème de Gauss, $p|b$.

□

Théorème 19 ([).
uclide] Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il y a un nombre fini de nombres premiers, notons les $p_1, p_2, ..., p_n$. Soit $P = p_1 p_2 ... p_n + 1$, et soit p le plus petit diviseur de P. p est donc un nombre premier, donc fait partie des $p_1, p_2, ..., p_n$, d'où p divise $p_1 p_2 ... p_n = P - 1$. Ainsi, p divise P et $P - 1$, donc il divise $P - (P - 1) = 1$. Alors $p|1$, donc $p \leqslant 1$, ce qui est absurde car p est premier. □

Décomposition en facteurs premiers

Théorème 20 ([).
héorème fondamental] Soit $n \in \mathbb{N}$. n se décompose de manière unique (à l'ordre près des facteurs) comme produit de facteurs premiers.
Formellement, il existe un unique $r \in \mathbb{N}$, des uniques $p_1, p_2, ..., p_r$ premiers et des uniques $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \in \mathbb{N}$ non nuls tels que :

$$\begin{cases} p_1 < p_2 < ... < p_r \\ n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r} \end{cases}$$

Pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, l'entier α_i est appelé valuation p_i-adique (ou p_i-valuation) de n, et est noté $v_{p_i}(n)$ (cf. définition ci-dessous).

Démonstration. **Existence :** Procédons par récurrence forte sur n :

Initialisation : 1 est déjà décomposé en facteurs premiers (en l'occurrence, $r = 0$).

Hérédité : Supposons, pour un n fixé dans $\mathbb{N}$, que tous les entiers entre 1 et $n - 1$ admettent une décomposition en facteurs premiers.
Soit p le plus petit diviseur supérieur ou égal à 2 de n. Alors p est premier. Posons $n' = \frac{n}{p}$. Alors, $n' < n$ (car $p > 1$), donc par hypothèse de récurrence, n' admet une décomposition en facteurs premiers, puis $n = pn'$ en admet une aussi.

L'écriture avec les puissances résulte alors du regroupement des facteurs égaux dans la décomposition.

Unicité : Supposons que n admette deux décompositions en facteurs premiers : $n = p_1p_2...p_r = q_1q_2...q_s$, avec par exemple $r \leqslant s$. Alors p_1 divise $q_1q_2...q_s$, donc comme p_1 est premier, p_1 divise l'un des $q_1, q_2, ..., q_s$, par exemple q_1. On a donc $p_1|q_1$, et comme p_1 et q_1 sont premiers, alors $p_1 = q_1$. Alors, en simplifiant dans l'égalité originale, on obtient : $p_2...p_r = q_2...q_s$.
En recommençant le même procédé, on simplifie successivement les facteurs, jusqu'à ce que tous les facteurs $p_1, p_2, ..., p_r$ aient été simplifiés. Supposons par l'absurde que l'on ait $r < s$. Il reste alors : $1 = q_{r+1}q_{r+2}...q_s$. Alors, chacun des $q_{r+1}, q_{r+2}, ..., q_s$ divise 1, donc ils sont tous égaux à 1, ce qui est absurde car ils sont premiers.
Ainsi, $r = s$, et $p_1 = q_1$, $p_2 = q_2$, ..., $p_r = q_r$, ce qui prouve bien l'unicité de la décomposition.

□

Définition 21.
[Valuation p-adique] Soit $n \in \mathbb{Z}$ et p un nombre premier. On appelle valuation p-adique (ou p-valuation) de n, et on note $v_p(n)$, le plus grand entier α tel que $p^\alpha | n$.
On peut alors écrire $n = p^{v_p(n)} \times n'$ avec $\text{pgcd}(p, n') = 1$.
En outre, $v_p(n)$ est l'exposant de p dans la décomposition en facteurs premiers de n.

Proposition 22.
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$ et p un nombre premier.

1) $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$.
2) $v_p(a^k) = k \times v_p(a)$.
3) $a|b$ si et seulement si pour tout nombre premier q, $v_q(a) \leqslant v_q(b)$.
4) $v_p(a \wedge b) = \min(v_p(a), v_p(b))$
5) $v_p(a \vee b) = \max(v_p(a), v_p(b))$

Démonstration. Soient $p_1, p_2, ..., p_r$ les facteurs premiers qui divisent a ou b. On écrit alors $a = p_1^{\alpha_1}...p_r^{\alpha_r}$ et $b = p_1^{\beta_1}...p_r^{\beta_r}$, avec pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{N}$.

1) $ab = p_1^{\alpha_1+\beta_1}...p_r^{\alpha_r+\beta_r}$, d'où pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, $v_{p_i}(ab) = \alpha_i + \beta_i = v_{p_i}(a) + v_{p_i}(b)$.
2) Simple récurrence sur k, en remarquant que $v_p(a^{k+1}) = v_p(a^k a) = v_p(a^k) + v_p(a)$
3) Supposons $a|b$, il existe donc $c \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ac$, d'où $v_p(b) = v_p(ac) = v_p(a) + v_p(c) \geqslant v_p(a)$.
   Réciproquement, supposons que pour tout p premier, $v_p(a) \leqslant v_p(b)$, alors pour tout $i \in \{1, ..., r\}$, $\alpha_i \leqslant \beta_i$, d'où $\gamma_i = \beta_i - \alpha_i \in \mathbb{N}$ puis, en posant $c = p_1^{\gamma_1}...p_r^{\gamma_r}$, $b = ac$ ie $a|b$.
4) Posons, pour tout $i \in \{1, ..., r\}$,$\delta_i = \min(\alpha_i, \beta_i)$, et $d = p_1^{\delta_1}...p_r^{\delta_r}$. Alors, d est un diviseur commun à a et b.
   Soit d' un diviseur commun à a et b. Alors, pour tout p premier, $v_p(d') \leqslant v_p(a)$ et$v_p(d') \leqslant v_p(b)$, soit $v_p(d') \leqslant v_p(d)$, puis $d'|d$. d est donc bien le plus grand diviseur commun de a et b.

5) Démonstration similaire à celle du 4).

□

Proposition 23.
Soit $n \in \mathbb{Z}$. On décompose n en facteurs premiers :

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r}$$

Les diviseurs positifs de n sont exactement les entiers d s'écrivant sous la forme :

$$d = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}$$

avec pour tout $i \in \{1, 2, ..., r\}$, $0 \leqslant k_i \leqslant \alpha_i$.

Démonstration. Découle du 3) des propriétés sur les p-valuations. □

Proposition 24.
Avec les notations précédentes, n admet exactement $(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)...(\alpha_r+1)$ diviseurs positifs.

Démonstration. En effet, pour tout $i \in \{1, 2, ..., r\}$, k_i peut prendre toutes les valeurs entre 0 et α_i, ce qui donne $\alpha_i + 1$ choix possibles. De plus, l'unicité de la décomposition en facteurs premiers nous assure que ces diviseurs sont tous distincts. Ainsi, on a au total $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_r + 1)$ choix possibles de diviseurs. □

Proposition 25.
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$.
Le PGCD de a et b est le produit de tous les facteurs premiers communs de a et b, affectés de la plus petite valuation.
Le PPCM de a et b est le produis de tous les facteurs premiers divisant a ou b, affectés de la plus grande valuation.
Plus formellement, si $p_1, p_2, ..., p_r$ sont tous les facteurs premiers qui divisent a ou b, alors on a :

$$\begin{cases} a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_r^{\alpha_r} \text{ avec } \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_r \in \mathbb{N} \\ b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_r^{\beta_r} \text{ avec } \beta_1, \beta_2, ..., \beta_r \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Alors :

$$\begin{cases} \text{pgcd}(a, b) = p_1^{\delta_1} p_2^{\delta_2} ... p_r^{\delta_r} \text{ avec } \forall i \in \{1, 2, ..., r\}, \delta_i = \min(\alpha_i, \beta_i) \\ \text{ppcm}(a, b) = p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} ... p_r^{\gamma_r} \text{ avec } \forall i \in \{1, 2, ..., r\}, \gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i) \end{cases}$$

Démonstration. Découle des 4) et 5) des propriétés sur les p-valuations. □

Exercice 6
Factoriser pour $a, b \in \mathbb{N}$ l'expression $a^4 + 4b^4$. En déduire que pour tout nombre premier $p > 5$, $p - 4$ n'est pas une puissance quatrième.

Solution de l'exercice 6
$a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2)^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab)$.
Soit alors p un nombre premier. Supposons par l'absurde que $p - 4$ soit une puissance

quatrième, notons $p - 4 = a^4$ ie $p = a^4 + 4$, et d'après la factorisation ci-dessus : $p = (a^2 + 2 - 2a)(a^2 + 2 + 2a)$. Or, pour $p > 5$, $p - 4 > 1$, et donc $a > 1$ ie $a \geqslant 2$. Alors : $a^2 - 2a + 2 \geqslant 2a - 2a + 2 = 2 > 1$ et $a^2 + 2a + 2 > 5 > 1$, donc p s'écrit comme un produits de facteurs tous deux strictement supérieurs à 1, ce qui entre en contradiction avec le fait que p soit premier.
Ainsi, $p - 4$ n'est pas une puissance quatrième.

2 Principe des tiroirs, récurrence (Yohann D'Anello)

Principe des tiroirs

Théorème 1 (Principe des tiroirs)**.**
Le principe des tiroirs est un principe très intuitif mais très puissant : si on souhaite ranger $n + 1$ chaussettes dans n tiroirs, alors il existe un tiroir qui contient au moins 2 chaussettes. Plus généralement, si on souhaite ranger m chaussettes dans n tiroirs, alors il existe un tiroir qui contient au moins $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil$ chaussettes. Si enfin on souhaite ranger une infinité de chaussettes dans n tiroirs, alors il existe un tiroir qui contient une infinité de chaussettes. Le plus difficile reste alors de choisir les bons « tiroirs » et les bonnes « chaussettes » !

Démonstration.

— Corollaire du point suivant avec $m = n + 1$

— Par l'absurde, si chaque tiroir contient au plus $\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1$ chaussettes, alors on a rangé au total au plus $n \times \left(\left\lceil \frac{m}{n} \right\rceil - 1 \right) < m$ chaussettes : contradiction.

— De la même façon, si chaque tiroir contient un nombre fini de chaussettes, alors on a rangé au total un nombre fini de chaussettes : contradiction.

$\square$

Exercice 1
Un tiroir contient 2019 paires de chaussettes distinctes. Quel est le nombre minimal de chaussettes à sortir si l'on veut être sûr d'avoir sorti au moins une paire de chaussettes identiques ? On précise que le tiroir est tellement en bazar qu'il n'est pas possible de fouiller l'intérieur.

Exercice 2
(*Exercice non traité en cours*) Combien d'enfants faut-il au minimum dans une école pour que l'on soit sûr que 3 d'entre eux au moins aient leur anniversaire le même jour ? (Rappelons que certaines personnes naissent un 29 février.)

Exercice 3
Montrer que si 3 nombres réels sont dans l'intervalle $[0, 1[$, alors il existe parmi eux deux nombres a et b tels que $|b - a| < \frac{1}{2}$.

Exercice 4
Combien d'entiers au minimum doit-on sélectionner dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 20\}$ pour être sûr que cette sélection inclue deux entiers a et b tels que $a - b = 2$?

Exercice 5
Paris compte deux millions d'habitants. Un être humain a, au plus, 600 000 cheveux sur la tête. Quel est le plus grand nombre de Parisiens que l'on peut espérer trouver qui ont exactement le même nombre de cheveux sur la tête ?

Exercice 6
Soit $x_1, x_2, \ldots, x_{2019}, x_{2020}$ des entiers. Montrer qu'il existe $i \neq j$ tels que $x_j - x_i$ soit divisible par 2019.

Exercice 7
Montrer que si 7 nombres distincts sont choisis dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$, alors il en existe deux dont la somme vaut 12.

Exercice 8
Chaque point d'un carré de taille 2x2 est colorié soit en rouge soit en bleu, sans logique précise. Montrer qu'il existe 2 points de la même couleur qui sont distant d'exactement 1.

Exercice 9 (USAMTS 2018)
Chaque point du plan est colorié soit en rouge, soit en vert, soit en bleu. Montrer qu'il existe un rectangle dont tous les sommets sont de la même couleur.

Exercice 10
Montrer que, parmi les stagiaires d'Animath de cette semaine, il en existe deux qui connaissent le même nombre d'autres stagiaires (on suppose la relation « se connaître » symétrique).

Exercice 11
Montrer qu'il existe une infinité de nombres composés uniquement de 0 et de 1 en base décimale divisibles par 2019.

Exercice 12
Soit n un entier. On choisit $n+1$ nombres parmi $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, montrer que l'on peut en trouver deux premiers entre eux. Montrer qu'on peut aussi en trouver deux tels que l'un divise l'autre.

Exercice 13
On choisit 10 entiers deux à deux distincts entre 1 et 100 $\{x_1, x_2, \ldots, x_{10}\}$. Montrer qu'on peut extraire deux sous-ensembles disjoints de même somme.

Exercice 14
(Bolzano-Weierstrass) On considère une suite infinie de réel dans l'intervalle $[0, 1[$ $x_0, x_1, x_2, \ldots$.

— Montrer que soit l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ soit l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$ contient une infinité d'éléments de la suite.

— On se fixe un entier naturel $n \geq 1$. Montrer qu'il existe un entier k dans l'ensemble $\{0, 1, 2, \ldots, 2^n - 1\}$ tel que l'intervalle $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$ contienne une infinité d'éléments de la suite.

Solution de l'exercice 1
Par le principe des tiroirs, si l'on a sorti 2020 chaussettes, alors on est assuré d'avoir sorti deux chaussettes identiques. En revanche, il est possible de sortir 2019 chaussettes distinctes : le nombre recherché est 2020.

Solution de l'exercice 2
De la même manière, si on a 733 élèves, alors par le principe des tiroirs on est assuré d'avoir au moins trois élèves qui ont la même date d'anniversaire (il y a 366 dates possibles). Ce nombre est minimal car il existe une configuration à 732 élèves sans avoir trois élèves avec la même date d'anniversaire.

Solution de l'exercice 3
En partitionnant l'intervalle en $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$, On a par principe des tiroirs l'un des intervalles qui contient au moins 2 des 3 réels choisis, qui conviennent alors.

Solution de l'exercice 4
Considérons les tiroirs de la forme $\{1, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{5, 7\}$, $\{6, 8\}$, $\{9, 11\}$, $\{10, 12\}$, $\{13, 15\}$, $\{14, 16\}$, $\{17, 19\}$, $\{18, 20\}$. En choisissant 11 entiers, par le principe des tiroirs, il en existera deux qui seront dans le même tiroir, et donc de différence 2. Cette quantité est bien minimale car l'ensemble $\{1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18\}$ est de taille 10 et ne contient pas de tels entiers a et b.

Solution de l'exercice 5
Ici, les tiroirs sont les nombres de cheveux et les chaussettes seront les Parisiens. On a alors 2000000 chaussettes pour 600001 tiroirs (on oublie pas les Parisiens chauves) : le principe des tiroirs nous assure qu'il est possible de trouver $\left\lceil \frac{2000000}{600001} \right\rceil = 4$ Parisiens qui ont exactement le même nombre de cheveux.

Solution de l'exercice 6
Lorsque l'on fait la division euclidienne d'un entier par 2019, le reste sera compris entre 0 et 2018, soit 2019 possibilités. En regroupant chaque entier selon son reste dans la division euclidienne par 2019, on obtient par principe des tiroirs deux entiers qui ont le même reste, et donc la différence des deux sera divisible par 2019.

Solution de l'exercice 7
Considérons les tiroirs $\{1, 11\}$, $\{2, 10\}$, $\{3, 9\}$, $\{4, 8\}$, $\{5, 7\}$, $\{6\}$. En choisissant 7 nombres, on va choisir par principe des tiroirs deux entiers qui seront dans le même tiroir, et leur somme fera nécessairement 12.

Solution de l'exercice 8
Traçons le triangle équilatéral défini par les sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. Par principe des tiroirs, deux de ces sommets ont la même couleur et sont distants de 1.

Solution de l'exercice 9
Traçons le rectangle plein à coordonnées entières de taille 4×82 dont le sommet en bas à gauche est $(0, 0)$. Il y a $3^4 = 81$ façons de colorier une colonne de 4 points. Par principe des tiroirs, parmi les 82 colonnes, il en existe 2 identiques. Or, sur ces deux colonnes, parmi les 4 points, deux sont de la même couleur. Il suffit alors de sélectionner ces quatre sommets et de tracer le rectangle adéquat.

Solution de l'exercice 10
Soit n le nombre de stagiaires (on a $n = 80$ mais peu importe). Chaque stagiaire connaît entre

0 et $n-1$ autres stagiaires. Si par l'absurde chacun connaît un nombre différent d'autres stagiaires, alors nécessairement il y a un stagiaire qui ne connaît personne, un qui connaît une personne, un qui connaît deux personnes, etc. Mais alors n stagiaire connaît $n-1$ autres personnes, soit tout le monde, y compris celui qui ne connaît personne : absurde.

Solution de l'exercice 11

Considérons l'ensemble des nombres entiers constitués uniquement du chiffre 1 en base décimale : $\{1, 11, 111, 1111, \ldots\}$. Par principe des tiroirs, puisque l'ensemble des restes possibles par la division euclidienne par 2019 est fini, il existe un entier $0 \leq r < 2019$ tel qu'il existe une infinité d'entiers ne s'écrivant que avec des 1 tels que le reste dans la division euclidienne par 2019 soit r. Mais alors la différence de deux de ces nombres sera composée entièrement de 0 et de 1 en base décimale et sera divisible par 2019. De plus, la considération du nombre de chiffres nous assure qu'on a bien une infinité de tels entiers. On aurait pu également simplement multiplier un tel nombre par une puissance de 10 pour en avoir une infinité.

Solution de l'exercice 12

En considérant les n tiroirs de la forme $\{2k-1, 2k\}$ où $1 \leq k \leq n$, on voit qu'on peut trouver deux entiers consécutifs qui seront forcément premiers entre eux.

Chaque entier peut s'écrire sous la forme $2^s(2t+1)$. Or t varie entre 0 et $n-1$, il existe alors deux entiers parmi les $n+1$ choisis qui ont la même partie impaire et ne diffèrent que par la puissance de 2. Il est alors clair que l'un divise l'autre.

Solution de l'exercice 13

Pour chacun des entiers, on a le choix de le sélectionner ou non : il existe alors $2^{10} = 1024$ sous-ensembles possibles. Or la somme d'un sous-ensemble est nécessairement comprise entre 1 et 1000 (on peut en réalité raffiner l'intervalle) : on peut alors créer au plus 1000 sommes, qui représenteront nos tiroirs. Par le principe des tiroirs, il existe deux sous-ensembles distincts de même somme. Cependant, on est pas assuré qu'ils soient disjoints. Il suffit pour cela de supprimer les éventuels éléments en commun pour arriver au résultat souhaité.

Solution de l'exercice 14

— Il s'agit d'une simple application du principe des tiroirs dans le cas où on a une infinité de chaussettes.

— De la même façon, c'est immédiatement le principe des tiroirs : notre suite est infinie et les intervalles de la forme $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$ forment une partition de $[0, 1[$. On a alors l'un des intervalles de cette forme qui contient une infinité de termes de la suite.

Récurrence

Théorème 2 (Principe de récurrence)**.**
La récurrence est un outil fondamental pour certaines démonstrations.

Considérons une propriété mathématique dépendant d'un paramètre n. Par exemple $\mathcal{P}_n$: « $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}} = n$ ». On veut chercher à montrer cette propriété pour tout entier n. Le principe de récurrence indique que si on est capable de montrer que la propriété est vraie pour un certain entier N (très souvent 0, 1 ou 2) (phase d'initialisation) et que si $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain entier n, alors $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi (phase d'hérédité), alors la propriété $\mathcal{P}_n$ sera vraie pour tout entier $n \geq N$. Pour garder le même exemple (simple) :

— Initialisation : $1 = 1$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie

— Héréditié : Supposons $\mathcal{P}_n$ vérifiée et montrons que $\mathcal{P}_{n+2}$ l'est également.

$$\underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{n+1 \text{ fois}} = \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}} + 1$$

Or par hypothèse de récurrence, $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n \text{ fois}} = n$ donc $\underbrace{1+1+\cdots+1+1}_{n+1 \text{ fois}} = n+1$, et $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

— Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est alors vérifiée pour tout entier $n \geq 1$.

Il peut arriver qu'on est besoin de supposer les propriétés $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ pour chercher à montrer la propriété $\mathcal{P}_{n+2}$. On parle dans ce cas de *récurrence double*. On a alors besoin de deux initialisations.

On peut également avoir besoin dans certains cas que toutes les propriétés $\mathcal{P}_0, \mathcal{P}_1, \ldots, \mathcal{P}_n$ soient vérifiées pour montrer la propriété $\mathcal{P}_{n+1}$. On parle de *récurrence forte*.

Exercice 15
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0+1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 16
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 17
Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

Exercice 18
Montrer que la somme des n premiers entiers impairs vaut n^2.

Exercice 19
Montrer que pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

Exercice 20
Montrer que pour tout entier $n \geq 3$, la somme des angles intérieurs d'un polygone non croisé à n côtés est de $(n-2)\pi$ rad (ou $(n-2) \times 180°$).

Exercice 21
(*Exercice non traité en cours*) Soit b un entier naturel non nul. Montrer que pour tout entier naturel n, il existe un unique couple d'entiers naturels (q, r) tel que $r < b$ et $n = qb + r$.

Exercice 22
Soit x un réel non nul tel que $x + \frac{1}{x}$ soit entier. Montrer que pour tout entier naturel n, $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier.

Exercice 23
Soit n un entier naturel non nul. On trace n cercles distincts dans le plan. Montrer qu'on peut colorier chaque région du plan ainsi délimitée soit en rouge soit en bleu de sorte que deux régions séparées par un arc de cercle soient de couleur différente.

Exercice 24
(Fibonacci, *Non traité en cours*) Pour monter les escaliers, Leonardo sait faire des pas de 1 marche et des pas de 2 marches. De combien de manières différentes peut-il monter un escalier à n marches ? On établira une relation de récurrence, puis on montrera à l'aide de $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ et de $\overline{\varphi} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ que pour tout entier naturel n, ce nombre vaut $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}\right)$.
On pourra utiliser pour cela les relations $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $\overline{\varphi}^2 = \overline{\varphi} + 1$.

Exercice 25
De combien de manières peut on paver une bande horizontale $2 \times n$ avec des briques 1×2 ou 2×1 ?

<u>*Solution de l'exercice 15*</u>
On note $\mathcal{P}_n$ la propriété « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0 + 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ ».

— <u>Initialisation :</u> $0 = \frac{0\times 1}{2}$ donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
— <u>Hérédité :</u> Soit n un entier tel que $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est également.
  $0+1+2+\cdots+n+(n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)$ par hypothèse de récurrence
  Donc $0+1+2+\cdots+n+(n+1) = (n+1)\left(\dfrac{n}{2}+1\right) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$: $\mathcal{P}_{n+1}$ est alors vérifiée.

Par principe de récurrence, on a alors montré que $0+1+2+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

<u>*Solution de l'exercice 16*</u>
On note $\mathcal{P}_n$ la propriété « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0^2 + 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ».

— <u>Initialisation :</u> $0^2 = 0 = \frac{0\times 1\times 1}{6}$ donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.
— <u>Hérédité :</u> Soit n un entier tel que $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est également.
  $0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$ par hypothèse de récurrence
  Donc $0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 = (n+1)\left(\dfrac{n(2n+1)}{6}+(n+1)\right) = \dfrac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$: $\mathcal{P}_{n+1}$ est alors vérifiée.

Par principe de récurrence, on a alors montré que $0^2+1^2+2^2+\cdots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

<u>*Solution de l'exercice 17*</u>
On note $\mathcal{P}_n$ la propriété « $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k = 0^3 + 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$ ».

— <u>Initialisation :</u> $0^3 = 0 = \left(\frac{0\times 1}{2}\right)^2$ donc $\mathcal{P}_0$ est vérifiée.

— <u>Hérédité :</u> Soit n un entier tel que $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est également.
$0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3$ par hypothèse de récurrence
Donc $0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3+(n+1)^3 = (n+1)^2\left(\dfrac{n^2}{4}+(n+1)\right) = \dfrac{(n+1)^2}{4}(n^2+4n+4) = \dfrac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$: $\mathcal{P}_{n+1}$ est alors vérifiée.

Par principe de récurrence, on a alors montré que $0^3+1^3+2^3+\cdots+n^3 = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

<u>Solution de l'exercice 18</u>
Notons $\mathcal{P}_n$ la propriété « $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$ ».

— <u>Initialisation :</u> $1 = 1^1$ donc $\mathcal{P}_1$ est vérifiée. (*On aurait pu aussi initialiser à 0 mais cela peut être plus difficile à comprendre*)

— <u>Hérédité :</u> Soit n un entier tel que $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée, montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est également.
$1+3+\cdots+(2n-1)+(2n+1) = n^2+2n+1 = (n+1)^2$ car par hypothèse de récurrence, $1+3+\cdots+(2n-1) = n^2$. Donc $\mathcal{P}_{n+1}$ est vérifiée.

Par principe de récurrence, on a montré que la somme des n premiers entiers impairs vaut n^2.

<u>Solution de l'exercice 19</u>
On note que si $n=4$, on a bien $16 = 2^4 \geq 4^2 = 16$ donc la propriété est vraie au rang $n=4$. (Initialisation)

Soit n un entier tel que $2^n \geq n^2$. Alors $2^{n+1} = 2\cdot 2^n \geq 2n^2$ par hypothèse de récurrence. Or, puisque $n \geq 4$, $n^2-1 = (n+1)(n-1) \geq 2n$ car $n-1 \geq 2$ et $n+1 \geq n$, donc $n^2 \geq 2n+1$. Finalement, $2^{n+1} \geq (n+1)^2$ et la propriété est bien vérifiée au rang $n+1$. (Hérédité)

Par principe de récurrence, la propriété est bien vérifiée pour tout entier $n \geq 4$.

<u>Solution de l'exercice 20</u>
Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété : « La somme des angles intérieurs de tout polygone non croisé à n côtés est $(n-2)\pi$ rad = $(n-2)\times 180°$ ».

— On sait que la somme des angles d'un triangle vaut $180°$ (vu en cours de géométrie), donc la propriété $\mathcal{P}_3$ est vraie. (Initialisation)

— Soit n un entier tel que $\mathcal{P}_n$ soit vérifiée, et montrons que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est également.
Considérons un polygone non croisé à $n+1$ côtés. Considérons trois sommets consécutifs, disons A, B et C. Retirons le point B et considérons le polygone formé par l'arête $[AC]$ et le reste du polygone initial. C'est un polygone non croisé à n côtés : la somme de ses angles intérieurs vaut donc par hypothèse de récurrence $(n-2)\pi$. Réintroduisons désormais le point B. On doit ajouter les angles $\widehat{CAB}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$. Or le polygone ABC est un triangle, donc la somme de ses angles vaut π rad = $180°$. La somme totale des angles de notre polygone initial est donc $(n-2)\pi+\pi = (n-1)\pi$ rad = $(n-1)\times 180°$: c'est ce que nous voulions. (Hérédité)

Par principe de récurrence, on a montré que la somme des angles d'un polygone non croisé à n sommets valait $(n-2)\pi$ rad $= 180°$.

Solution de l'exercice 21

On procède par récurrence sur n.

- Supposons $n = 0$. L'existence est immédiate : le couple $(0, 0)$ fonctionne. Montrons l'unicité. Soit (q, r) un couple d'entiers naturels tel que $0 \leq r < b$ et $0 = qb + r$. Puisque qb et r sont positifs, on a nécessairement $qb = r = 0$ et donc $(q, r) = 0$: on a bien bien l'unicité de la décomposition.
- Soit n un entier tel qu'il existe un unique couple d'entiers naturels (q, r) vérifiant $0 \leq r < b$ et $n = qb + r$. On a alors $n + 1 = qb + r + 1$.
  - Si $r < b - 1$, alors $r + 1 < b$ et le couple $(q, r + 1)$ convient.
  - Si $r = b - 1$, alors $n + 1 = (q + 1)b$ et le couple $(q + 1, 0)$ convient.

  Or, par le même argument, si on arrive à écrire $n + 1 = q'b + r'$, alors $n = q'b + (r' - 1)$ si $r' \neq 0$ et sinon $n = (q' - 1)b + (b - 1)$ ce qui assure par unicité (hypothèse de récurrence) que nécessairement $(q', r') = (q, r + 1)$ ou $(q', r') = (q + 1, 0)$ selon les cas. On a alors bien l'unicité de la décomposition au rang $n + 1$.

Par principe de récurrence, on a donc montré l'existence et l'unicité de la division euclidienne pour tout entier naturel.

Solution de l'exercice 22

Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété « $x^n + \frac{1}{x^n}$ est entier ». Raisonnons par récurrence double pour montrer que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

- Les propriétés $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vérifiées par hypothèse.
- Soit n un entier tel que $\mathcal{P}_n$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ soient vérifiées, et montrons que $\mathcal{P}_{n+2}$ l'est également. Notons que :
$$\left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) = x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} + x^n + \frac{1}{x^n}$$
  Donc $x^{n+2} + \frac{1}{x^{n+2}} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\left(x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}}\right) - \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)$ est entier car tous les termes le sont par hypothèse de récurrence : c'est exactement $\mathcal{P}_{n+2}$.

Par principe de récurrence (double), on a montré que si $x + \frac{1}{x}$ est entier, alors $x^n + \frac{1}{x^n}$ l'est également pour tout entier naturel n.

Solution de l'exercice 23

On procède par récurrence sur le nombre de cercles.

- Si on a 0 ou 1 cercle, le résultat est immédiat, il n'est pas difficile de colorier convenablement le plan.
- Supposons que l'on sache colorier le plan lorsque l'on a n cercles. Considérons alors $n+1$ cercles disposés dans le plan. Prenons l'un des cercles et retirons-le. Il reste alors n cercles dans le plan : par hypothèse de récurrence, on sait colorier le plan. On peut alors réintroduire ce cercle. En changeant toutes les couleurs des zones à l'intérieur de cercle, on remarque sans difficulté un coloriage convenable.

Par principe de récurrence, on est alors capable de colorier le plan de sorte que deux zones qui se touchent soient de couleur différente.

Solution de l'exercice 24

Notons F_n le nombre de façons de monter un escalier à n marches. Il est clair que $F_0 = 1$ car il y a une seule façon de ne pas monter un escalier (en ne faisant rien), et $F_1 = 1$ car l'unique façon de monter un escalier à 1 marche et de monter cette marche.

Revenons au cas général. Pour arriver sur la $(n+2)$-ème marche, on peut soit venir de la $(n+1)$-ème marche et avoir monté une marche, soit venir de la n-ème marche et avoir monté 2 marches, et il n'y a pas d'autres possibilités. Or il y a F_{n+1} possibilités pour arriver à la $(n+1)$-ème marche et F_n possibilités pour arriver à la n-ème marche. On obtient alors la relation de récurrence de Fibonacci :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

Montrons alors par récurrence que pour tout entier naturel n, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \varphi^{n+1}\right)$. Puisque la relation de récurrence nécessite d'avoir les deux termes précédents, on va procéder par récurrence double.

— Notons que pour $n = 0$, on a $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi - \overline{\varphi}) = \frac{1}{\sqrt{5}} \times \sqrt{5} = 1 = F_0$ et pour $n = 1$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^2 - \overline{\varphi}^2) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi + 1 - \overline{\varphi} - 1) = 1 = F_1$: on a l'initialisation aux rangs 0 et 1.

— Supposons que l'égalité soit établie aux rangs n et $n+1$, et montrons-là au rang $n+2$.

$$\begin{aligned}
F_{n+2} &= F_{n+1} + F_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left((\varphi^{n+1} + \varphi^n) - (\overline{\varphi}^{n+1} + \overline{\varphi}^n)\right) && \text{(Hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n(\varphi + 1) - \overline{\varphi}^n(\overline{\varphi} + 1)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2} - \overline{\varphi}^{n+2}\right) && \text{car } \varphi + 1 = \varphi^2 \text{ et } \overline{\varphi} + 1 = \overline{\varphi}^2
\end{aligned}$$

Ce qui conclut notre hérédité.

On a donc montré par récurrence double que pour tout entier naturel n, $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}\right)$. Ce résultat ne semble pas *a priori* intuitif ! Il n'est pas non plus évident de voir que ce nombre est bel et bien toujours entier.

Solution de l'exercice 25

Cet exercice est similaire au précédent. On note F_n le nombre de façons de paver une bande horizontale $2 \times n$ avec des briques 1×2 ou 2×1.

Il est clair que $F_0 = 1$ et $F_1 = 1$: L'unique façon de paver le vide est de ne mettre aucun domino, et seul un domino 2×1 tient dans une bande 2×1.

Revenons au cas général avec une bande de taille $n+2$. Intéressons nous aux 4 cases de droites. Soit les deux cases de droites sont occupées par un domino 2×1 et en l'enlevant on obtient une bande $2 \times (n+1)$ pavée convenablement (F_{n+1} possibilités), soit les 4 cases de droites sont deux dominos horizontaux 1×2 et dans ce cas en les retirant on obtient une bande $2 \times n$ correctement pavée (F_n possibilités). Les deux cas étant disjoints, on obtient alors la relation :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

La même récurrence que l'exercice précédent permet de conclure que $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \overline{\varphi}^{n+1}\right)$.

3 Stratégie des jeux, TD de combinatoire (Théodore Fougereux)

Symétrie en théorie des jeux

Exemple et exercices

La symétrie est une idée souvent utile dans les jeux impliquant deux personnes. L'idée est de reproduire le mouvement de l'adversaire symétriquement pour pouvoir toujours s'assurer un coup légal.

Exemple 1.
Alice et Bob jouent au morpion sur une grille 2020×2020, leur but est d'aligner 2020 croix (ou 2020 ronds). Un tour consiste à placer une croix pour Alice puis un rond pour Bob. Si Alice et Bob font une ligne au même tour, il y a égalité, sinon le premier a créer une ligne a gagné. Montrer que Bob peut s'assurer de ne pas perdre.

Exercice 1
On considère une table circulaire et des pièces de 1 euro. Alice et Bob placent à leur tour une pièce sur la table, le premier qui ne peut plus a perdu. Si Alice commence, qui possède une stratégie gagnante ?

Exercice 2
On considère une grille 4×2019, Alice et Bob placent à leur tour une pièce en forme de T.. Le premier qui ne peut plus jouer a perdu. Alice commence, qui possède une stratégie gagnante ?

Exercice 3
Une mouche et k araignées se déplacent sur une grille 2019×2019. A son tour, la mouche peut se déplacer de 1 case et les k araignées peuvent se déplacer d'une case. Quel est le k minimal pour lequel les araignées sont sures d'attraper la mouche.

Exercice 4
On considère n îles dont deux contiennent des usines. Pour construire une route entre deux îles, il faut que cette route soit reliée (directement ou pas) à une usine. Alice et Bob place chacun leur tour une nouvelle route, le premier qui pose une route qui relie les deux usines crée une guerre commerciale et perd. Qui possède une stratégie gagnante ?

Exemple 2.
Il suffit pour Bob de jouer toujours le symétrique d'Alice par rapport au centre.

Solution de l'exercice 1
Alice peut placer la première pièce au centre puis jouer toujours le symétrique par rapport au centre de la table.

Solution de l'exercice 2
Alice peut jouer un T au centre, de telle sorte à ce que la barre du T soit accolée au bord. Puis elle pourra toujours jouer le symétrique du coup de Bob.

Solution de l'exercice 3
On montre que 2 araignées conviennent : lorsque la mouche se déplace d'une coordonnée, la mouche sur cette coordonnée reproduit le mouvement, l'autre se rapproche.

Solution de l'exercice 4
Si n est pair, on partitionne les îles en deux groupes symétriques, et Bob joue toujours le coup symétrique d'Alice. Sinon on perd quand il y a deux composantes connexes complètes, de cardinal $\binom{k}{2} + \binom{n-k}{2}$; selon la congruence de n modulo 4 on peut en déduire qui gagne.

– Principe de l'extremum –

Définitions

Définition 3.
Minimum : Le minimum m d'un ensemble E est l'unique élément tel que $m \in E$ et $m \leq x$ pour tout $x \in E$
Exemple : 1 est le minimum de $\{1, 2, 3\}$.

Minorant : Un minorant d'un ensemble E est un nombre M tel que $M \leq x$ pour tout $x \in E$
Exemple : $-\pi$ est un minorant de $\{1, 2, 3\}$

Principe

Une deuxième idée importante est de considérer le minimum ou le maximum d'une certaine quantité quand cela est possible. Pour cela on commence par rappeler deux principes fondamentaux :

• Tout ensemble fini de réels admet un maximum et un minimum.
Démonstration : Par récurrence sur le cardinal de l'ensemble.

• Tout sous ensemble d'entiers positifs admet un minimum.

' Ne pas confondre un ensemble minoré et un ensemble possédant un minimum. Par exemple $\mathbb{R}_{>0}$ est minoré mais n'admet pas de minimum.

Exercices

Exercice 5
Soit S un ensemble de points tel que tout point de S est milieu de deux autres points de S, montrer que S est infini.

Exercice 6
On considère un ensemble fini de points S tel que toute droite passant par deux points de S passe aussi par un troisième. Montrer que tous les points de S sont alignés.

Exercice 7
On considère un ensemble T de $2n$ points du plan. Montrer qu'il est possible de relier les points par paire de sorte que deux segments ne se croisent pas.

Exercice 8
A chaque point à coordonnées entières du plan, on attribue un nombre entier strictement positif, tel que chaque nombre est égal à la moyenne arithmétique de ses quatre voisins (en haut, en bas, à gauche et à droite). Montrer que toutes les valeurs sont égales.

Exercice 9
Lors d'une soirée dansante, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles, mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon. Mq il existe deux garçons g, g' et deux filles f, f' tq g a dansé avec f mais pas avec f' , et g' a dansé avec f' mais pas avec f

Exercice 10
Sept amis ont ramassé en tout cent champignons, chacun en a ramassé un nombre différent. Montrer qu'il en existe trois parmi eux qui ont ramassé à eux trois au moins 50 champignons.

Solution de l'exercice 5
On considère le point de plus petite abscisse et plus petite ordonnée, il ne peut pas être milieu.

Solution de l'exercice 6
On considère le point le plus P proche d'une droite reliant des points de S, disons (d). Cette droite doit contenir trois points. Donc il en existe deux d'un côté de la projection orthogonale, disons A puis B. On montre que A est plus proche de PB que P de (d), absurde. Donc tous les points sont confondus.

Solution de l'exercice 7
Parmi toutes les configurations, on considère celle qui minimise les distances des segments. Si deux segments se croisent, on peut les décroiser et diminuer la somme des distances par inégalité triangulaire, absurde !

Solution de l'exercice 8
Il existe un minimum des entiers écrit sur l'un des points, ses quatre voisins sont supérieurs ou égaux à celui ci, ce qui n'arrive que si ils sont tous égaux à lui. Donc ses 4 voisins sont égaux au minimum, puis de proche en proche toutes les cases du plan doivent être égales.

Solution de l'exercice 9
On considère le garçon g ayant dansé avec le plus de fille. On considère une fille f' avec qui il n'a pas dansé. f' a dansé avec un garçon g'. g' n'a pas pu dansé avec toutes les même filles que g par hypothèse. Donc on peut trouver f qui n'a pas dansé avec g' mais avec g.

Solution de l'exercice 10
On ordonne les amis par nombre de champignon différent, disons $a_1 > a_2 > \ldots > a_7$. Si $a_4 \geq 15$, on a $a_3 + a_2 + a_1 \geq 16 + 17 + 18 = 51$, et c'est gagné. Donc $a_4 \leq 14$ et $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leq 14 + 13 + 12 + 11 = 50$, donc $a_1 + a_2 + a_3 \geq 50$, et on a gagné.

– Invariants et Monovariants –

Principe et exercices

La troisième idée très importante est celle des invariants et monovariants.

Définition 4.
Invariant : Quantité qui ne varie pas au cours de transformations dans un problème.

Idée principale : Si une quantité est invariante, elle sera la même avant et après plusieurs transformations. Pour montrer qu'on ne peut pas arriver à une certaine configuration, on peut donc essayer de trouver un invariant qui après certaines transformations ne sera pas compatible avec la configuration ou l'on veut arriver.

Monovariant : Quantité qui ne varie que d'une seule manière (croissance, décroissance souvent).

Idée principale : Souvent un monovariant permet de montrer qu'une certaine quantité va varier seulement d'une seule manière et ne pourra pas atteindre une certaine condition finale. Ou par exemple si une quantité positive décroît strictement à chaque étape, elle ne pourra le faire qu'un nombre fini de fois.

Exemple 5.
10 nains sont assis en rond. On les numérote dans l'ordre de 1 à 10. Les nains 1 et 5 possèdent une pièce. A chaque minute, on décide de donner une pièce à deux nains consécutifs. Montrer que les nains n'auront jamais tous autant de pièces.

Exercice 11
Panoramix revient dans cette clairière et constate qu'il y a 6 arbres en cercles et un oiseau sur chaque arbre. Tous les jours, un oiseau va sur l'arbre à sa gauche ou à sa droite. Tous les oiseaux peuvent-ils se retrouver sur le même arbre ?

Exercice 12
Une bactérie se développe sur une grille 100×100. Elle peut contaminer une nouvelle case si et seulement si deux cases adjacentes étaient déjà contaminées. Quelle est le nombre minimal de case initiale contaminée pour que la bactérie puisse se propager partout ?

Exercice 13
Trois amis jouent au jeu suivant. Il se positionnent chacun sur les points de coordonnée $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$. Toutes les minutes, l'un des trois amis se déplace quelque part sur la parallèle à la droite celle passant par ses deux amis (passant par sa position). Peuvent-ils arriver aux coordonnées $(0,0)$, $(1,1)$, $(0,2)$?

Exercice 14
On place une pièce sur le point $(0,0)$, et à chaque étape on s'autorise à remplacer une pièce

à la position (i, j) par deux pièces aux positions $(i+1, j)$ et $(i, j+1)$, à condition qu'il n'y ait pas déjà de pièce. Montrer qu'il y aura toujours une pièce de coordonnées (a, b) telle que $a + b \leq 3$.

Exercice 15
On place n pièces sur pile (P) ou sur face (F). A chaque étape, on appelle k le nombre de F et on retourne la k-ème pièce. Montrer qu'on arrive toujours à $PP...PPP$. **Bonus :** En combien de coups y arrive-t-on en moyenne ?

Éléments de solution

Exemple 6.
On regarde les nains de numéro impair, ils ont au départ 2 pièces et les nains pair 0. A chaque étape on donne autant de pièces aux nains pairs et impairs, donc la différence de leur nombre de pièces est invariante et vaudra toujours 2 (et donc jamais 0).

Solution de l'exercice 11
A nouveau, on peut numéroter les arbres de 1 à 6. A chaque étape, il y a autant d'oiseaux sur les arbres pairs et impairs, il n'y aura donc jamais tous les oiseaux sur le même arbre.

Solution de l'exercice 12
On constate que le périmètre est monovariant : il ne peut que décroître. Le périmètre de départ est au plus 4 fois le nombre de cases initiales. Le périmètre finale est 4×100. Il faut donc au moins 100 cases, et on peut prendre les cases d'une diagonale.

Solution de l'exercice 13
L'aire du triangle est monovariante, puisqu'à chaque fois on fixe une base et une hauteur. L'aire initiale est $1/2$ et ne pourra donc jamais valoir 1.

Solution de l'exercice 14
On appelle diagonale d_n l'ensemble des points (i, j) telles que $i + j = n$. On constate que 1 point de d_n engendre deux points de d_{n+1}. On a donc envie de donner un poids différents aux d_i. On attribut donc un poids $\frac{1}{2^i}$ aux points de la diagonale i. Ainsi la somme des poids des points est invariante. Au départ elle vaut 1. Si l'énoncé n'est pas vérifié, la somme totale des poids possibles vaut $\frac{1}{2^0} + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + ...$ On peut montrer par récurrence que cette somme vaut $\frac{2^{n+2} - (n+3)}{2^n}$ jusqu'au rang n. Cette somme tend vers 4, et on voudrait enlever un poids total de : $1 + 1 + \frac{3}{4} + \frac{1}{2} > 3$, donc il resterai un poids total strictement plus petit que 1, absurde.

Solution de l'exercice 15
On considère l'ordre anti-lexicographique. C'est à dire l'ordre du dictionnaire mais en partant de la fin du mot. On constate qu'il décroît au bout d'un certain nombre d'étape, donc les opérations termineront forcément.

4 Modulo (Colin Davalo)

L'objectif de cette scéance était de découvrir les congruences, et le petit théorème de Fermat. Le cours a repris la partie 2 du cours d'arithmétique débutant de la POFM, au lien suivant :

http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/arith_base.pdf

Voici les exercices traités en classe, avec leurs solutions.

Exercice 1
Trouvez tous les entiers positifs ou nuls x, y tels que :

$$2^x = y^2 + y + 1$$

Solution de l'exercice 1
Le côté gauche de l'équation est pair si $x > 0$. Le côté droit est toujous impair : en effet y et y^2 sont de même parité, leur somme est donc paire, donc $1 + y + y^2$ est toujours impair.

Si $x = 0$, alors il faut et il suffit que $1 + y + y^2 = 1$ avec $y \geqslant 0$ donc la seule solution est $x = y = 0$.

Congruences

Définition, compatibilité avec l'addition et la multiplication.

Exercice 2
Montrer que pour tout entier $y > 1$, alors $y - 1$ divise $y^{y^2-y+2} - 4y + y^{2016} + 3y^2 - 1$

Solution de l'exercice 2
Par les propriétés de compatibilité des opération modulo $y - 1$, alors $y \equiv 1[y - 1]$ donc $y^{y^2-y+2} \equiv 1^{y^2-y+2} \equiv 1[y - 1]$, $4y \equiv 4[y - 1]$ et $3y^2 \equiv 3[y - 1]$. Ainsi en particulier :

$$y^{y^2-y+2} - 4y + y^{2016} + 3y^2 - 1 \equiv 1 - 4 + 3 - 1 \equiv 0[y - 1]$$

Donc $y - 1$ divise cet entier.

Exercice 3
Trouver tous les couple d'entiers positifs (a, b) tels que $\frac{a^3b-1}{a+1}$ et $\frac{b^3a+1}{b-1}$ soient des entiers.

Solution de l'exercice 3
On travaille modulo $a+1$: $a \equiv -1[a+1]$ donc $a^3b-1 \equiv 0[a+1]$ si et seulement si $-b-1 \equiv 0[a+1]$ donc si et seulement si $a + 1|b + 1$.

De même en travaillant modulo $b - 1$: $b \equiv 1[b - 1]$ donc $b^3a + 1 \equiv 0[a + 1]$ si et seulement si $a + 1 \equiv 0[b - 1]$ donc si et seulement si $b - 1|a + 1$.

Il est donc nécessaire que $b - 1|b + 1$, donc $b|2$ avec $b \geqslant 0$. Ainsi $b = 0, 2$ ou 3.

Dans ces 3 cas il est nécessaire et suffisant que $b - 1|a + 1|b + 1$, donc que $-1|a + 1|1$ ou $1|a + 1|3$ ou encore $2|a + 1|4$. Ce qui nous donne exactement 5 solutions positives ou nulles :

$$(0, 0), (1, 2), (2, 2), (1, 3), (3, 3)$$

Exercice 4
Trouver tous les triplets d'entiers positifs (x, y, n) tels que : $x^2 + y^2 + 40 = 2^n$.

Solution de l'exercice 4
On regarde modulo 4, un carré est congru à 0 ou 1. Ainsi si $n \geqslant 2$, on n'a pas de solutions car le membre de gauche est congru à 1,2 ou 3 modulo 4, alors que le membre de droite est congru à 0 modulo 4. Ainsi il reste seulement le cas où $n = 0$ ou $n = 1$, et on vérifie alors qu'il n'y a pas de solutions.

Exercice 5
Trouver les entiers a et b tels que : $3a^2 = b^2 + 1$

Solution de l'exercice 5
On regarde modulo 3 : le membre de gauche est congru à 0, tandis que le membre de droite est congru à 1 ou 2 modulo 3, car aucun carré modulo 3 n'est congru à 2. Ainsi il n'y a pas de solution.

On peut aussi regarder modulo 4 pour montrer qu'il n'y a pas de solutions.

Exercice 6
Trouver tous les quadruplets d'entiers positifs (x, y, z, n) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2^n$

Solution de l'exercice 6
On regarde modulo 8. Pour $n < 3$ les seules solutions sont :

$$(0, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 2)$$

Si $n \geqslant 3$, on regarde modulo 8. Un carré est congru à $0, 1, 4$ modulo 8, donc le membre de droite vaut $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ou 7, mais jamais 0 modulo 8. Ainsi il n'y a que les 5 solutions citées précédemment.

Exercice 7
Trouver l'ensemble des entiers a tels que l'équation $2a^2 - 7k + 2$ admet une solution k entière.
Solution de l'exercice 7

Il est nécessaire et suffisant que $2a^2 \equiv -2[7]$. Or $2\times \equiv 1[7]$ donc cela implique que $a^2 \equiv -1[7]$, or les carrés modulo 7 sont $0, 1, 4, 2$. Ainsi il n'y a aucun réel a qui satisfait cela.

Exercice 8
Soit $p > 2$ un nombre premier. Combien y a t-il d'entiers $a \in \{0, 1, \cdots, p-1\}$ tels que $c^2 = pk + a$ admette une solution ?

Solution de l'exercice 8
Soient a et b deux restes différents modulo p. Supposons que $a^2 \equiv b^2[p]$. Alors $(a-b)(a+b) \equiv 0[p]$, mais p est premier. Par le lemme de Gauss, p divise $a - b$ ou $a + b$. Ainsi $a \equiv b$ ou $-b[p]$.

De plus a^2 et $(p-a)^2$ sont bien congrus modulo p. Ainsi si $p \neq 2$, 0 est un carré et les restes $1, 2, \cdots, \frac{p-1}{2}$ ont des carrés différents. Tous les carrés sont obtenus ainsi. Il y a donc $\frac{p+1}{2}$ carrés modulo p si $p \neq 2$, et modulo 2 on vérifie qu'il y a 2 carrés.

Exercice 9
Montrer que pour tout p premier, pour tout a tel que $p \not| a$ alors il existe un unique $b \in \{0, 1 \cdots, p-1\}$ tel que $ab \equiv 1[p]$.

Solution de l'exercice 9
On a supposé que $p \nmid a$, mais p est premier donc p et a sont premiers entre eux. Par le lemme de Gauss, il existe des entiers u et v tels que $au + pv = 1$. Ainsi, $au \equiv 1[p]$, d'où le résultat.

Ordre d'un élément et théorème de Fermat

Voici l'énoncé du petit théorème de Fermat.

Théorème 1 (S).
it p un nombre premier, alors :

$$a^p \equiv a[p]$$

De plus, si $a \not\equiv 0[p]$:

$$a^{p-1} \equiv 1[p]$$

Exercice 10
Quels sont les nombres premiers tels que p divise $29^p + 1$?

Solution de l'exercice 10
Soit p un nombre premier, alors par le petit théorème de Fermat $29^p \equiv 29[p]$, donc $p|29^p + 1$ si et seulement si $p|29 + 1 = 30$. Ainsi les nombres premiers p qui conviennent sont exactement les diviseurs premiers de 30.

Exercice 11
Trouver tous les nombres premiers $p, q > 5$ tels que pq divise $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$.

Solution de l'exercice 11
Si $p|5^p - 2^p$, alors $p|3$ car $5^p \equiv 5[p]$ et $2^p \equiv 2[p]$ par le petit théorème de Fermat. C'est impossible donc nécessairement $p|5^q - 2^q$.

De même on montre que nécessairement $q|5^p - 2^p$.

Soit $a = \frac{p+1}{2}$, alors $(5a)^q \equiv 1[p]$. Puisque $p > 5$, p ne peut pas diviser $5a$. Alors $p|(5a)^{p-1} - 1$. Soit d le PGCD de q et $p - 1$, alors $(5a)^d \equiv 1[p]$. Ainsi soit $q|p - 1$ soit $5a \equiv 1[p]$, mais ce dernier cas implique que $5 \equiv 2[p]$ donc $p = 3$.

Ainsi, puisque $p, q > 5$, on a $q|p-1$ et on montre de même que $p|q-1$, ce qui est impossible : il n'y a pas de solution.

5 TD d'arithmétique (Éva Philippe, Rémi Lesbats)

Un cours complet d'arithmétique est disponible sur le site de la POFM, à l'adresse `http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/arith_cours.pdf`. Dans ce qui suit, on reprend les points de cours sur la valuation p-adique et le lemme des restes chinois.

Valuation p-adique

Définition 1.
Soit p un nombre premier et n un entier. La *valuation p-adique* de n est le plus grand entier k tel que p^k divise n. On le note $v_p(n)$.

Exemple 2.
Par exemple, pour $n = 18$ et $p = 3$ on a $v_p(n) = 2$ car 3^2 divise 18 mais 3^3 ne divise pas 18.

Par convention on prend $v_p(0) = +\infty$.

Proposition 3.
Si la décomposition de n est $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j}$, alors $v_{p_i}(n) = \alpha_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, j\}$ et $v_p(n) = 0$ pour tous les premiers p qui ne sont pas dans les α_i.

Pour montrer que deux entiers sont égaux, il suffit donc de montrer que leurs valuations p-adiques sont égales pour tous les nombres premiers p.

Exemple 4.
Par exemple, $18 = 2^1 \times 3^2$ donc $v_2(18) = 1$, $v_3(18) = 2$ et $v_p(18) = 0$ pour tous les autres nombres premiers p.

Proposition 5.
Un entier a divise un entier b si et seulement si $v_p(a) \leqslant v_p(b)$ pour tout premier p.

Exercice 1
Montrer les propriétés suivantes, pour p un nombre premier et n, m deux entiers :

1. $v_p(nm) = v_p(n) + v_p(m)$,
2. $v_p(m+n) \geqslant \min(v_p(m), v_p(n))$,
3. $v_p(PGCD(m,n)) = \min(v_p(m), v_p(n))$,
4. $v_p(PPCM(m,n)) = \max(v_p(m), v_p(n))$.

Solution de l'exercice 1

1. $p^{v_p(n)+v_p(m)} = p^{v_p(n)} \times p^{v_p(m)}$ divise $n \times m$, donc $v_p(n) + v_p(m) \leqslant v_p(nm)$. Réciproquement, $p^{v_p(nm)}$ divise nm, donc d'après le lemme de Gauss car p est premier, il existe k_1 et k_2 tels que $k_1 + k_2 = v_p(mn)$, $p^{k_1} \mid n$ et $p^{k_2} \mid m$, soit $k_1 \leqslant v_p(n)$, $k_2 \leqslant v_p(m)$ et finalement $v_p(nm) \leqslant v_p(n) + v_p(m)$.
2. Soit $k = \min(v_p(m), v_p(n))$. Alors $p^k \mid m$ et $p^k \mid n$ donc $p^k \mid m + n$ et $k \leqslant v_p(m+n)$. Lorsque $v_p(m) = v_p(n)$ il n'y a pas nécessairement égalité, par exemple $6 + 3 = 9$.
3. On note $d = PGCD(m,n)$. $d \mid m$ et $d \mid n$ donc $v_p(d) \leqslant v_p(m)$ et $v_p(d) \leqslant v_p(n)$, d'où $v_p(d) \leqslant \min(v_p(m), v_p(m)$. De plus, si $k = \min(v_p(m), v_p(n))$, alors $p^k \mid m$ et $p^k \mid n$ donc $p^k \mid PGCD(m,n)$, ie $k \leqslant v_p(PGCD(m,n))$.
4. laissé au lecteur.

Exercice 2
Montre que pour tous entiers a et b, $PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = ab$.

Solution de l'exercice 2
Soit p un nombre premier. $v_p(PGCD(a, b) \times PPCM(a, b)) = \min(v_p(m), v_p(n)) + \max(v_p(m), v_p(n)) = v_p(m) + v_p(n) = mn$ (en utilisant le fait que $\min(a, b) + \max(a, b) = a + b$ pour tous réels a, b). L'égalité des valuations p-adiques pour tout nombre premier p donne l'égalité demandée.

Exercice 3 (Formule de Legendre)
On rappelle la notation factorielle : pour un nombre entier n, $n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1$.

Pour un nombre premier p, calculer $v_p(n!)$.

Solution de l'exercice 3
Il s'agit de la formule de Legendre : $v_p(n!) = \Sigma_{k=1}^{+\infty} \lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor$. Remarquons tout d'abord que cette somme n'est pas infinie car lorsque k devient suffisamment grand, p^k dépasse n donc $\lfloor \frac{n}{p^k} \rfloor = 0$.

Pour calculer $v_p(n!)$, il suffit d'additionner les valuations p-adiques de tous les entiers inférieurs ou égaux à n. La plupart de ces entiers sont non divisibles par p donc leur valuation p-adique est nulle. Il y en a exactement $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor$ qui sont divisibles par p. Parmi eux, il faut compter plusieurs fois ceux qui sont divisibles par p^2, il y en a $\lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$. À ce stade, avec $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor + \lfloor \frac{n}{p^2} \rfloor$ seules les valuations p-adiques supérieures ou égales à 3 n'ont pas été entièrement comptées (elles n'ont ajouté que 2 dans la somme). Il faut donc continuer à additionner $\lfloor \frac{n}{p^3} \rfloor$, etc.

Exercice 4
Comment calculer le nombre de diviseurs d'un nombre entier n ?

Solution de l'exercice 4
On utilise le théorème fondamental de l'arithmétique : $n = \Pi_{i=1}^{j} p_i^{v_{p_i}(n)}$. Un diviseur de n est de la forme $\Pi_{i=1}^{j} p_i^{\beta_i}$, avec β_i un entier compris entre 0 et $v_{p_i}(n)$. Au total il y a $\Pi_{i=1}^{j}(v_{p_i}(n) + 1)$ choix pour tous les exposants β_i, ce qui correspond au nombre de diviseurs.

Lemme des restes chinois

Vous souvenez-vous du premier exercice de bienvenue proposé dans le livret d'accueil ?

Exercice 5
Un général rassemble ses troupes. Quand il les range par groupes de 2, il reste un soldat qui n'appartient à aucun groupe. Quand il les range par groupes de 3, il reste 2 soldats qui n'appartiennent à aucun groupe. Quand il les range par groupes de 5, il reste 3 soldats qui n'appartiennent à aucun groupe. Si le général range ses soldats par groupes de 30, combien restera-t-il de soldats n'appartenant à aucun groupe ?

Solution de l'exercice 5
Le fait qu'il existe bien une unique solution découle directement du lemme des restes chinois.

Théorème 6 (Lemme des restes chinois).
Soient $N_1, N_2, \ldots, N_k$ des entiers strictement positifs deux à deux premiers entre eux, et

$a_1, a_2, \dots, a_k$ des entiers quelconques. Alors il existe un entier a tel que le système de congruences : $\begin{cases} x & \equiv a_1 \pmod{N_1} \\ x & \equiv a_2 \pmod{N_2} \\ & \dots \\ x & \equiv a_k \pmod{N_k} \end{cases}$

soit équivalent à la simple congruence $x \equiv a \pmod{N_1 N_2 \dots N_k}$.

Démonstration. Commençons par montrer le lemme pour $k = 2$, le cas général suivra par récurrence immédiate.

Si x est une solution de l'équation $x \equiv a_1 \pmod{N_1}$, il existe d'un entier q_1 tel que $x = a_1 + q_1 N_1$. En remplaçant dans la deuxième équation on obtient $a_1 + qN_1 \equiv a_2 \pmod{N_2}$. L'existence d'un inverse de N_1 modulo N_2 est assurée par le fait que N_1 et N_2 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de Bézout, il existe deux entiers u, v tels que $N_1 u + N_2 v = 1$, ce qui donne $N_1 u \equiv 1 \pmod{N_2}$. On a alors $q_1 \equiv (a_2 - a_1)u \pmod{N_2}$, donc il existe un entier q_2 tel que $q_1 = (a_2 - a_1)u + q_2 N_2$, et $x = a_1 + (a_2 - a_1)uN_1 + q_2 N_1 N_2$. Réciproquement, si x est de la forme $x = a_1 + (a_2 - a_1)uN_1 + qN_1N_2$, alors on voit que $x \equiv a_1 \pmod{N_1}$ et en remplaçant uN_1 par $(1 - vN_2)$, $x \equiv a_2 \pmod{N_2}$.

Ainsi, le système est équivalent à $x \equiv a_1 + (a_2 - a_1)uN_1 \equiv a_2 + (a_1 - a_2)vN_2 \pmod{N_1 N_2}$.
□

Exercice 6
Trouver les entiers n tels que 6 divise $n - 4$ et 10 divise $n - 8$.

Solution de l'exercice 6
Comme 6 et 10 ne sont pas premiers entre eux, on peut les décomposer en facteurs premiers.

On obtient : $\begin{cases} n-4 & \equiv 0[2] \\ n-4 & \equiv 0[3] \\ n-8 & \equiv 0[2] \\ n-8 & \equiv 0[5], \end{cases}$

ce qui donne $\begin{cases} n & \equiv 0[2] \\ n & \equiv 1[3] \\ n & \equiv 0[2] \\ n & \equiv 3[5]. \end{cases}$

On constate qu'on a deux conditions modulo 2. Si elles étaient incompatibles (par exemple en remplaçant $n - 8$ par $n - 7$ dans l'énoncé), il n'y aurait pas de solution. Dans notre cas, elles sont équivalentes. Maintenant qu'on a exprimé notre système sous la forme demandée par le lemme chinois, on sait qu'il existe une unique solution modulo $2 \times 3 \times 5 = 30$. On trouve que les entiers n cherchés sont tous les entiers congrus à 28 modulo 30.

Florilège d'exercices

Exercice 7
Montrer que pour tout entier a, $10 \mid a^{73} - a^{37}$.

Exercice 8
Trouver tous les entiers a, b, c tels que $2^a + 9^b = 2 \cdot 5^c - 7$

Exercice 9
On note $\sigma(n)$ le nombre de diviseurs positifs d'un entier n. Montrer que si $\sigma(N)$ est impair, alors N est un carré.

Exercice 10
Trouver tous les n tels que n divise $2^n - 1$.

Exercice 11
Soient a et b deux entiers naturels non nuls. Montrer que

$$(2^a - 1) \wedge (2^b - 1) = 2^{a \wedge b} - 1.$$

Exercice 12
Le nombre 2^{29} possède 9 chiffres distincts. Quel est celui qui manque parmi $\{0, 1, \ldots, 9\}$?

Exercice 13
Calculer le nombre de chiffres 0 à la fin de $2019!$.

Exercice 14
Soit n un entier. Montrer qu'il existe n entiers consécutifs non premiers.

Exercice 15
Un point du plan de coordonnées entières (p, q) est dit invisible si $PGCD(p, q) > 1$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un carré de côté n dans lequel tous les points à coordonnées entières sont invisibles.

Exercice 16 (Théorème de Wilson)
Soit p un entier > 1. Montrer que p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

Solutions (ou éléments de solutions) des exercices

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>
Avoir la divisibilité par 10 est équivalent à avoir la divisibilité par 2 et par 5. Quelle que soit la parité de a modulo 2, on a toujours $a^{73} \equiv a^{37} \equiv a[2]$.

Quand on regarde la divisibilité par 5, on regarde selon la congruence de a modulo 5. Si a est divisible par 5 c'est bon. Sinon, comme 5 est un nombre premier, il est premier avec a. On peut alors appliquer le petit théorème de Fermat : $a^4 \equiv 1[5]$. Il suffit donc de regarder la congruence de 73 et 37 modulo 4. On trouve $73 \equiv 37 \equiv 1[4]$. D'où 10 divise $a^{73} - a^{37}$.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>
En regardant modulo 4 on a une contradiction si $a \geq 2$. Si $a = 1$, alors en regardant modulo 3 on obtient $b = 0$, et $(a, b, c) = (1, 0, 1)$. Si $a = 0$, en regardant la parité on montre qu'il n'y a pas de solutions.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>
Utiliser la formule sur le nombre de diviseurs.

Solution de l'exercice 10

Soit p le plus petit diviseur premier de n, et q tel que $n = pq$. D'après le petit théorème de Fermat, $2^p \equiv 2[p]$. D'où $2^n \equiv 2^q[p]$. Comme p est un nombre premier, l'ordre de 2 modulo p divise à la fois $p-1$ et q, il admet donc un diviseur premier qui divise n et est strictement inférieur à p, ce qui cintredit le choix de p.

Solution de l'exercice 11

Etablissons d'abord le lien entre le reste de la division euclidienne de a par b et celui de la division de $2^a - 1$ par $2^b - 1$. Notons $a = bq + r$ avec $0 \leqslant r < b$. On peut alors écrire :

$$2^a - 1 = 2^{bq+r} - 1 = 2^{bq+r} - 2^r + 2^r - 1 = (2^b - 1)(2^{b(q-1)} + 2^{b(q-1)-1} + \cdots + 1)2^r + 2^r - 1,$$

et on a alors $0 \leqslant 2^r - 1 < 2^b - 1$.

On effectue la divison euclidienne de a par b, et on note les $a_0 = a$, $a_1 = b$, ... les entiers obtenus, qui vérifient $a_m = a_{m-1} \wedge a_{m-2}$. On peut à présent écrire l'algorithme d'Euclide partant de $2^a - 1$ et de $2^b - 1$ avec ces coefficients :

$$(2^a-1)\wedge(2^b-1) = (2^{a_0}-1)\wedge(2^{a_1}-1) = (2^{a_1}-1)\wedge(2^{a_2}-1) = \cdots = (2^{a_m}-1)\wedge 2^0 - 1 = 2^{a_m} - 1,$$

ce dernier a_m non nul étant bien égal à $a \wedge b$.

Solution de l'exercice 12

Se souvenir qu'un nombre est congru à la somme de ses chiffres modulo 9.

Solution de l'exercice 13

Il suffit de calculer $\min(v_2(2019!), v_5(2019!))$, avec la formule de Legendre.

Solution de l'exercice 14

Penser aux factorielles ! $(n+1)!$ est divisible par tout entier k entre 2 et $(n+1)$, donc $(n+1)!+k$ est divisible par k par tout k entre 2 et $(n+1)$.

Version plus forte : on se donne k nombres premiers $p_1, \ldots, p_k$. Montre qu'on peut trouver n tel que p_1 divise $n+1$, $\ldots p_k$ divise $n+k$.

Solution de l'exercice 15

On cherche a et b tels que pour tous i et j de $[\![0, n-1]\!]$, $a+i$ et $b+j$ ne soient pas premiers entre eux. Soient donc $(p_{i,j})_{i,j\in[\![0,n-1]\!]}$ n^2 nombres premiers deux à deux distincts : on veut que pour tous i et j, $a+i$ et $b+j$ soient tous deux divisibles par $p_{i,j}$, soit $a \equiv -i \pmod{p_{i,j}}$ pour tous i et j et $b \equiv -j \pmod{p_{i,j}}$. L'existence de tels a et b est garantie par le théorème chinois.

Solution de l'exercice 16

Pour tout $n \in \{1, \ldots, p-1\}$, il existe $n^{-1} \in \{1, \ldots, p-1\}$ tel que $n \times n^{-1} \equiv 1[p]$. De plus, $n = n^{-1}$ si et seulement si $n^2 - 1 \equiv 0$, ce qui équivaut à $n = 1$ ou $n = p-1$.

Ainsi, calculer $(p-1)!$ modulo p revient :

- si $n \neq n^{-1}$, à grouper chaque entier n avec son inverse n^{-1} pour les multiplier, ce qui produit uniquement des facteurs 1 modulo p,
- sinon, c'est que $n = 1$ ou $n = p-1$, ce qui rajoute un facteur 1 et un facteur -1 modulo p.

Donc : $(p-1)! \equiv 1 \times 1 \times \ldots \times 1 \times 1 \times (-1) \equiv -1[p]$.

Autres exercices, non corrigés

Exercice 17 (JBMO 2000 SL)
Trouver tous les entiers a, b tels que $a^4 + 4b^4$ soit un nombre premier.

Exercice 18 (JMBO 2014, 1)
Trouver tous les nombres premiers p, q, r tels que $3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26$

Exercice 19 (JBMO 2018, 1)
Trouver tous les couple d'entiers (m, n) tels que $m^5 - n^5 = 16mn$

Exercice 20 (JBMO 2016, N3)
Pour tout entier naturel n, on pose $A_n = \frac{2^{4n+2}+1}{65}$. Trouver tous les entiers n tels que :

— A_n est entier ;

— A_n est premier.

6 TD de combinatoire (Maena Quemener)

Ce cours sera disponible sur le polycopié à partir du 10 septembre 2019.

2 Entraînement de mi-parcours

– Énoncés –

Exercice 1
Quels sont les entiers a entre 1 et 105 tels que $35|a^3 - 1$?

Exercice 2
Soit $n \geqslant 1$ un entier. On dispose de n cubes de côtés $1, 2, \cdots, n$. On veut les empiler dans un certain ordre, de sorte qu'un cube de côté k ne peut être posé que sur un cube de côté ℓ avec $\ell \geqslant k - 2$. Combien de tels empilements différents existe-t-il ?

Exercice 3
Soit $n \geqslant 0$ un entier, $2n + 1$ enfants se trouvent dans le plan. On suppose que les distances entre toutes les paires d'enfants sont distinctes. Chaque enfant dispose d'un pistolet à eau et simultanément, chacun tire sur l'enfant le plus proche de lui.

(a) Montrer qu'il existe deux enfants qui se tirent dessus mutuellement.

(b) Montrer qu'il existe un enfant sec, c'est à dire sur lequel aucun enfant ne tire.

Exercice 4
Une puissance de nombre premier est un entier qui s'écrit sous la forme p^k avec p un nombre premier et $k \geqslant 1$ un entier. Montrer que pour tout entier N il existe N entiers consécutifs qui ne sont pas des puissances de nombre premier.

– Solutions –

Solution de l'exercice 1
Les cubes modulo 5 sont, dans l'ordre $0,\ 1,\ 3,\ 2,\ 4$ donc $5|a^3 - 1$ si et seulement si $a \equiv 1\ [5]$.

Les cubes modulo 7 sont, dans l'ordre $0,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1$ donc $7|a^3 - 1$ si et seulement si $a \equiv 1,\ 2,\ 4\ [7]$. Par le théorème chinois, il y a donc 3 restes modulo 35 possibles pour a qui sont $1,\ 11,\ 16$.

Par conséquent les solutions sont : $1,\ 11,\ 16,\ 36,\ 46,\ 51,\ 71,\ 81$ et 86.

Solution de l'exercice 2
Montrons par récurrence que pour $n \geqslant 3$ il existe $3^{n-1} \times 2$ tels empilements. Pour $n = 3$ les 6 empilements possible satisfont la contrainte demandée.

Supposons que le résultat est vrai pour $n \geqslant 3$. Se donner un empilement avec $n + 1$ cubes satisfaisant la conditions de l'énoncé revient à se donner un empilement avec les cubes de côtés $1, 2, \cdots, n$ ainsi qu'un emplacement où insérer le $(n + 1)$-ième. Le $n + 1$-ième peut être placé uniquement au-dessus d'un cube de côté n ou $n - 1$, ou encore tout en bas de la pile. Ainsi par hypothèse de récurrence il y a $3 \times 3^{n-1} \times 2$ possibilités. Par récurrence on conclut bien qu'il existe $3^{n-1} \times 2$ tels empilements pour n cubes pour tout $n \geqslant 3$.

Pour $n = 1$ il y a un empilement, et pour $n = 2$ il y en a deux, et tous les tels empilements satisfont la condition demandée.

Solution de l'exercice 3

(a) On considère la paire d'enfants qui sont à distance minimale d. Par minimalité de d, ils se tirent dessus l'un sur l'autre.

(b) Pour $n = 1$ le résultat est vrai. Supposons le résultat vrai pour un certain entier $n \geqslant 1$, et supposons que nous avons $2n + 3$ enfants. Par la question précédente, deux d'entre eux se tirent dessus mutuellement.

Si aucun autre enfant ne tire sur ces deux là, on peut les oublier, et les $2n + 1$ autres enfants tireront toujours sur l'enfant restant le plus proche. Par hypothèse de récurrence il existe un enfant sur lequel personne n'a tiré.

Sinon, il y a un enfant sur lequel deux enfants tirent, donc par le principe des tiroirs il y a au plus $n - 1$ enfants mouillés. Par conséquent il y a un enfant sur lequel personne ne tire.

Solution de l'exercice 4

Soit n un entier, si il existe $p_1 \neq p_2$ deux nombres premiers distincts qui divisent n, alors n n'est pas une puissance de nombre premier. C'est une conséquence de l'unicité de la décomposition en facteur premier, mais on peut aussi le montrer en appliquant le lemme de Gauss : si $n = p^k$ et p_1 divise n alors p_1 divise p car p_1 est premier. De même p_2 divise p donc $p_1 = p_2$.

Il existe une infinité de nombres premiers. En particulier notons $p_1, p_2, \cdots, p_{2N-1}, p_{2N}$ les $2N$ premiers nombres premiers.

On cherche un entier M tel que p_1p_2 divise M, p_3p_4 divise $M + 1$,$\cdots$, $p_{2N-1}p_{2N}$ divise $M + N - 1$ On cherche donc une solution au système de congruence :

$$M \equiv 0[p_1p_2]$$

$$M \equiv 1[p_3p_4]$$

$$\cdots$$

$$M \equiv N - 1[p_{2N-1}p_{2N}]$$

Or les modulos de ces équations sont premiers deux à deux . Ainsi le théorème chinois montre qu'il existe un tel entier M. Par la remarque précédente aucun des entiers $M, M + 1, \cdots, M + N - 1$ n'est une puissance de nombre premier.

3 Deuxième partie : Algèbre et géométrie

1 Équations fonctionnelles (Vincent Jugé)

Quelques notions de cours

Ce cours et ces exercices proviennent directement de l'**excellent** cours sur les équations fonctionnelles, proposé en 2003 par Pierre Bornsztein et Moubinool Omarjee, et disponible sur le site de la POFM. On y trouvera les solutions de tous les exercices listés ci-dessous.

En pratique, voici les notions et idées clé relatives aux équations fonctionnelles :

— la notion de fonction **surjective**, **injective** et **bijective** ;

— la notion de fonction **monotone** ou **strictement monotone** ;

— la notion de fonction **paire**, **impaire** ou **périodique** ;

— la notion de fonction **bornée**, voire **constante** ;

— l'utilisation de la **récurrence** pour calculer des valeurs entières de notre fonction ;

— l'**équation de Cauchy** ;

— le fait que certaines variables jouent des rôles **symétriques** dans l'équation ou uniquement dans certains termes de l'équation ;

— plus généralement, le fait que certaines **transformations** sur les variables laissent un terme de l'équation inchangé (ou alors très peu) ;

— l'importance de la gestion des **petits cas** : prendre des variables égales à 0, 1 ou -1, ou encore égales entre elles, …

— la recherche de **racines** ou de **points fixes**, c'est-à-dire de nombres x tels que $f(x) = 0$ ou $f(x) = x$;

— le fait de considérer un **antécédent** d'une valeur donnée, ou encore une variable dont l'image est **minimale** ou **maximale**, …

Exercices

Exercice 1
Soit X une partie de $\mathbb{R}$. Démontrer que, si $f : X \to \mathbb{R}$ est une fonction strictement monotone, alors elle est injective.

Exercice 2
Démontrer que, si $f : X \to \mathbb{R}$ est une bijection croissante, alors sa réciproque est elle aussi croissante.

Exercice 3
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strictement croissantes telles que $f(f(x)) = x$ pour tout x.

Exercice 4
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout x et tout y, on ait :

$f(2x) = f(\sin(\pi x/2+\pi y/2))+f(\sin(\pi x/2-\pi y/2))$ et $f(x^2-y^2) = (x+y)f(x-y)+(x-y)f(x+y)$.

Exercice 5
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout x et tout y, on ait :

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Exercice 6
Soit a un réel et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout x, on ait

$$f(x + a) = 1/2 + \sqrt{f(x) - f(x)^2}.$$

Démontrer que f est périodique puis, en supposant que $a = 1$, donner un exemple d'une telle fonction.

Exercice 7
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ à pente constante, c'est-à-dire pour lesquelles il existe un réel a tel que, pour tout x et tout y distinct de x, on ait :

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = a.$$

Exercice 8
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout x et tout y, on ait :

$$f(x + y) = f(x) + y.$$

Exercice 9
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que, pour tout x et tout y, on ait :

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 10
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotones et telles que, pour tout x et tout y, on ait :

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 11
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et telles que, pour tout x et tout y, on ait :

$$f(x + y) = f(x) + f(y).$$

Exercice 12
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continues et telles que, pour tout x et tout y, on ait :

$$f(x) - f(y) \leqslant (x-y)^2.$$

Exercice 13
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction surjective et $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction injective telles que, pour tout n, on ait :

$$f(n) \geqslant g(n).$$

Démontrer que $f = g$.

Exercice 14
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction. Démontrer qu'il existe un entier n tel que $f(f(n)) \neq n + 2019$.

2 Boîte à outils du géomètre (Aline Cahuzac)

Notations

On notera pour A, B, C trois points :

— AB la distance entre A et B

— $\overline{AB}$ la distance algébrique entre A et B : on oriente arbitrairement la droite (AB) et on attribue en concordance un signe à la distance. Ainsi $\overline{AB} = -\overline{BA}$

— $\widehat{ABC}$ l'angle entre les droites (BA) et (BC), pris non orienté sauf indication contraire pour simplifier les raisonnements.

Chasse aux angles

C'est l'outil de base pour démontrer nombre de résultats utiles. Dans le doute devant un problème, chercher à se ramener à des égalités d'angles peut rapprocher de la solution.

Rappel 1.
La somme des angles d'un triangle vaut 180°. Par suite, la somme des angles d'un n-gone vaut $(n-2) \times 180°$.

Théorème 2 (Angle inscrit et angle au centre)**.**
Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Alors $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC}$.

Démonstration. On utilise le fait que O découpe le triangle en trois triangle isocèles. □

On en déduit :

Corollaire 3.

1. Si D est un autre point sur l'arc AC du même côté que B, alors $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$.
2. Si D est un autre point sur l'arc AC du côté opposé à B, alors $\widehat{ABC} = 180° - \widehat{ADC}$.
3. Si T est la tangente en A au cercle circonscrit à ABC et que $D \in T$ est du même côté de (AO) que C, alors $\widehat{DAC} = \widehat{ABC}$.

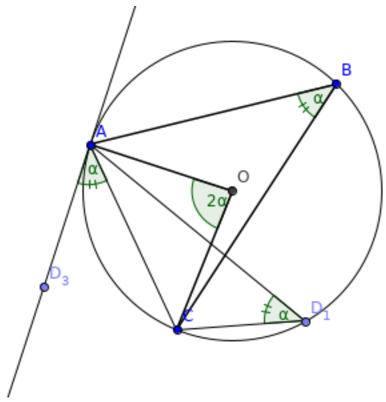


FIGURE 1 – Théorème de l'angle inscrit

On utilise beaucoup ce corollaire pour montre que des points sont cocycliques. D'ailleurs, on va beaucoup utiliser ces premiers résultats pour montrer les théorèmes qui suivent. De manière générale, presque toutes les preuves peuvent se ramener à une chasse aux angles mais il vaut mieux ne pas avoir à redémontrer certaines étapes qui servent souvent.

Transformations géométriques

Il est utile de repérer si une sous-figure se déduit d'une autre par une transformation simple, car cela impose des relations entre les longueurs, les angles, les alignements et les cocyclicités. Une transformation qui préserve les angles préserve aussi les alignements et les cocyclicités.

Transformations à connaître

— Une **translation** est un déplacement d'ensemble du plan sans le faire pivoter.

— Une **rotation** autour d'un point ou une **symétrie** (par rapport à une droite ou un point) préserve les longueurs et les angles.

— Une **homothétie** de centre O et de rapport k envoie tout point P du plan sur le point P' tel que $\overrightarrow{OP'} = k\overrightarrow{OP}$. Elle préserve les angles.

— Une **similitude** de centre O et de rapport k est la composée d'une rotation et d'une homothétie de centre O. Elle préserve donc aussi les angles.

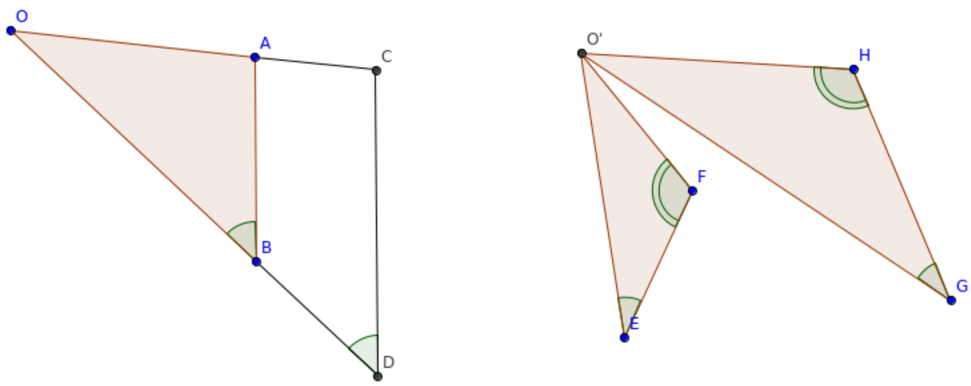


FIGURE 2 – Homothétie et similitude de centre O

Une translation n'a aucun point fixe, alors qu'une rotation, une homothétie ou une similitude (non triviale) en possède exactement un, son centre.

Pour une similitude, si A et B ont pour images A' et B', alors $A'B' = |k|AB$

Points et configurations remarquables

Droite et cercle d'Euler

Théorème 4 (Droite d'Euler)**.**
Soit un triangle ABC dont on note O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre et G le centre de gravité. Alors O, G, H sont alignés sur une droite appelée **droite d'Euler** et $\overrightarrow{GH} = 2 \cdot \overrightarrow{OG}$.

Démonstration. O est l'orthocentre du triangle des milieux $A'B'C'$ et G leur centre de gravité commun. Donc c'est le centre de la similitude qui envoie ABC sur $A'B'C'$, cette similitude est donc une homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$. □

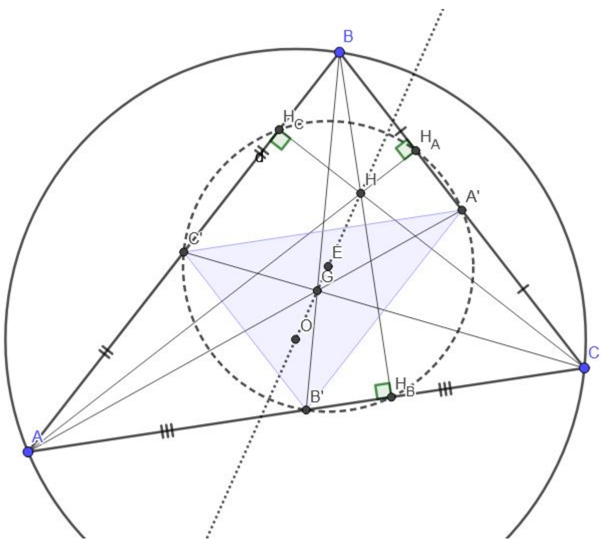


FIGURE 3 – Droite et cercle d'Euler de ABC

Théorème 5 (Cercle d'Euler)**.**
Le triangle des milieux et le triangle orthique (triangle des pieds des hauteurs) ont même cercle circonscrit appelé cercle d'Euler. Il passe aussi par les milieux de $[AH]$, $[BH]$ et $[CH]$, et son centre E est le milieu de $[OG]$.

Démonstration. Le cercle circonscrit à $A'B'C'$ est le symétrique par rapport à $(B'C')$ du cercle circonscrit à $AB'C'$. Il passe donc aussi par H_B le symétrique de B par rapport à $(B'C')$, c'est aussi le pied de la hauteur issue de B. Enfin la transformation qui envoie ABC sur $A'B'C'$ est une homothétie de centre G et de rapport $-\frac{1}{2}$, donc elle envoie O sur le milieu de OH d'après le théorème précédent. □

Quelques lemmes qui peuvent servir en chasse aux angles autour des points remarquables :

Lemme 6.
Les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle sont sur le cercle circonscrit.

Lemme 7.
$\widehat{BAH} = \widehat{OAC}$.

Lemme 8.
$AH = 2 \cdot OA'$

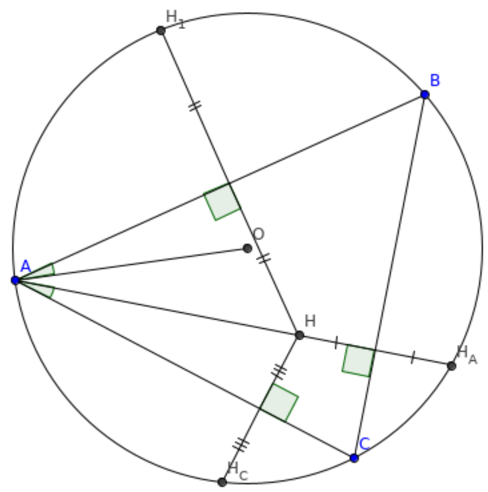


FIGURE 4 – Quelques propriétés de l'orthocentre

Démonstration. C'est encore la même homothétie qui envoie ABC sur le triangle des milieux, et H sur O. □

Pôle Sud

Théorème 9 (Théorème du pôle Sud)**.**
Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. La bissectrice issue de A et la médiatrice de $[BC]$ s'intersectent au point S sur le cercle circonscrit, ce point est appelé pôle Sud de ABC par rapport à A.
Les point B, C et I sont sur le même cercle de centre S.

Démonstration. Encore une petite chasse aux angles. □

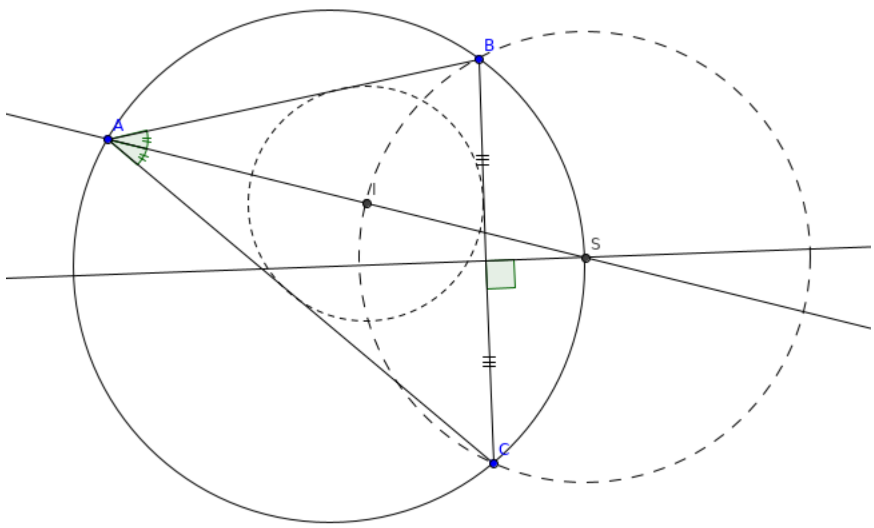


FIGURE 5 – Théorème du pôle Sud

Théorème de Miquel

Lemme 10 (Lemme du cube)**.**
Soit A, B, C, D, E, F, G, H des points du plan tels que les 5 quadrilatères $ABCD, ABGH, BCFG, CDEF, ADEH$ sont cycliques. Alors $EFGH$ est aussi cyclique.

On peut le retenir comme suit : si on prend un cube $ABCDEFGH$, que l'on l'aplatit en le déformant sur le tableau, et que cinq des six faces forment des quadrilatères cycliques, alors la sixième aussi.

Théorème 11 (Théorème de Miquel)**.**
Soit ABC un triangle et M, N, P des points sur $[BC], [AC], [AB]$ respectivement. Soit X la deuxième intersection des cercles circonscrits à ANP et BMP. Alors C, M, N, X sont cocycliques.

Démonstration. Direct par chasse aux angles. □

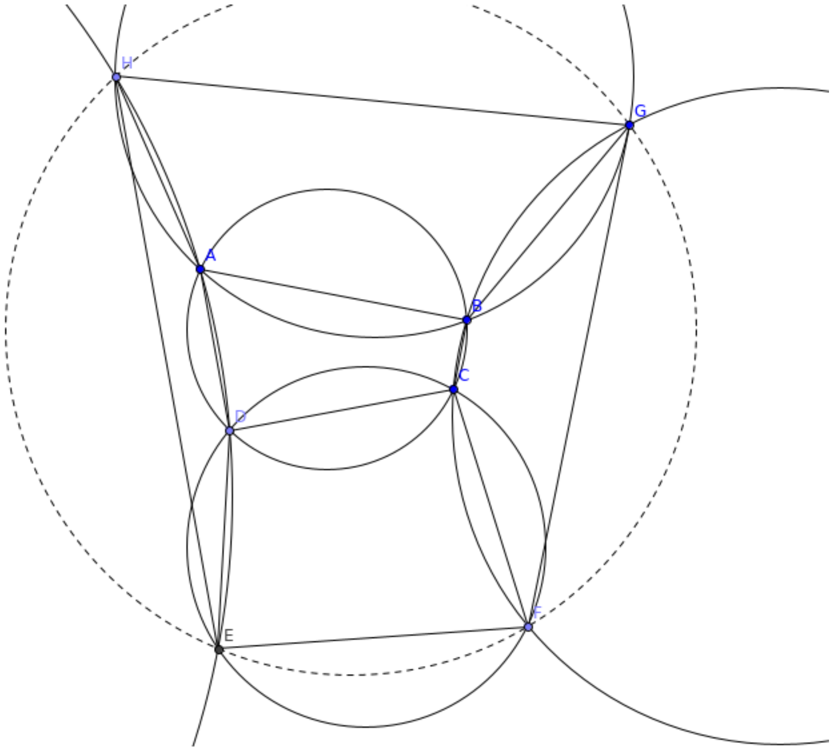


FIGURE 6 – Lemme du cube

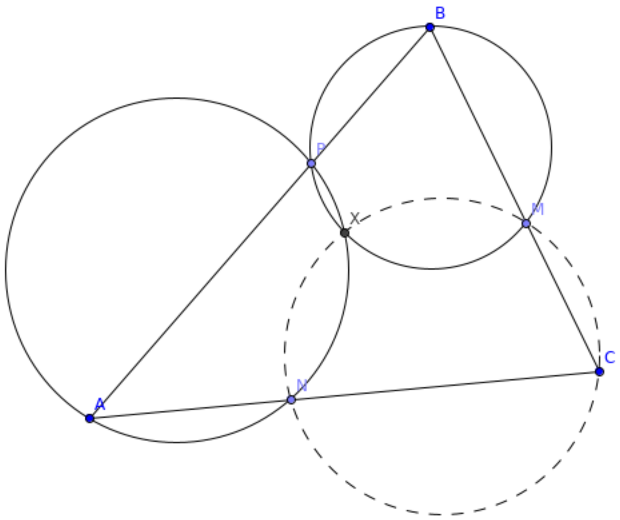


FIGURE 7 – Théorème de Miquel

Puissance d'un point par rapport à un cercle

Théorème 12 (Puissance d'un point)**.**
Soit Γ un cercle de centre O et de rayon R. Soit M un point et D une droite passant par M et coupant Γ en A et B (pas nécessairement distincts). Alors $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = OM^2 - R^2$. La quantité $\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ ne dépend ainsi pas de la droite choisie et est appelée **puissance de** M **par rapport à** Γ, notée souvent $P_\Gamma(M)$.

— Si D est tangente au point T à Γ, $P_{\Gamma(M)} = PT^2$.

— $P_\Gamma(M) < 0 \Leftrightarrow P$ est à l'intérieur de Γ

— $P_\Gamma(M) > 0 \Leftrightarrow P$ est à l'extérieur de Γ

— $P_\Gamma(M) = 0 \Leftrightarrow P \in \Gamma$

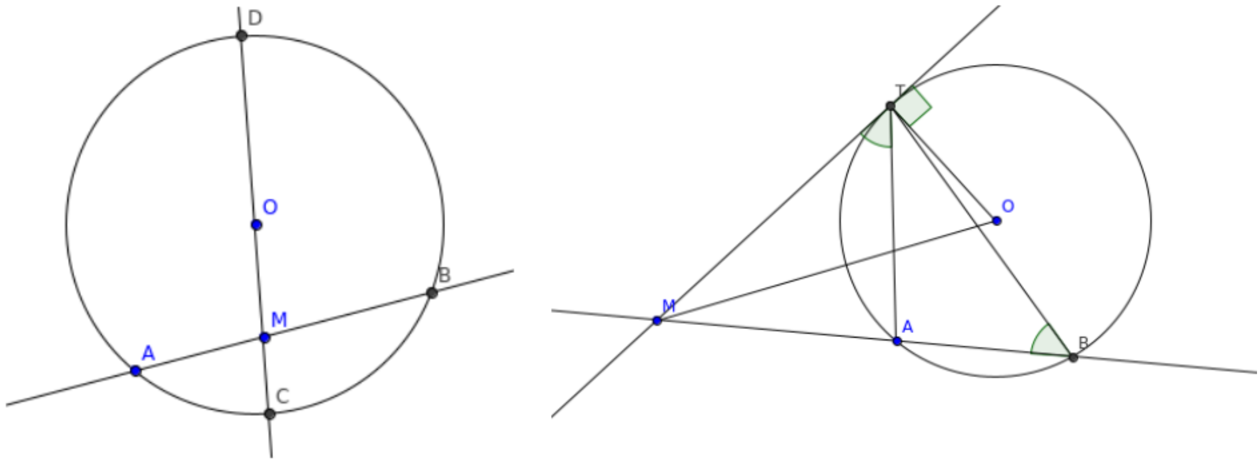


FIGURE 8 – Puissance de M par rapport à un cercle

Démonstration. On trace la droite (OM) qui coupe le cercle en A' et B'. les triangles $AA'M$ et $B'BM$ sont semblables : $\frac{AM}{A'M} = \frac{B'M}{BM}$ ie $AM \cdot BM = A'M \cdot B'M = |R - OM| \cdot (R + OM) = |OM^2 - R^2|$. Pour les signes, il faut orienter les droites. □

Théorème 13 (Axe radical)**.**
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2. On appelle **axe radical de** Γ_1 **et** Γ_2 l'ensemble des points du plan ayant même puissance par rapport à Γ_1 et Γ_2.

— Lorsque les deux cercles ne sont pas strictement inclus l'un dans l'autre, leur axe radical est une droite D qui coupe $[O_1O_2]$ perpendiculairement.

— Si Γ_1 et Γ_2 s'intersectent en deux points A et B, $D = (AB)$.

— Si Γ_1 et Γ_2 sont tangents en T, D est leur tangente commune en T.

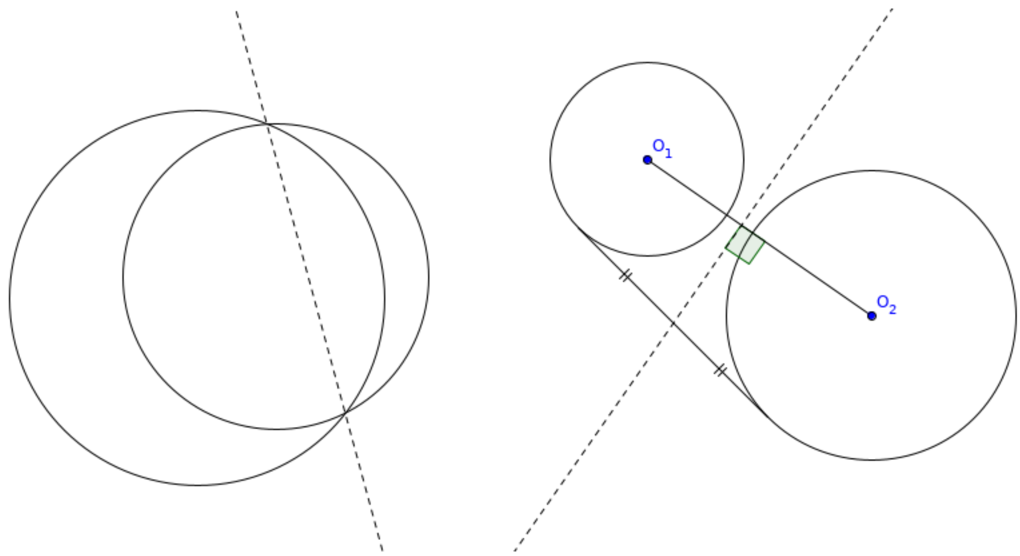


FIGURE 9 – Axe radical de deux cercles

Démonstration. Soit un point M sur l'axe radical de Γ_1 et Γ_2. On note M son projeté sur (O_1O_2). Alors :

$$O_1M'^2 - R_1^2 = O_1M^2 - MM'^2 - R_1^2 = O_2M'^2 - MM'^2 - R_2^2 = O_2M'^2 - R_2^2$$

Autrement dit, M' est aussi sur l'axe radical. Mais l'axe radical passe par au plus un point X de (O_1O_2), donc M est sur la droite perpendiculaire à (O_1O_2) passant par X. Réciproquement, on vérifie que tous les points de cette droite sont sur l'axe radical, d'où l'identité des deux. □

Théorème 14 (Théorème des axes radicaux)**.**
Soit Γ_1, Γ_2 et Γ_3 trois cercles. Les trois axes radicaux (de Γ_1 et Γ_2, Γ_2 et Γ_3, Γ_1 et Γ_3) sont parallèles ou concourants.

Démonstration. On suppose qu'ils ne sont pas parallèles : par exemple, on appelle X l'intersection de l'axe radical de Γ_1 et Γ_2 avec celui de Γ_2 et Γ_3. Alors $P_{\Gamma_1}(X) = P_{\Gamma_2}(X) = P_{\Gamma_3}(X)$ donc X est sur l'axe radical de Γ_1 et Γ_3 aussi. □

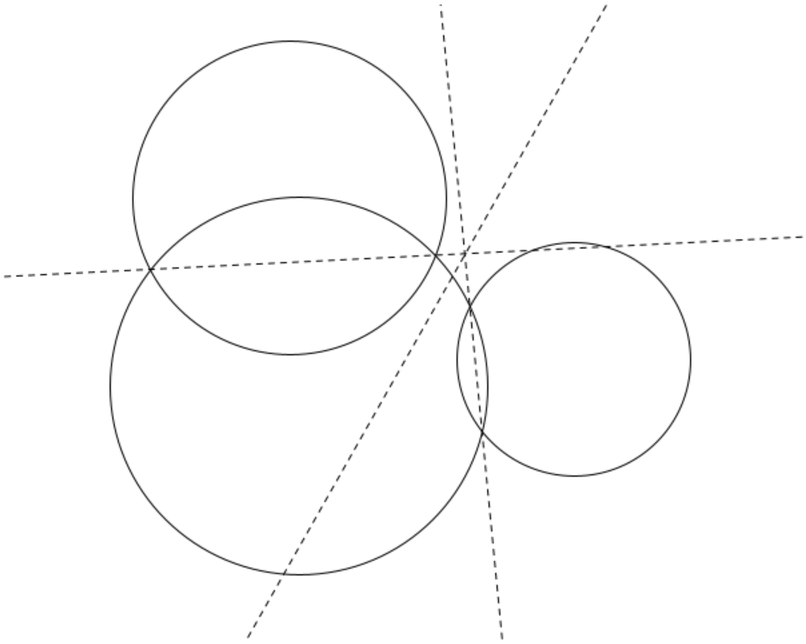


FIGURE 10 – Théorème des axes radicaux

Identités géométriques et formules diverses

Loi des sinus

Théorème 15 (Loi des sinus)**.**
Soit ABC un triangle et R le rayon de son cercle circonscrit. On pose $\alpha = \widehat{BAC}, \beta = \widehat{ABC}, \gamma = \widehat{ACB}$, $a = BC, b = AC, c = AB$. Alors :

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c} = \frac{1}{2R}$$

Démonstration. On introduit D le symétrique de B par rapport au centre du cercle. Par le théorème de l'angle inscrit, $\alpha = \widehat{BDC}$. Mais $\widehat{BCD}$ est droit donc $a = 2R\sin\widehat{BDC} = 2R\sin\alpha$.
□

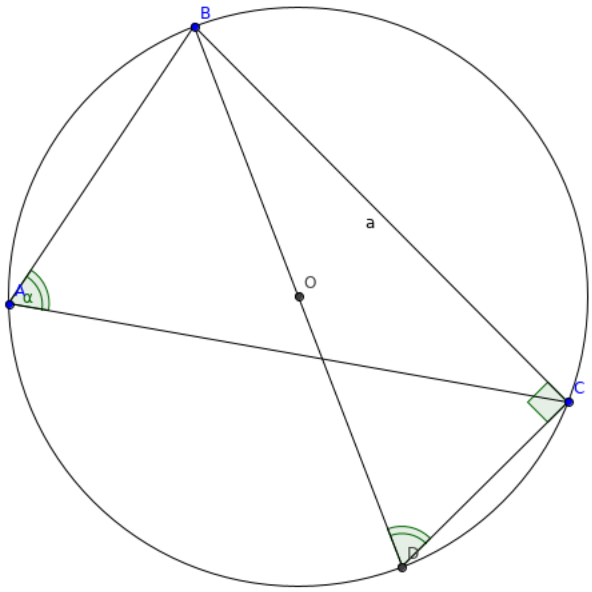


FIGURE 11 – Loi des sinus

On en déduit par exemple :

Théorème 16 (Formule de la bissectrice)**.**
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de A. On a alors

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AD}$$

.

ou plus généralement :

Lemme 17 (Lemme magique)**.**
Soit ABC un triangle et D un point sur (BC). On a (les angles sont ici orientés) :

$$\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\sin \widehat{DAB}}{\sin \widehat{DAC}}$$

Démonstration. (Sans utiliser la loi des sinus) Si on appelle H_B le projeté de D sur (AB) et H_C celui sur (AC), puis que l'on note pour trois points X, Y, Z l'aire du triangle XYZ par $\mathcal{A}_{XYZ}$, on a :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{\mathcal{A}_{ABD}}{\mathcal{A}_{ACD}} = \frac{AB \cdot DH_B}{AC \cdot DH_C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AD \cdot \sin \widehat{DAB}}{AD \cdot \sin \widehat{DAC}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \widehat{DAB}}{\sin \widehat{DAC}}$$

□

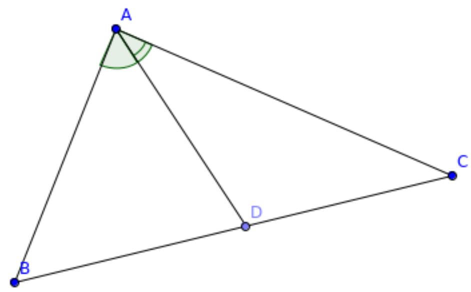


FIGURE 12 – Généralisation de la formule de la bissectrice

Formule d'Al-Kashi

Théorème 18 (Formule d'Al-Kashi)**.**
Soit ABC un triangle. On a l'égalité suivante :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{BAC})$$

On remarque que le théorème de Pythagore est un cas particulier de la formule d'Al-Kashi, mais on peut l'utiliser pour le démontrer :
Démonstration. Soit H le pied de la hauteur issue de B.
$BC^2 = CH^2 + BH^2 = (AC - AH)^2 + (AB^2 - AH^2) = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AH = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AC \cdot AB \cdot \cos(\widehat{BAC})$. □

FIGURE 13 – Formule d'Al-Kashi

Théorèmes de Ménélaüs et Ceva

Théorème 19 (Théorème de Ceva)**.**
Soit ABC un triangle et A', B', C' des points sur $(BC), (AC), (AB)$ respectivement. On a :

$$(AA'), (BB'), (CC') \textbf{ concourantes } \Leftrightarrow \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

Théorème 20 (Théorème de Ménélaüs)**.**
Soit ABC un triangle et A', B', C' des points sur $(BC), (AC), (AB)$ respectivement. On a :

$$A', B', C' \textbf{ alignés } \Leftrightarrow \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

La loi des sinus permet d'en donner les analogues suivants, les angles sont ici orientés :

Théorème 21 (Théorème de Ceva trigonométrique)**.**
Soit ABC un triangle et A', B', C' des points sur $(BC), (AC), (AB)$ respectivement. On a :

$$(AA'), (BB'), (CC') \text{ concourantes } \Leftrightarrow \frac{\sin \widehat{A'AB}}{\sin \widehat{A'AC}} \cdot \frac{\sin \widehat{B'BC}}{\sin \widehat{B'BA}} \cdot \frac{\sin \widehat{C'CA}}{\sin \widehat{C'CB}} = -1$$

Théorème 22 (Théorème de Ménélaüs trigonométrique)**.**
Soit ABC un triangle et A', B', C' des points sur $(BC), (AC), (AB)$ respectivement. On a :

$$A', B', C' \text{ alignés } \Leftrightarrow \frac{\sin \widehat{A'AB}}{\sin \widehat{A'AC}} \cdot \frac{\sin \widehat{B'BC}}{\sin \widehat{B'BA}} \cdot \frac{\sin \widehat{C'CA}}{\sin \widehat{C'CB}} = 1$$

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle. On définit A_1, A_2 sur (BC) de sorte que A_1, B, C, A_2 soit alignés dans cet ordre et $A_1B = AC, CA_2 = AB$. On définit de même B_1, B_2 et C_1, C_2. Montrer que $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sont cocycliques.

Solution de l'exercice 1
Le théorème de la puissance d'un point permet d'affirmer que $C_1A_2C_2A_1, C_1B_2C_2B_1$ et $B_2A_1B_1A_2$ sont sur des cercles ω_1, ω_2 et ω_3. Or si ces cercles ne sont pas confondus (ils ne sont pas inclus l'un dans l'autre), leurs axes radicaux sont deux à deux $(C_1C_2) = (AB), (A_1A_2) = (BC)$ et $(B_1B_2) = (AC)$. Comme ces droites ne sont pas concourantes, c'est que les cercles sont confondus.

Exercice 2
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle $\mathcal{C}$ de centre O. Soit F un point sur $[AB]$ tel que $AF \leqslant \frac{AB}{2}$. Le cercle de centre F passant par A recoupe $\mathcal{C}$ en K et (AO) en A'. Montrer que O, B, K, F, A' sont cocycliques.

Solution de l'exercice 2
$AF = A'F$ et $AO = OB$ donc $\widehat{FA'A} = \widehat{FAO} = \widehat{BAO} = \widehat{ABO}$. Donc F, A', B, O sont cocycliques. Puis $\widehat{KFB} = 2 \cdot \widehat{KAB} = \widehat{KOB}$. Donc K, F, O, B sont encore cocycliques.

Exercice 3
Soit $ABCD$ un trapèze tel que $(AB)(CD)$. Une droite parallèle à (AB) recoupe $[AD]$ en M et $[BC]$ en N. Montrer que $DC \cdot MA + AB \cdot MD = MN \cdot AD$.

Solution de l'exercice 3
On introduit X le point d'intersection de $(AD) = (BC)$. On peut par exemple supposer que X est du même côté de (AB) que (DC). Par le théorème de Thalès : $DC \cdot MA = MN \cdot \frac{XD}{XM} \cdot (XA - XM) = MN \cdot \frac{XD \cdot XA}{XM} - MN \cdot XD$. De même $AB \cdot MD = MN \cdot \frac{XA}{XM} \cdot (XM - XD) = MN \cdot XA - MN \cdot \frac{XA \cdot XD}{XM}$. Donc $DC \cdot MA + AB \cdot MD = MN \cdot (XA - XD) = MN \cdot AD$.

Exercice 4
Soit ABC un triangle. Un cercle passant par B et C recoupe (AB) et (AC) en B' et C' respectivement. Soit O le centre du cercle circonscrit à $AB'C'$. Montrer que $(AO) \perp (BC)$.

Solution de l'exercice 4
On pose $\alpha = \widehat{CAO}$. Par angle au centre : $\widehat{AB'C} = \frac{1}{2}\widehat{AOC'} = 90°-\alpha$. Puis par angle inscrit : $\widehat{BCA} = \widehat{AB'C'} = 90°-\widehat{CAO}$.

Exercice 5
Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A. On note M et N les milieux de $[AB]$ et

$[AC]$, et I celui de $[MN]$. Soit X la deuxième intersection des cercles circonscrits à BHM et CNH, notés Γ_1 et Γ_2. Montrer que H, X, I sont alignés.

Solution de l'exercice 5

Comme $(MN)//(BC)$, $\widehat{HBM} = \widehat{NMA}$ et (MN) est tangente à Γ_1 en M. Ainsi $P_{\Gamma_1}(I) = MI^2$. On obtient de même que I est sur l'axe radical de Γ_1 et Γ_2, qui est la droite (HX).

Exercice 6

Soit ABC un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus) inscrit dans un cercle de centre O, et H son orthocentre. On note M le milieu de $[BC]$ et D le pied de la bissectrice issue de A. Le cercle circonscrit à BHC recoupe $[OM]$ en N. Montrer que $\widehat{ADO} = \widehat{HAN}$.

Solution de l'exercice 6

Le cercle circonscrit à BHC est le symétrique de celui de ABC par rapport à (BC). On note S le pôle Sud par rapport à A. $\widehat{DAO} = \widehat{DSO} = \widehat{DSM} = \widehat{DNM}$ donc A, O, N, D sont cocycliques. Alors $\widehat{ADO} = \widehat{ANO} = \widehat{HAN}$ car $(AH)//(OM)$.

Exercice 7

Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de A. On note O (resp O_1, resp O_2= le centre du cercle circonscrit à ABC (resp ABD, resp ADC). Montrer que $OO_1 = OO_2$.

Solution de l'exercice 7

On calcule les angles : $\widehat{BAO_1} = \widehat{BAO_2} = x$ donc $\widehat{OO_1A} + \widehat{OO_2A} = 180°$et AO_1OO_2 sont cocycliques. Puis on calcule $y = \widehat{BAO} = x$ donc $\widehat{O_1AO} = \widehat{OAO_2}$. Par angle inscrit, $OO_1 = OO_2$.

Exercice 8

Soit ABC un triangle d'orthocentre H et Γ son cercle circonscrit. On note H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de B et C, M le milieu de $[BC]$ et K le second point d'intersection de Γ avec le cercle circonscrit à AH_BH_C. Montrer que M, H et K sont alignés.

Solution de l'exercice 8

On pose Γ' le cercle circonscrit à AH_BH_C. $H \in \Gamma'$, c'est le point diamétralement opposé à A. Donc : $\widehat{AKH} = 90°= \widehat{AKA'}$ où H' est le point diamétralement opposé à A sur Γ, c'est le symétrique de H par rapport à M. Ainsi K, H et A' sont alignés, puis M étant le milieu de $[HA']$, K, H et M sont alignés.

Exercice 9

Soit ABC un triangle et P, Q des points sur $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, tels que $AP = AQ$. Soit R et S des points sur $[BC]$ tels que R est entre B et S, $\widehat{BPR} = \widehat{PSR}$ et $\widehat{CQS} = \widehat{QRS}$. Montrer que P, Q, S, R sont cocycliques.

Solution de l'exercice 9

Γ_1 le cercle circonscrit à PSR est tangent à (AB) en P, de même Γ_2 le cercle circonscrit à QSR est tangent à (AC) en Q. Le centre de Γ_1 (resp Γ_2) est O_1 (resp O_2), intersection de la médiatrice de $[RS]$ avec la perpendiculaire à (AB) (resp (AC)) issue de P (resp Q). A est sur l'axe radical de Γ_1 et Γ_2 puisque $P_{\Gamma_1}(A) = AP^2 = AQ^2 = P_{\Gamma_2}(A)$. Or cet axe radical est une des perpendiculaires à $[O_1O_1]$. Si $O_1 \neq 0_2$, cela voudrait dire que le projeté de A sur la médiatrice de $[RS]$ appartient à $[O_1O_2]$, c'est impossible. Donc $O_1 = O_2$ et $\Gamma_1 = \Gamma_2$, autrement dit P, Q, R, S sont cocycliques.

3 Inégalités (Victor Vermès)

Le cours proposé est le même que celui fait par Baptise Louf au stage de Montpellier 2014 (page 162) : http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/stage_ete_2014.pdf

4 TD de géométrie : configurations classiques (Olivier Garçonnet)

Ce TD a pour but d'appliquer les notions introduites au cour précédent de géométrie, ainsi on a fait plusieurs exercices sur la chasse aux angles qui est primordiale dans la résolution des exercices d'Olympiades, puis sur la puissance d'un point. Pour trouver des exercices un peu plus dur, vous pouvez entre autre, aller voir mon cours au groupe C (Premier cours).

Chasse aux angles

Exercice 1
Soit deux cercles $\Gamma 1$ et $\Gamma 2$, s'intersectant en deux points distincts A et B, soit $P \in \Gamma 1$ et $Q \in \Gamma 2$ tels que P, B, Q sont alignés dans cette ordre. Soit T l'intersection des tangentes à $\Gamma 2$ en P et à $\Gamma 2$ en Q.

Montrer que $AQTP$ est cocyclique.

Solution de l'exercice 1
Par chasse aux angles et relation avec la tangente, on a $widehat PTQ = 180 - \widehat{TPQ} - \widehat{TQP} = 180 - \widehat{PAB} - \widehat{BAQ} = 180 - \widehat{PAQ}$, ainsi APTQ est cocyclique.

Exercice 2
Soit ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} > 90$, soit O le centre du cercle circonscrit à ABC, Soit T l'intersection du cercle circonscrit à OBC et à la bissectrice de $\widehat{AOB}$.

Montrer que $T \in (AC)$.

Solution de l'exercice 2
Dans le quadrilatère cyclique $BCDT$, on a $\widehat{BCT} = \widehat{BOT}$, par la bissectrice on a $\widehat{BOT} = \widehat{BOA}/2$, puis par angles au centre $\widehat{BOA}/2 = \widehat{ACB}$, on peut tout mettre bout à bout et on obtient $\widehat{BCT} = \widehat{BCA}$ donc T, A, C sont alignés.

Exercice 3
Soit un triangle ABC de centre de cercle inscrit I. Le cercle inscrit est tangent à BC, CA, AB en D, E, F respectivement. Soit P du même côté de EF que A tel que $\widehat{PEF} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{PFE} = \widehat{ACB}$.

Montrer que P, I, D sont alignés.

Solution de l'exercice 3
$PEF \sim ABC$ donc $APFE$ est cocyclique, I appartient à ce cercle car $\widehat{AFI} + \widehat{AEI} = 180$. Puis chasse aux angles, $\widehat{FIP} = \widehat{FEP} = \widehat{FBD} = 180 - \widehat{FID}$, ainsi P, I, D sont alignés.

Exercice 4

4 pièces de monnaies : Soit quatres cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ tangents extérieurement entre eux, $A = \Gamma_1 \cap \Gamma_2,\ B = \Gamma_2 \cap \Gamma_3, C = \Gamma_3 \cap \Gamma_4, D = \Gamma_4 \cap \Gamma_1$.

Montrer que $ABCD$ est cocyclique.

Solution de l'exercice 4

On regarde la seule information que l'on connait, c'est à dire les tangentes aux différentes cercles. Soit d_1, d_2, d_3, d_4, les tangentes en A, B, C, D respectivement. Soit α l'angle entre $[AB]$ et d_1 on a par les angles à la tangente que il est égale à l'angle entre $[AB]$ et d_2. Puis de même on prend β, l'angle entre $[CB]$ et d_2, γ, l'angle entre $[CD]$ et d_3, δ, l'angle entre $[DA]$ et d_4. Maintenant on peut calculer la somme des angles opposés dans le quadrilatère $ABCD$. $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, mais on a aussi $\widehat{BCD} + \widehat{DAB} = \alpha + \beta + \gamma + \delta$. Finalement comme la somme des angles d'un quadrilatère vaut 360 degré il vient $\widehat{ABC} + \widehat{CDA} = 360/2$, donc $ABCD$ est cocyclique.

Puissance d'un point

Exercice 5

On considère K et L deux points d'un cercle Γ de centre O. Soit A un point de la droite (KL) en dehors du cercle. On note P et Q les points de contact des tangentes à Γ issues de A. Soit M le milieu de $[PQ]$.

Montrer que les angles $\widehat{MKO}$ et $\widehat{MLO}$ sont égaux.

Solution de l'exercice 5

O, M, P sont alignés car M et O appartiennent à la bissectrice de $\widehat{PAQ}$. Comme $\widehat{AMP} = \widehat{APO} = 90$, on a $AMP \sim APO$ et donc $AM \times AO = AP^2 = \mathcal{P}_A(\Gamma) = AK \times AL$, $KLOM$ est cocyclique et $\widehat{MKO} = \widehat{MLO}$.

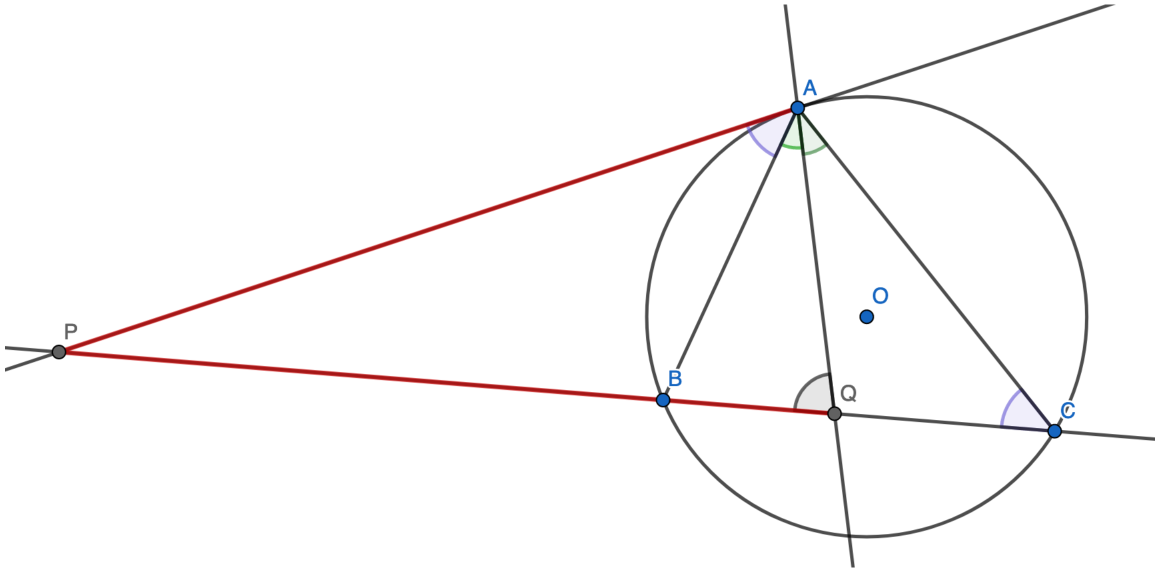
5 TD de géométrie (Auguste de Lambilly, Andrei Barbu)

Exercice 1

Soit ABC un triangle, on nomme P l'intersection de la tangente au cercle circonscrit à ABC en A et (BC). On nomme Q l'intersection de la bissectrice issue de A et (BC). Montrer que $AP = PQ$.

Solution de l'exercice 1

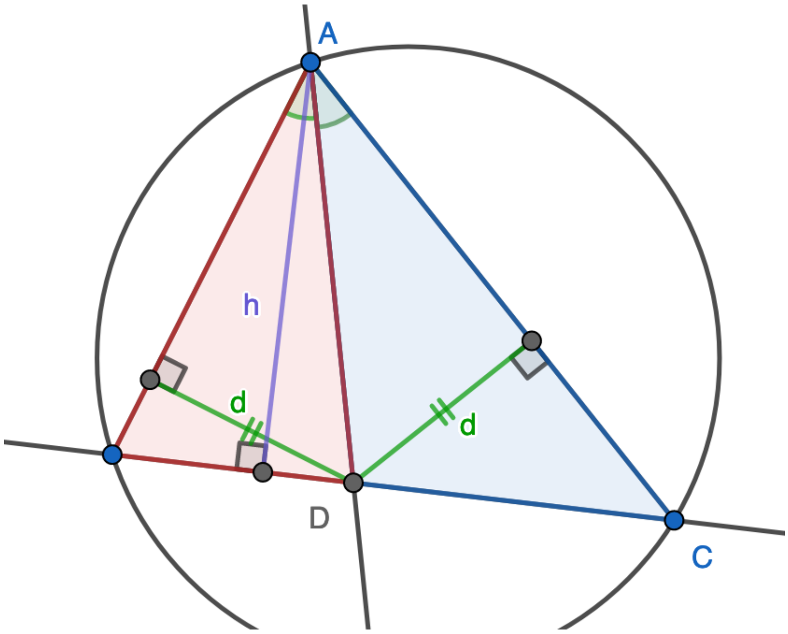
Par cas limite de l'angle inscrit, on a $\widehat{BAP} = \widehat{BCA}$. Donc, $\widehat{PAQ} = \widehat{BCA} + \widehat{BAQ}$. De plus, comme $Q \in [PC]$, on a : $\widehat{PQA} = \widehat{QAC} + \widehat{QCA} = \widehat{QAB} + \widehat{BCA}$. Ainsi, dans PAQ, on a : $\widehat{PAQ} = \widehat{PQA}$, il est donc isocèle en P, donc $AP = PQ$.



Exercice 2
Soient $ABCD$ un quadrilatère cyclique. On note X l'intersection des diagonales de ABCD. Montrer que $AX \times CX = BX \times DX$. *Solution de l'exercice 2*

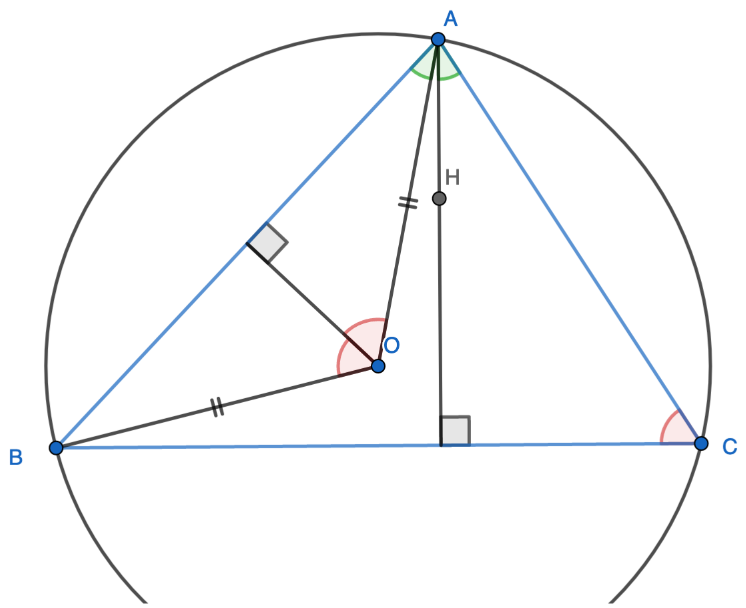
On note Γ le cercle corconscrit à $ABCD$. La puissance de X par rapport à Γ est égale à $AX \times CX$ et à $BX \times DX$, donc :$AX \times CX = BX \times DX$.

Exercice 3
Théorème de la bissectrice. Soit ABC un triangle. On note D le pied de la bissectrice issue de A. Prouver que $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.
Solution de l'exercice 3
On va calculer le rapport $\alpha = \frac{Aire(ABD)}{Aire(ACD)}$ de deux façons. On note h la distance de A à $[BC]$. Donc, $\alpha = \frac{\frac{h}{2}BD}{\frac{h}{2}CD} = \frac{BD}{CD}$. On note d la distance de D à AB, qui est la même que celle à AC car D est sur la bissectrice issue de A. Donc, $\alpha = \frac{\frac{d}{2}AB}{\frac{d}{2}AC} = \frac{AB}{AC}$. Donc $\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD}$.



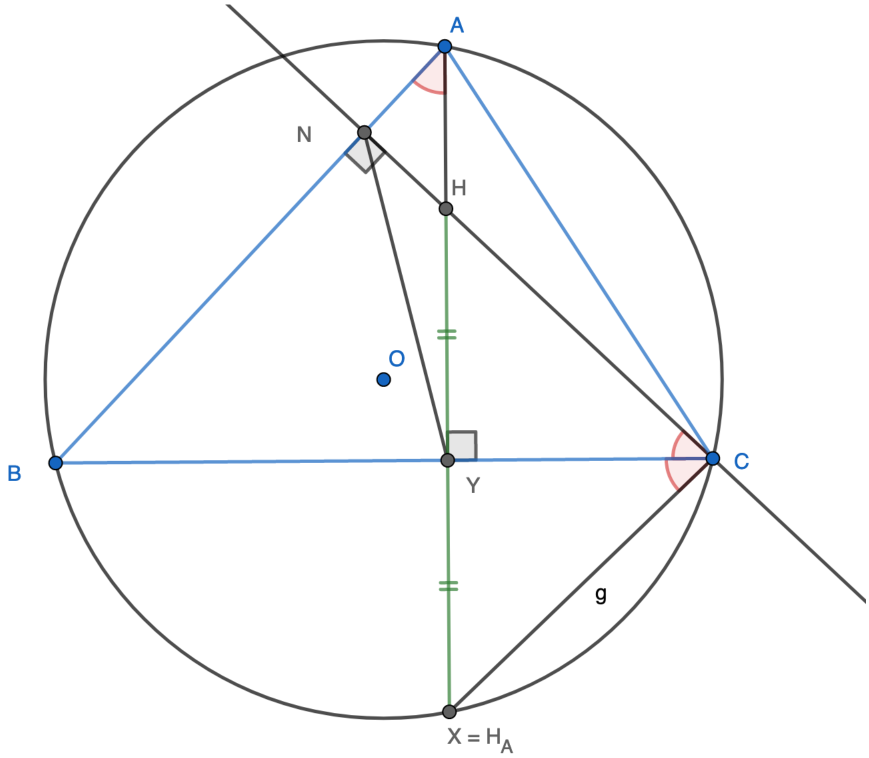
Exercice 4
Soit O le centre du cercle inscrit du triangle ABC et H son orthocentre. Montrer que $\widehat{OAB} = \widehat{HAC}$. *Solution de l'exercice 4*

On note a l'angle $\widehat{HAC}$. Comme (HA) est la hauteur issue de A, on a : $\widehat{ACB} = 90 - a$. Donc par angle au centre $\widehat{AOB} = 180 - 2a$. Or, AOC est isocèle en O, donc $\widehat{OAB} = \frac{180-\widehat{AOB}}{2} = a$. Ainsi : $\widehat{OAB} = \widehat{HAC}$.



Exercice 5
Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Montrer que les symétriques H_A, H_B, H_C de H par rapport aux cotés du triangle (BC), (AC), (AB) (respectivement) sont sur le cercle circonscrit à ABC. *Solution de l'exercice 5*

Il suffit de la montrer pour H_A, le raisonnement sera analogue pour les deux autres. On note X l'intersection de la hauteur issue de A et du cercle circonscrit à ABC, et Y celle avec (BC). Par angle inscrit, $\widehat{BAX} = \widehat{BCX} = \widehat{YCX}$. De plus si on nomme N le pied de la hauteur issue de C, on reconnaît la configuration papillon avec les angles droits dans le quadrilatère $ANYC$. Donc ce quadrilatère est cyclique, on en déduit que $\widehat{NAY} = \widehat{NCY}$ toujours suivant la configuration papillon. De cela on déduit que $\widehat{YCX} = \widehat{YCH}$, ainsi (CY) bissectrice dans HXC, mais elle est également la hauteur, par conséquent le triangle HCX est isocèle et donc $HY = YX$. Finalement, X est le symétrique de H par rapport à (BC). C'est à dire : $X = H_A$. Ou encore, H_A est sur le cercle circonscrit à ABC.

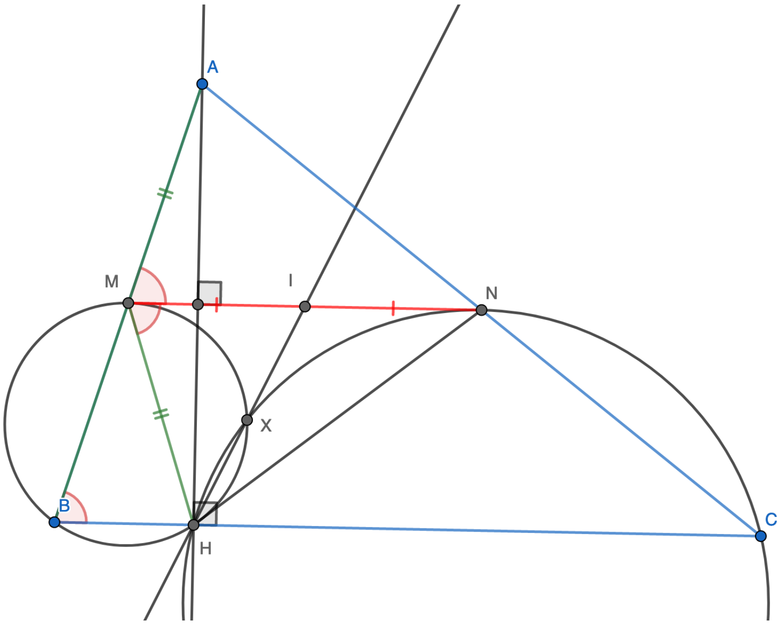


Exercice 6
Soient A et B les points d'intersection de deux cercles C_1 et C_2 de centres respectifs O_1 et O_2. Montrer que (AB) est perpendiculaire à (O_1O_2).

Solution de l'exercice 6
On a $AO_1 = BO_1$ et $AO_2 = BO_2$, donc O_1O_2 est la mediatrice de $[AB]$, ainsi $(AB) \perp (O_1O_2)$.

Exercice 7
Soit ABC un triangle et H le pied de la hauteur issue de A. On note M et N les milieux de $[AB]$ et de $[AC]$, et I celui de $[MN]$. Soit X la deuxième intersection des cercles circonscrits à BHM et CNH, notés Γ_1 et Γ_2. Montrer que H, X, I sont alignés.

Solution de l'exercice 7
On remarque que (HX) est l'axe radical des cercles Γ_1 et Γ_2. On souhaite donc montrer que I est sur cet axe radical. Pour cela montrons que (MN) est tangent aux deux cercles en M et N respectivement, ainsi, comme I est le milieu de $[MN]$, on aura la puissance de I par rapport aux cercles qui sera de IM^2 et IN^2, c'est à dire la même, il serait donc sur l'axe radical. Pour cela, on a par angles correspondants $\widehat{CBA} = \widehat{NMA}$. De plus, comme le triangle HBA est rectangle en H et que M est le milieu de l'hypothénuse, $HM = MA$, ou HMA isocèle en M. Or, (MN) est la hauteur issue de M dans HMA (car $(MN) \perp (HA)$), donc c'est également la bissectrice, ainsi, $\widehat{HMN} = \widehat{NMA} = \widehat{CBA}$. On remarque donc le cas limite de l'angle inscrit. Donc, on a bien (MN) tangent à Γ_1 en M. On procède de manière analogue avec Γ_2.

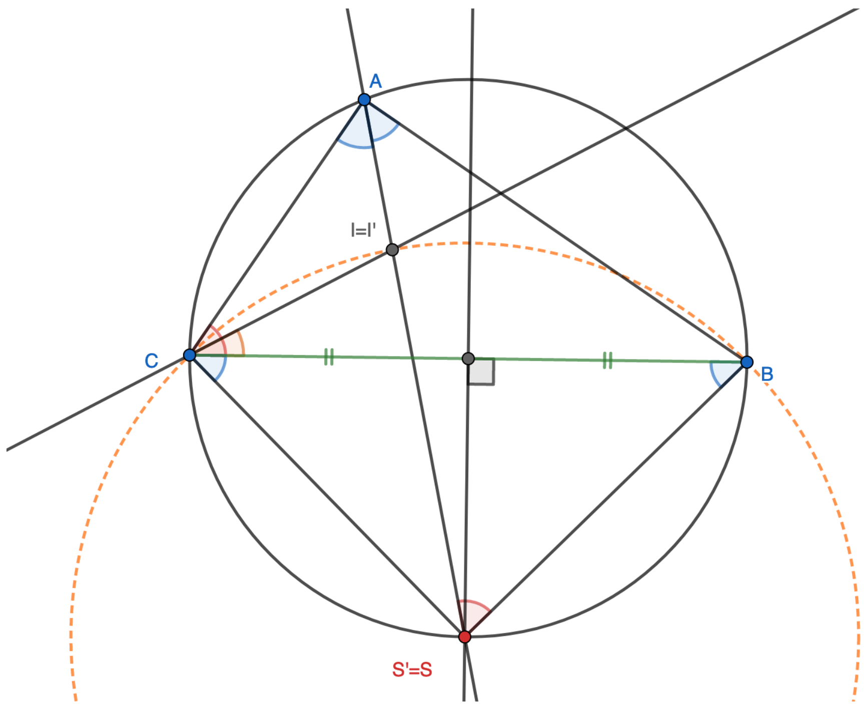


Exercice 8
Pole Sud.

Montrer que S, l'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et la médiatrice de $[BC]$ se trouve sur le cercle circonscrit à ABC.

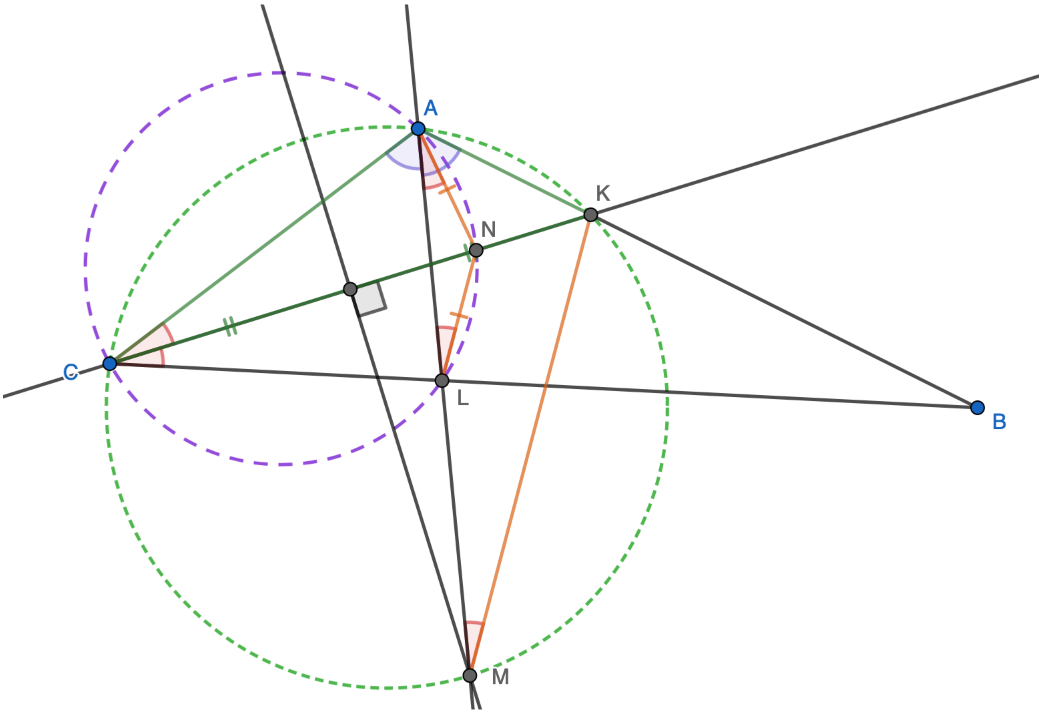
Montrer que le cercle de centre S et passant par B passe aussi par C et par I, le centre du cercle inscrit à ABC.

Solution de l'exercice 8
On note S' le point d'intersection de la bissectrice issue de A dans ABC avec son cercle circonscrit. Donc par angle inscrit, $\widehat{CAS'} = \widehat{CBS'}$ et $\widehat{BAS'} = \widehat{BCS'}$. Or, (BS') est la bissectrice de $\widehat{BAC}$, donc, $\widehat{BCS'} = \widehat{CBS'}$. Donc, BCS' est isocèle en S'. Ainsi, $S'B = S'C$, donc S' est sur la médiatrice de $[BC]$. Donc, $S = S'$. On a donc dejà $SB = SC$. On définit I' comme le point d'intersection de (AS) et du cercle de centre S, de rayon SB. On a par angle inscrit $\widehat{ACB} = \widehat{ASB} = \widehat{I'SB}$, Donc, par angle au centre, $\widehat{I'CB} = \frac{\widehat{ACB}}{2}$. Ainsi, (CI') est la bissectrice de $\widehat{ACB}$. Donc, $I = I'$.



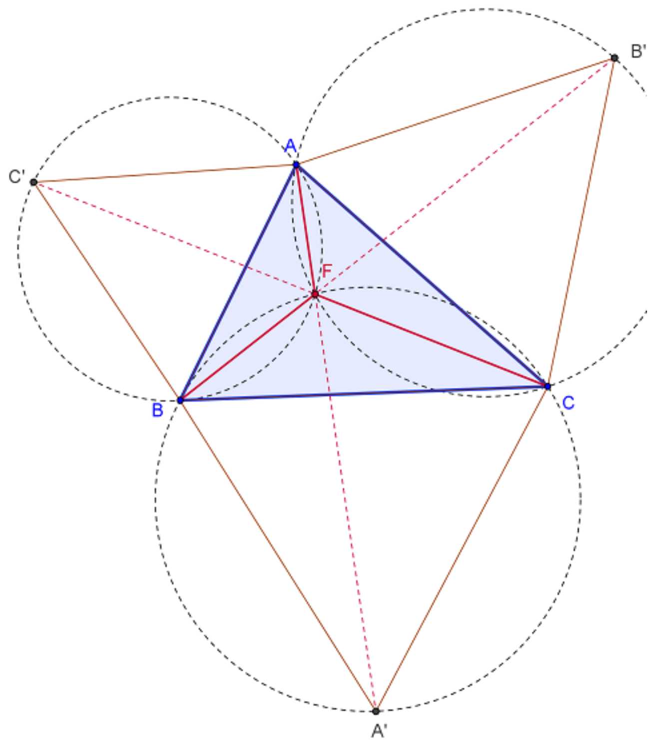
Exercice 9
Soit (AL) et (BK) les bissectrices du triangle non isocèle ABC (L se trouve sur (BC) et K sur (AC)). La médiatrice de (BK) coupe la ligne (AL) au point M. Le point N est situé sur la ligne (BK), de sorte que (LN) est parallèle à (MK). Prouver que $LN = NA$.

Solution de l'exercice 9
Dans le triangle ABK, la bissectrice issue de A et la médiatrice de $[BK]$ se coupent en M, donc c'est son pôle sud. Ainsi, $ABKM$ cyclique. Donc par angle inscrit $\widehat{ABK} = \widehat{AMK} = \widehat{ALN}$ par angles correspondants. Donc, $ABLN$ cyclique. Donc, par angle inscrit $\widehat{LBN} = \widehat{LAN}$. Or, comme $(BK) = (BN)$ est la bissectrice de $\widehat{ABC}$, $\widehat{ABK} = \widehat{LBN}$. Ainsi, $\widehat{ALN} = \widehat{LAN}$. Il suit que LAN est isocèle en N, et $LN = NA$.



Exercice 10
Point de Torricelli. Soit ABC un triangle. On construit trois triangles équilatéraux sur les côtés du triangle, vers l'éxtérieur du triangle. On note $A\prime$ (respectivement $B\prime$ et $C\prime$) le sommet du triangle équilatéral construit sur $[BC]$ (respectivement $[AC]$ et $[AB]$). Montrer que $AA\prime$, $BB\prime$ et $CC\prime$ sont concourrantes.

Solution de l'exercice 10
On note F le point d'intersection des cercles circonscrits à $ABC\prime$ et à $AB\prime C$. Par angle inscrit $\widehat{BFC\prime} = \widehat{AFC\prime} = \widehat{AFB\prime} = \widehat{CFB\prime} = 60$. Donc, $\widehat{C\prime FC} = \widehat{BFB\prime} = 180$ ou $B, F, B\prime$ et $C, F, C\prime$ alignés. En outre, $\widehat{BFC} = 120$, donc $BFCA\prime$ est cyclique. On en déduit $\widehat{AFA\prime} = 180$. Ainsi, F est le point de concours de $AA\prime$, $BB\prime$ et $CC\prime$.



Exercice 11
G1 2018. Soit ABC un triangle acutangle (pas d'angle obtus). Soit Γ son cercle circonscrit. Soient D et E des poins respectivement sur [AB] et [AC] tels que AD=AE. Les médiatrices de [BD]et de [CE] coupent les petits arcs $\widehat{AB}$ et $\widehat{AC}$ de Γ en F et G respectivement. Montrer que $DE \mid\mid FG$.

Étapes :
-Introduire les intersections de FG avec AB et AC et reformulez l'énoncé.
-Introduire le point X tel que ADFX est un parallélogramme, que pouvez vous en dire ?
-Conclure.

Solution de l'exercice 11
cf https://www.imo-official.org/problems/IMO2018SL.pdf#section*.59

6 TD d'algèbre (Lilou Wattez, Auguste de Lambilly)

Exercice 1
Déterminer toute les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, f(a+b) = f(ab)$$

Solution de l'exercice 1
Avec $b = 0$, on a $\forall a \in \mathbb{R}, f(a) = f(0)$. On vérifie réciproquement que les fonctions constantes sont solutions. Donc, les seules solutions sont les fonctions constantes.

Exercice 2
Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, 2^n \geqslant n$$

Solution de l'exercice 2
On a $2 \geqslant \frac{n + \overbrace{1 + \dots + 1}^{n-1}}{n} \geqslant \sqrt[n]{n}$. Donc, $2^n \geqslant n$.

Exercice 3
Déterminer toute les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x+y) = xf(x) + yf(y)$$

Solution de l'exercice 3
On pose $y = 0$, on a : $f(x) = xf(x) \iff f(x)(1-x) = 0$. Donc pour $x \neq 1$, $f(x) = 0$. Et avec $x = y = 1$, on a $f(1) = 0$. Donc f est nulle. On vérifie que la fonction nulle est solution. La seule solution est ainsi la fonction nulle.

Exercice 4
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que :

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \geqslant 5x^2$$

Solution de l'exercice 4
Par IAG on a : $\frac{1+x+x^2+x^3+x^4}{5} \geqslant \sqrt[5]{1 \times x \times x^2 \times x^3 \times x^4} = x^2$ Donc, $1 + x + x^2 + x^3 + x^4 \geqslant 5x^2$.

Exercice 5
Déterminer toute les fonctions de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ satisfaisant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2, f(x+y) = f(x) + f(y) + 2$$

Solution de l'exercice 5
On pose $y = 1$. On a donc : $f(x+1) = f(x) + (f(1) + 2)$. Ainsi, la suite $(f(n))_{\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $f(1) + 2$ et de premier terme $f(0)$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n(f(1) + 2) + f(0)$. Avec $x = y = 0$, on a $f(0) = -2$. Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n(f(1) + 2) - 2$. Donc, avec $x \in \mathbb{N}$ et $y = -x$, on a : $f(0) = f(x) + f(-x) + 2$ ou $f(-x) = -x(f(1) + 2) - 2$. On vérifie que toutes les fonctions $f : x \mapsto ax - 2$ avec $a \in \mathbb{Z}$ sont solutions, ce sont donc les seules.

Exercice 6
Soit a,b deux réels positifs tels que $ab \geqslant 1$. Montrer que :

$$\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leqslant 1$$

Déterminer le cas d'égalité.

Solution de l'exercice 6
$\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}\leqslant 1 \iff \frac{1+b+1+a}{(1+a)(1+b)}\leqslant 1 \iff 2+a+b\leqslant 1+a+b+ab \iff 1\leqslant ab$ L'inégalité est donc vérifié par hypothèse, le cas d'égalité est donc $ab=1$.

Exercice 7
Déterminer toute les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(f(x)+9y)=f(y)+9x+24y$$

Solution de l'exercice 7
On pose $y=-\frac{f(x)}{8}$. Donc, $f(-\frac{f(x)}{8})=f(-\frac{f(x)}{8})+9x+24(-\frac{f(x)}{8})$. C'est à dire $f(x)=3x$, qui vérifie bien l'équation initiale.

Exercice 8
Soit $(a,b,c)\in(\mathbb{R}_+)^3$ tels que $abc=1$. Montrer que :

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geqslant\frac{3}{2}.$$

Solution de l'exercice 8
Par Cauchy-Schwarz : $(\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)})(a(b+c)+b(a+c)+c(a+b))\leqslant(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})^2=(bc+ac+ab)^2$. Ainsi : $(\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)})\geqslant\frac{ab+bc+ac}{2}\geqslant\frac{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}}{2}=\frac{3}{2}$.

Exercice 9
Déterminer toute les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x^{42^{42}}+y)=f(x^3+2y)+f(x^{12})$$

Solution de l'exercice 9
On pose $y=x^{42^{42}}-x^3$. Donc, $f(2x^{42^{42}}-x^3)=f(2x^{42^{42}}-x^3)+f(x^{12})$. Donc pour tout $x\geqslant 0$, $f(x)=0$. Donc, avec $y=0$, $f(x^{42^{42}}=f(x^3)+f(x^{12})$, soit $f(x^3)=0$. Donc f est nulle, et la fonction nulle est bien solution.

Exercice 10
Soit a,b,c trois réels positifs tels que $abc\geqslant 1$. Montrer que :

$$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}\leqslant 1$$

Déterminer le cas d'égalité.

Solution de l'exercice 10
$\frac{1}{2+a}+\frac{1}{2+b}+\frac{1}{2+c}\leqslant 1 \iff (2+a)(2+b)+(2+a)(2+c)+(2+b)(2+c)\leqslant(2+a)(2+b)(2+c) \iff 12+4(a+b+c)+ab+ac+bc\leqslant 8+4(a+b+c)+2(ab+ac+bc)+abc. \iff \frac{abc+ab+ac+bc}{4}\geqslant 1$.
Or, par IAG : $\frac{abc+ab+ac+bc}{4}\geqslant\sqrt[4]{a^3b^3c^3}\geqslant 1$ par hypothèse. L'égalité a donc lieu si $abc=1$, et que l'on est dans le cas d'égalité de l'IAG, c'est à dire $a=b=c=1$.

Exercice 11
Déterminer toute les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x)f(y) + f(x+y) = xy$$

Solution de l'exercice 11
On pose $y = 0$. On a $f(x)(f(0)+1) = 0.$. On procède par disjonction des cas :
$\bullet f(0) \neq -1$, alors $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$.
$\bullet f(0) = -1$. Donc, avec $y = -x$, $f(x)f(-x) = 1 - x^2$. Donc avec $x = 1$, on a :
-$f(1) = 0$. Donc, avec $y = 1$, $f(x+1) = x$ ou $f(x) = x - 1$.
-$f(-1) = 0$. Donc, avec $y = -1$, $f(x-1) = -x$ ou $f(x) = -x - 1$.
Au final, on vérifie aisément que $f : x \mapsto 0$, $f : x \mapsto -x-1$, $f : x \mapsto x-1$ sont bien solutions.

Exercice 12
Soient a,b,c trois réels strictement positifs. On suppose $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Montrer que :

$$\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{3}{2}$$

Solution de l'exercice 12
Par Cauchy-Schwarz : $(\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca})(1+ab+1+bc+1+ac) \geqslant 3^2$. Par conséquent $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{9}{3+ab+ac+bc}$. Or, par inégalité de réarrangement : " $= a^2+b^2+cr \geqslant ab+ac+bc$. Donc, $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ca} \geqslant \frac{9}{3+3} = \frac{3}{2}$.

4 Entraînement de fin de parcours

Exercice 1

Soient a, b, c des nombres réels positifs tels que $(a+1)(b+1)(c+1) = 8$. Montrer que
$$a + b + c \geqslant 3.$$

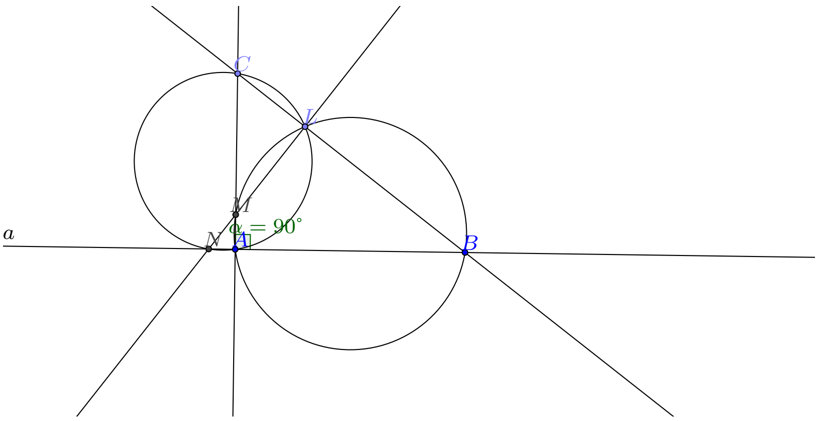
Solution de l'exercice 1
Réécrivons le membre de gauche pour retrouver les hypothèses, $a+b+c \geqslant 3 \iff ((a+1)+(b+1)+(c+1)) \geqslant 6 \iff \frac{a+1+b+1+c+1}{3} \geqslant 2$.
Cette dernière inégalité est vraie car d'après IAG $\frac{(a+1)+(b+1)+(c+1)}{3} \geqslant \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)} = 2$

Exercice 2

Soit ABC un triangle rectangle en A, soit L un point appartenant à $[BC]$. Les cercles circonscrits à ABL et CAL recoupent AC et AB en M et N, respectivement.

Montrer que les points L, M, N sont alignés.

Solution de l'exercice 2
Montrons que (NL) et (ML) sont perpendiculaires à (BC). Dans le quadrilatère cocyclique $ANLC$, comme $\widehat{BAC} = 90$, on a $\widehat{NLC} = 90$, de même dans le quadrilatère cocyclique $MALB$, $\widehat{MLB} = 90$. Ainsi on a la perpendicularité, et N, M, L sont alignés.



Exercice 3

Soient quatre points A, B, C, D alignés dans cette ordre, les cercles Γ_1, de diamètre $[AC]$, Γ_2 de diamètre $[BD]$ s'intersectent en X et en Y. Soit $O \in [XY]$. Les droites (OC) et (OB) recoupent Γ_1 et Γ_2 en M et N respectivement.

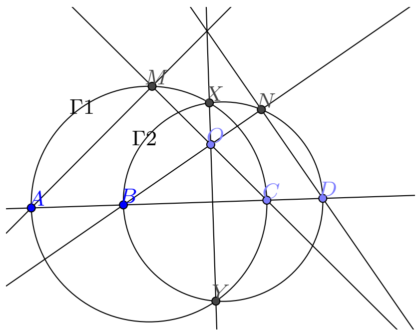
Montrer que les droites (AM), (XY), et (ND) sont concourantes.

Solution de l'exercice 3

On a par la puissance de O par rapport à Γ_1 et Γ_2, $OC \times OM = \mathcal{P}_O(\Gamma_1) = OX \times OY = \mathcal{P}_0(\Gamma_2) = OB \times ON$, ainsi $MNCB$ est cocyclique.

Par chasse aux angles et grâce à la cocyclicité précédante $\widehat{AMN} = 90 + \widehat{CMN} = 90 + \widehat{NBD} = 90 + 90 - \widehat{NDB}$, on obtient que $AMND$ est cocyclique.

Finalement AM est l'axe radical du cercle circonscrit à $AMND$ et Γ_1, ND est l'axe radical du cercle circonscrit à $AMND$ et Γ_2, ND est l'axe radical de Γ_1 et de Γ_2, d'après le théorème des axes radicaux on peut conclure que (AM), (XY), et (ND) sont concourantes.



Exercice 4

Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant l'équation fonctionnelle suivante, pour tous x, y réels,

$$(y+1)f(x) + f(xf(y) + f(x+y)) = y$$

1)Montrer que f est bijective.

2)Trouver toutes les fonctions vérifiant cette équation.

Solution de l'exercice 4

On remarque que $f(x) \equiv 1$ n'est pas une solution. Donc il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 1$. En substituant $x = x_0$, on obtient :

$$f(x_0 f(y) + f(x_0 + y)) = y(1 - f(x_0)) - f(x_0)$$

Cette égalité montre que f est surjective. En effet, on a un terme fonctionnel en y à gauche et une fonction affine (donc surjective) à droite.

Ainsi, il existe a tel que $f(a) = 0$. En substituant $x = 0$, $y = a$, on obtient : $f(0)(a+2) = a$. On en conclue que $f(0) \neq 1$.

Substituons maintenant $x = 0$ dans la première équation pour obtenir : $f(f(y)) = y(1 - f(0)) - f(0)$.

Cette équation montre que f est injective. En effet, si on prend u et v tels que $f(u) = f(v)$,

alors :
$u(1 - f(0)) - f(0) = f(f(u)) = f(f(v)) = v(1 - f(0)) - f(0) \Rightarrow u = v$
Substituons $x = a$, $y = 0$ dans l'équation de départ pour obtenir :
$f(af(0)) = 0 = f(a) \Rightarrow af(0) = a \Rightarrow a = 0 \Rightarrow f(0) = 0$
La première implication découle de l'injectivité et la deuxième du fait que $f(0) \neq 1$.
Substituons finalement $x = 0$, puis $y = 0$ et on a : $f(f(y)) = y$ et $f(f(x)) = -f(x)$.
On en conclue que $f(x) \equiv -x$, dont on vérifie facilement que c'est bien une solution.

5 Derniers cours

1 Accrochage stratégique de peintures (Savinien Kreczman)

– Introduction –

Le mois dernier, vous étiez parvenu à vous débarasser d'un horrible portrait que votre belle-mère vous avait offert en feignant la chute malencontreuse du clou qui le retenait au mur. Malheureusement, votre belle-mère est fort têtue et elle vous a offert un nouveau tableau d'un goût...douteux. Elle vous recommande de l'accrocher au mur avec deux clous pour éviter qu'il ne tombe. Dans un élan inespéré de diplomatie, vous acquiescez. Soudain, un plan machiavélique vous vient à l'esprit. Peut-être est-il possible d'accrocher ce tableau au mur avec deux clous comme convenu, de telle sorte que la chute d'un seul des deux clous suffise à faire chuter le tableau ?

– Pratique –

Dans tous ce cours, on supposera que la corde ne peut pas se retenir elle-même (frottements, noeuds,...).
Les exercices marqués **[!]** sont difficiles et leur correction ne sera pas donnée.

Exercice 1
Accrocher une peinture à deux clous de telle manière que si l'un des deux clous est retiré (n'importe lequel), la peinture tombe.

Dans la suite, « n'importe lequel » sera sous-entendu.

Exercice 2
Accrocher une peinture à 3 clous de telle sorte que si l'un des clous est retiré, la peinture tombe.

Exercice 3
Accrocher une peinture à 4 clous de telle sorte que si l'un des clous est retiré, la peinture tombe. Votre solution est-elle « optimale » (d'ailleurs, comment définiriez-vous une solution « optimale ») ?
[!] Si vous pensez que votre solution est optimale, montrez-le.

Exercice 4
Accrocher une peinture à n clous de telle sorte que si l'un des clous est retiré, la peinture tombe. Estimer le nombre de « mouvements » nécessaire.

Exercice 5
Accrocher une peinture à 3 clous de telle sorte que si l'un des clous est retiré, la peinture reste accrochée, mais si deux clous sont retirés, elle tombe.

Exercice 6
Accorcher une peinture à n clous de telle sorte que la peinture reste accrochée si $n-2$ clous sont retirés mais tombe si $n-1$ clous sont retirés.

Exercice 7
Accrocher une peinture à 4 clous de telle sorte que si l'un des clous est retiré, la peinture reste accrochée, mais si deux clous sont retirés, elle tombe.

Exercice 8
Parmi 4 clous, 2 sont bleus et 2 rouges. Accrocher une peinture à ces clous de sorte que la peinture tombe quand tous les clous d'une couleur sont retirés, et pas avant.

Exercice 9
Parmi 6 clous, 3 sont bleus et 3 rouges. Accrocher une peinture à ces clous de sorte que la peinture tombe quand un clou bleu est retiré, ou quand deux clous rouges sont retirés, mais pas si un seul clou rouge est retiré.

Exercice 10
Parmi 6 clous, deux sont rouges, deux sont bleus et deux sont verts. Accrocher une peinture à ces clous de telle sorte que la peinture tombe lorsque deux clous de couleurs différentes sont retirés.
Veillez à décrire proprement votre assemblage, mais il n'est pas nécessaire de le réaliser explicitement.
[!] Même exercice, mais la peinture doit rester accrochée si un seul clou, ou deux clous de la même couleur, sont retirés.

Exercice 11
Comment exprimer d'une manière plus maniable des conditions du style de celle ci-dessus, de manière à généraliser au mieux le problème ?

Exercice 12
Déterminer pour lesquelles de ces conditions on peut accrocher une peinture à des clous de telle sorte que la peinture tombe quand la condition est remplie.

Exercice 13
[!!] Déterminer pour lesquelles de ces conditions on peut accrocher une peinture à des clous

de telle sorte que la peinture tombe quand la condition est remplie, et pas avant.

– Groupes –

Lors de la résolution des exercices, vous vous serez sans doute aperçus que les seules manipulations importantes de la corde sont : passer la corde autour d'un clou donné de gauche à droite, ou passer la corde autour d'un clou donné de droite à gauche. Tout entortillement de la corde autour d'un nombre quelconque de clous peut être exprimé comme une suite de ces opérations.

On peut donc adopter une notation du style $a^+b^+a^-b^-$, ou $aba^{-1}b^{-1}$, ou encore $a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}$. Evidemment, la peinture tombe si elle n'est accrochée à aucun clou (ce qui correspond dans les trois cas à la notation vide, qu'on notera 1 pour des raisons qui s'éclairciront par la suite), et il ne sert à rien de passer la corde autour d'un clou de gauche à droite puis immédiatement de droite à gauche (les mouvements a^+a^- ou aa^{-1} « s'annulent »). Nous avons en fait créé un *groupe*.

Qu'est-ce qu'un groupe ? Il s'agit d'un ensemble, muni d'une opération qui respecte certaines propriétés, ce qui donne une certaine « cohérence » à cet ensemble. Plus formellement,

Définition 1.
Soit G un ensemble et $\star$ une opération : $\star : G \times G \to G$ (en d'autres termes, $\star$ prend en arguments deux éléments de G et renvoie un élément de G , pensez par exemple à $+$ ou à $\cdot$). On dit alors que $(G, \star)$ est un groupe si les trois conditions suivantes sont réunies :

— Associativité : pour tous $a, b, c \in G$, $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$ (C'est cette propriété qui justifie des notations comme $1 + 2 + 3$ ou même $\sum_{i=1}^{n} i$)

— Existence d'un élément neutre : il existe $e \in G$ tel que pour tout $x \in G, e \star x = x = x \star e$ (on a besoin des deux conditions, car rien ne dit a priori que $e \star x = x \star e$)

— Existence d'un inverse : pour tout $x \in G$, il existe $y \in G$ tel que $x \star y = e = y \star x$. y est appelé un inverse de x, et la même remarque que ci-dessus s'applique.

De la définition ci-dessus, on peut déduire deux propriétés :

Proposition 2.
L'élément neutre est unique.

Démonstration. Si e et f sont deux éléments neutres, $e \star f = e$ puisque f est neutre, et de même $e \star f = f$ puisque e est neutre, donc $e = f$. □

Proposition 3.
L'inverse d'un élément est unique.

Démonstration. On évalue l'expression $y_2 \star x \star y_1$ de deux manières, où y_1 et y_2 vérifient tous deux la définition de l'inverse. □

Puisqu'on a l'unicité, on donne des noms à ces éléments : le neutre sera généralement appelé 1 (mais parfois aussi 0, I, ou encore id), et l'inverse de x sera généralement appelé x^{-1}.

L'intérêt d'une telle définition est qu'elle est très générale. De nombreux ensembles communs présentent cette structure. De plus, la nature des éléments de l'ensemble n'importe pas dans la définition, tant que ces éléments sont les arguments d'une opération. Voyons quelques exemples :

— $(\mathbb{Z}, +)$ est un groupe. Comme dit plus haut, l'associativité de l'addition fait que des notations comme 1+2+3 ont du sens. L'élément neutre est ici 0, et l'inverse de x est $-x$ (on a bien $x + (-x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$)

— $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ est également un groupe, le neutre est 1.

— $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe dont le neutre est 0.

— Etant donné un polygone à n côtés, l'ensemble des isométries (symétries et rotations) qui laisse inchangé l'ensemble de ses sommets forme un groupe lorsque il est muni de la composition comme opération. Le neutre de ce groupe est l'identité. On peut remarquer que l'inverse de n'importe quelle symétrie est elle-même. C'est également le premier groupe non-commutatif parmi ces exemples : l'ordre dans lequel on compose les transformations est important, comme on peut s'en convaincre.

— L'ensemble des bijections d'un ensemble dans lui-même est un groupe quand il est muni de la composition. L'inverse d'une fonction est alors sa réciproque, le neutre est à nouveau la fonction identité.

— L'ensemble des homothéties de centre donné et de rapport non nul est un groupe (c'est un cas particulier du précedent).

D'autre part, on peut citer des contre-exemples :

— $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, +)$ n'est pas un groupe car l'opération n'est pas interne : la somme de deux réels non nuls n'est pas toujours un réel on nul.

— $(\mathbb{Z}, -)$ n'est pas un groupe car la soustraction n'est pas associative.

— $(\mathbb{N}, +)$ n'est pas un groupe car l'opposé d'un nombre naturel n'est pas toujours un nombre naturel.

— L'ensemble des fonctions d'un ensemble dans lui-même n'est pas un groupe car toutes les fonctions n'ont pas de réciproque.

Considérons maintenant $2n$ symboles $a_1, \cdots, a_n, a_1^{-1}, \cdots, a_n^{-1}$, et considérons l'ensemble des suites finies de symboles, qu'on appelle *mots*, qui ne contiennent pas les symboles a_i et a_i^{-1} côte à côte, on dit qu'elles sont *réduites*. On munit cet ensemble de l'opération de concaténation et réduction, i.e. partant de deux mots, on met bout à bout les deux suites de symboles et on retire successivement toute paire de symboles inverses l'un de l'autre.

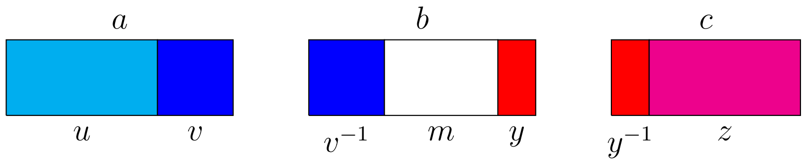
Proposition 4.
L'ensemble ci-dessus muni de l'opération décrite forme un groupe, appelé groupe libre à n générateurs.

Démonstration.

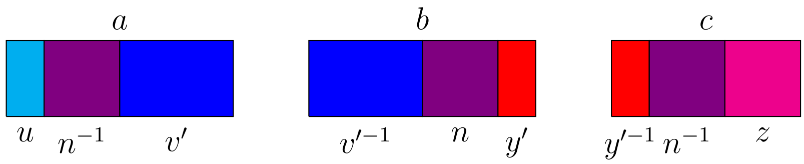
— Le neutre est le mot de longueur 0, qui ne contient aucun symbole.

— L'inverse d'un mot est le mot obtenu en lisant le mot de départ de droite à gauche et en inversant chaque lettre. Par exemple, l'inverse de $a_1a_2a_3^{-1}a_4$ est $a_4^{-1}a_3a_2^{-1}a_1^{-1}$.

— Pour l'associativité, considérons trois mots réduits a, b, c. Remarquons que la concaténation sans réduction est clairement associative. On note ab la concaténation sans réduction de a et b. On peut réécrire $a = uv$ et $b = v^{-1}w$ pour trois mots u, v, w tels que le mot uw soit réduit, en prenant pour v l'ensemble des lettres de a qui se réduisent avec une lettre de b. De même, on peut écrire $b = xy$ et $c = y^{-1}z$ avec le mot xz réduit. Deux cas se présentent alors :
Cas 1 : les mots v^{-1} et y n'ont pas de lettre commune. On peut alors réécrire $b = v^{-1}my$, avec $x = v^{-1}m$ et $w = my$.



Dans ce cas, on a $(ab)c = (umy)(y^{-1}z) = umz$ et $a(bc) = (uv)(v^{-1}mz) = umz$, comme voulu.
Cas 2 : les mots v^{-1} et y ont une intersection n. On a alors $v^{-1} = v'^{-1}n$, donc $v = n^{-1}v'$. De même, $y = ny'$, donc $y^{-1} = y'^{-1}n^{-1}$. Au final, on $b = v'^{-1}ny'$.



Dans ce cas, on a $(ab)c = (uy')(y'^{-1}n^{-1}z) = un^{-1}z$ et $a(bc) = (un^{-1}v')(v'^{-1}z) = un^{-1}z$, comme voulu.

Ceci termine la preuve. □

Bien entendu, l'intérêt du groupe libre est que notre problème se résume maintenant en termes purement algébriques et peut dès lors être résolu sans devoir acheter une quantité indéfinie de corde. On numérote chaque clou, on associe à « passer la corde au clou i de gauche à droite » le symbole a_i et son inverse au passage correspondant de droite à gauche. La peinture tombe si elle n'est attachée à aucun clou, donc si le mot réduit correspondnat à notre configuration est le neutre 1. L'acte de retirer le clou i se transcrit par « supprimer toutes les occurences de a_i ou a_i^{-1}, puis réduire si nécessaire », ce après quoi la peinture peut tomber si on réduit jusqu'à 1.

– Solution des exercices –

Solution de l'exercice 1
Une solution est $a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}$ comme on le vérifie. Cette expression s'appelle le *commutateur* de a_1 et a_2 et est notée $[a_1, a_2]$. La raison de ce nom est que a_1 et a_2 commutent (ie $a_1 \star a_2 = a_2 \star a_1$) si et seulement si $[a_1, a_2] = 1$.

Solution de l'exercice 2
Une solution est $a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}a_3a_2a_1a_2^{-1}a_1^{-1}a_3^{-1} = [[a_1, a_2], a_3]$. Une solution par récurrence se dessine.

Solution de l'exercice 3
Une mesure intéressante d'optimalité est le nombre de lettres nécessaires pour écrire le mot associé à la solution. Comme solution, on pourrait choisir

$$[[[a_1,a_2],a_3],a_4] = a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}a_3a_2a_1a_2^{-1}a_1^{-1}a_3^{-1}a_4a_3a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}a_2a_1a_2^{-1}a_1^{-1}a_4^{-1}$$

qui contient 22 symboles, mais meilleur est

$$[[a_1,a_2],[a_3,a_4]] = a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}a_3a_4a_3^{-1}a_4^{-1}a_2a_1a_2^{-1}a_1^{-1}a_4a_3a_4^{-1}a_3^{-1}$$

qui n'en contient que 16.

Solution de l'exercice 4
On montre par récurrence que $[\cdots[a_1,a_2]\cdots,a_n]$ est une solution. Notre mot est donc

$$[\cdots[a_1,a_2],\cdots,a_{n-1}]a_n([\cdots[a_1,a_2],\cdots,a_{n-1}])^{-1}a_n^{-1}.$$

Si le clou n est retiré, la séquence de mots devient un commutateur suivi de son inverse, qui se réduit en 1. Si un autre clou est retiré, les deux commutateurs se réduisent en 1 ainsi que la solution en entier, ce qu'on voulait.
Notons x_n le nombre de mouvements nécessaires. On a $x_2 = 4$ et $x_n = 2x_{n-1} + 2$ si $n \geqslant 3$. On a donc $x_3 = 10, x_4 = 22, x_5 = 46$. On montre alors par récurrence que $x_n = 3.2^{n-1} - 2$. On a donc une croissance exponentielle, ce qui n'est pas le meilleur.
Plutôt que de séparer le dernier clou, il est mieux de « séparer au milieu ». On ne traite ici que le cas où n est une puissance de 2 : $n = 2^k$. On a alors comme mot $[S, S']$ où S est une solution pour les 2^{k-1} premiers clous et S' une solution pour les 2^{k-1} derniers clous. On a alors $x_{2^k} = 4x_{2^{k-1}}$ et $x_2 = 4$, on en déduit $x_{2^k} = 2^{2k}$. C'est une croissance quadratique, ce qui est bien meilleur qu'une exponentielle.

Solution de l'exercice 5
$a_1a_2a_3a_1^{-1}a_2^{-1}a_3^{-1}$ convient.

Solution de l'exercice 6
La solution ci-dessus se généralise : $a_1\cdots a_na_1^{-1}\cdots a_n^{-1}$. Si $n-2$ clous sont retirés, on se retrouve avec le commutateur des deux autres, qui ne vaut pas 1. Si $n-1$ clous sont retirés, l'expression se simplifie.

Solution de l'exercice 7
Une solution est par exemple

$$\Big[\big[[a_1a_2,a_3a_4],[a_1a_3,a_2a_4]\big],\big[a_1a_4,a_2a_3\big]\Big].$$

Il est clair que si l'on retire deux clous, la peinture tombe car les commutateurs vont s'annuler successivement. Pour montrer que retirer un clou laisse la peinture en place, on peut remarquer qu'au sein d'un même commutateur, deux occurences d'une lettre associée au même clou sont séparées par au moins deux autres lettres, et ne peuvent donc se simplifier lorsqu'un seul clou est retiré. Il faut ensuite s'assurer que cette condition est encore vérifiée à la jonction entre commutateurs, ce qui peut se faire à la main.

Solution de l'exercice 8
On peut considérer les clous d'une même couleur comme étant un unique « gros clou », et

appliquer la solution de l'exercice 1 aux deux « gros clous ». Si a_1 et a_2 sont bleus et a_3, a_4 sont rouges, cela donne la solution $a_1a_2\ a_3a_4\ a_2^{-1}a_1^{-1}\ a_4^{-1}a_3^{-1}$

Solution de l'exercice 9

Soient a_1, a_2, a_3 les clous bleus et a_4, a_5, a_6 les rouges. On sait que $a_1a_2a_1^{-1}a_2^{-1}a_3a_2a_1a_2^{-1}a_1^{-1}a_3^{-1}$ convient pour remplir la condition sur les clous bleus, et de même $a_4a_5a_6a_4^{-1}a_5^{-1}a_6^{-1}$ pour les rouges. En notant A et B ces deux mots, et en respectant la règle d'inversion précedemment énoncée, $ABA^{-1}B^{-1}$ est une séquence qui convient, puisque dès qu'une des deux conditions est remplie, une des deux lettres majuscules se réduit en 1.

Solution de l'exercice 10

Soient a_1, a_2 les rouges, a_3, a_4 les bleus, a_5, a_6 les verts. Le retrait de chacune des paires $a_1a_3, \cdots ., a_4a_6$ (12 paires en tout) doit faire chuter la peinture. Il suffit donc d'appliquer la solution pour 12 clous obtenue à l'exercice 4 en remplaçant chacun des clous par un clou « virtuel » composé d'une paire de clous parmi les 12 qui nous intéressent.

Solution de l'exercice 11

Une manière de généraliser les conditions ci-dessus est d'établir une liste de sous-ensembles de clous et de définir la condition associée à la liste comme étant « la peinture tombe dès que les clous d'un des sous-ensembles de la liste sont retiés, et pas avant ». Par exemple, en notant $C_1, \cdots, C_6$ les clous, une telle liste pour l'exercice 9 est

$$\{\{C_1\}, \{C_2\}, \{C_3\}, \{C_4, C_5\}, \{C_5, C_6\}, \{C_6, C_4\}\}$$

Un problème éventuel de cette approche est que cette liste peut parfois être très longue.

Solution de l'exercice 12

Evidemment, la liste discutée ci-dessus ne doit pas contenir deux ensembles inclus l'un dans l'autre (ce doit être une *antichaîne*). On peut montrer que toutes les conditions associées à ces listes peuvent être « résolues ». On peut considérer chaque élément de la liste comme un « gros clou », comme dans l'exercice 8. Pour ce faire, on convient d'un ordre pour les vrais clous du sous-ensemble. Quand il faut passer la corde de gauche à droite du « gros clou », on la passe de gauche à droite de chacun des vrais clous dans cet ordre, pour passer de droite à gauche du « gros clou » on passe de droite à gauche de chacun des clous dans l'ordre inverse. Ainsi, deux passages autour du gros clou dans le sens contraire se réduisent bien à 1.
On peut alors appliquer la solution trouvée à l'exercice 4 pour le bon nombre de gros clous. En effet, dès que tous les clous d'un sous-ensemble ont été retirés, c'est comme si le « gros clou » lui-même avait été enlevé, la peinture tombe donc.
Notez que cette construction ne garantit pas que la peinture ne tombera pas accidentellement avant que la condition soit remplie.

Pour une autre approche au problème, ainsi qu'une solution à l'exercice 13, je renvoie à l'article (en anglais) qui a été ma source pour ce cours : *Picture-hanging puzzles*, E.Demaine et al., https://arxiv.org/abs/1203.3602

2 Nombres complexes (Timothée Rocquet)

Le cours était principalement inspiré de http://pascal.delahaye1.free.fr/cpge/mathmpsi/cours/cours02.pdf

On trouvera des exemples d'application à http://web.evanchen.cc/handouts/cmplx/en-cmplx.pdf

V. Groupe C

Contenu de cette partie

1 Première partie : Arithmétique et combinatoire

1 Modulo, ordre (Henry Bambury)

Ce cours a repris le cours de Thomas Budzinski lors du stage d'été 2014, que l'on peut retrouver page 296 du polycopié de ce stage, disponible à l'adresse suivante : http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/stage_ete_2014.pdf

2 Dénombrement (Lucie Wang, Henry Bambury)

– Pot-pourri –

Exercice 1
On dispose d'une grille de taille 1xn, dont on souhaite colorier les cases en noir ou blanc. Soit a_n le nombre de coloriages possibles tels qu'il n'y ait jamais deux cases voisines noircies.

1. Déterminer a_n.
2. Montrer que, pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$: $a_{n+p+1} = a_n a_p + a_{n-1} a_{p-1}$.

Exercice 2
Une araignée possède 8 chaussettes identiques et 8 chaussures identiques. De combien d'ordres différents peut-elle se chausser, sachant que sur chaque patte, la chaussette doit être mise avant la chaussure ?

Exercice 3

1. Combien existe-t-il de k-uplets $(x_1, \ldots, x_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$ tels que : $x_1 + \cdots + x_k = n$?
2. Même question mais dans $\mathbb{N}^k$.

Exercice 4
Combien existe-t-il de carrés dans une grille de taille mxn ? Simplifier le résultat dans le cas nxn.

Exercice 5
Les n stagiaires présents à Valbonne vont se baigner et laissent leur T-shirts Animath en vrac. En revenant, ils prennent un T-shirt complètement au hasard. Quelle est la probabilité que personne ne se retrouve avec son T-shirt ?

– Identités combinatoires –

Exercice 6
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\sum\limits_{0 \leqslant 2k \leqslant n} \binom{n}{2k} = \sum\limits_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} \binom{n}{2k+1}$.

On cherche à établir les identités suivantes non pas par le calcul, mais par des arguments de dénombrement, en interprétant les égalités dans des situations combinatoires.

Exercice 7
Montrer que si $0 \leqslant k \leqslant n$, alors : $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

Exercice 8
Montrer que si $0 \leqslant p \leqslant n$, alors : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{k}{p} = 2^{n-p}\binom{n}{p}$.

Exercice 9
(identité de Vandermonde)**.** Montrer que si $0 \leqslant k \leqslant m+n$, alors : $\sum_{p=0}^{k} \binom{m}{p}\binom{n}{k-p} = \binom{m+n}{k}$.

Exercice 10
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

– Double comptage –

Formellement, le principe de double comptage consiste à dénombrer un ensemble de couples (ou de n-uplets) tantôt en partitionnant selon le premier terme, tantôt selon le second, et à égaliser les deux cardinaux ainsi obtenues.
En pratique, une méthode visuelle est d'entrer les données dans un tableau, et d'identifier une quantité à compter suivant les lignes ou suivant les colonnes.

Exercice 11
Dans une école, chaque club compte 3 membres et chaque élève est membre de 3 clubs. Montrer qu'il y a autant de clubs que d'élèves.

Exercice 12
Dans une assemblée de n personnes, montrer qu'il y a un nombre pair de personnes ayant serré la main d'un nombre impair de personnes.

Exercice 13
Une permutation de $\{1, \ldots, n\}$ est tirée au hasard. Combien a-t-elle de points fixes en moyenne ?

Exercice 14
Soient $B_1, \ldots, B_n$ des boîtes contenant respectivement $a_1, \ldots, a_n$ boules. On suppose $a_1 \geqslant \cdots \geqslant a_n$, et on note b_k le nombre de boîtes contenant au moins k boules. Montrer que :

1. $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + b_2 + \ldots$
2. ${a_1}^2 + \cdots + {a_n}^2 = b_1 + 3b_2 + 5b_3 + \ldots.$

Exercice 15
Dans une école, il y a m professeurs et n élèves. On suppose que chaque professeur a exactement k élèves, et que deux élèves ont toujours exactement l professeurs en commun. Déterminer une relation entre m, n, k, l.

Exercice 16
200 candidats participent à un concours mathématique, ils ont 6 problèmes à résoudre. On suppose que chaque problème a été résolu par au moins 120 participants. Montrer qu'il existe deux candidats tels que chaque problème ait été résolu par au moins l'un des deux.

– Solution des exercices –

Les exercices 5, 7 et 8 sont repris du cours de dénombrement d'Igor Kortchemski, auquel on se réfèrera pour les solutions. Les exercices 1, 3 et 10 proviennent du cours de Joon Kwon, à la page 428 du polycopié de Montpellier 2014. Les exercices 2, 6 et 9 viennent quant à eux du cours d'Antoine Martin à Valbonne 2017, à la page 64 du polycopié associé. On donne ici la solution des exercices restants :

Solution de l'exercice 4
Supposons $m \leqslant n$ par symétrie, on procède en comptant les carrés selon leur taille. Les carrés 1x1 sont au nombre de mn (on peut les identifier à leur coin supérieur gauche, par exemple), les carrés 2x2 au nombre de $(m-1)(n-1)$, ..., ainsi de suite jusqu'aux carrés de taille mxm. Au total, on compte : $\sum\limits_{k=0}^{m-1}(m-k)(n-k)$ carrés.

Solution de l'exercice 11
Considérons un tableau avec une colonne par élève, une ligne par club et dans lequel un 1 serait présent à chaque intersection entre un club et un élève membre de ce club. Comptons le nombre de 1 dans le tableau :

— chaque ligne en compte 3,

— chaque colonne en compte 3,

ainsi il y a autant de lignes que de colonnes, soit autant de clubs que d'élèves.

Solution de l'exercice 12
Soit un tableau nxn, où l'on place un 1 en position (i, j) si et seulement si i a serré la main de j. Comme la relation est symétrique et que personne ne s'est serré la main à soi-même, on peut apparier les 1 deux par deux : celui en (i, j) et celui en (j, i). Le nombre de 1 est pair, il y a donc un nombre pair de lignes avec un nombre impair de 1. Finalement, un nombre pair de personnes a serré un nombre impair de mains.

Solution de l'exercice 13
Considérons un tableau nx$n!$, où les lignes correspondent aux éléments de $\{1, \ldots, n\}$ et les colonnes aux permutations. Notons 1 en position (i, s) si l'élément i est un point fixe de la permutation s. Le nombre de 1 se compte :

— selon les lignes : chaque élément i est point fixe de $(n-1)!$ permutations,

— selon les colonnes : il s'agit du nombre total de points fixes de toutes les permutations.

Ainsi, une permutation de $\{1,\ldots,n\}$ a en moyenne : $\frac{n*(n-1)!}{n!}=1$ point fixe.

Solution de l'exercice 14
Adoptons la visualisation suivante :

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & & & & \\
\vdots & 1 & & & \\
\vdots & \vdots & \cdots & 1 & \\
1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\
 & & & & \\
B_1 & B_2 & \cdots & B_{n-1} & B_n
\end{array}$$

1. D'une part, le nombre de 1 en colonne k est a_k. D'autre part, il y a b_k 1 sur la k-ième ligne en partant du bas. D'où : $a_1+\cdots+a_n=b_1+b_2+\ldots$.
2. Étant donné les nouvelles expressions, remplaçons les 1 par d'autres pondérations : 1 à la première ligne, 3 à la deuxième, 5 à la troisième, ... Alors : $b_1+3b_2+5b_3+\cdots=\sum_{k=1}^{n}(1+3+\cdots+2a_k-1)=\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2$.

Solution de l'exercice 15
On considère un tableau mxn, avec une ligne par professeur et une colonne par élève, un 1 à chaque intersection entre un professeur et un élève de sa classe. Par hypothèse :

— chaque ligne compte k 1,

— deux colonnes différentes ont exactement l 1 alignés à l'horizontale.

En comptant le nombre total de paires de 1 alignés à l'horizontale, il vient : $m\frac{k(k-1)}{2}=\frac{n(n-1)}{2}l$.

Solution de l'exercice 16
Construisons un tableau 200x6, une ligne par candidat et une colonne par problème, et 1 ou 0 à chaque intersection, selon que le problème ait été résolu ou non par le candidat. Supposons par l'absurde que pour toute paire de candidats, il existe un problème ayant résolu ni par l'un ni par l'autre. Alors :

— sur chaque colonne, le nombre de 1 est au moins 120,

— deux lignes différentes ont au moins une paire de 0 alignés à la verticale.

Comptons le nombre de paires de 0 alignés à la verticale : $\frac{200\cdot199}{2}\leqslant 6\cdot\frac{80\cdot79}{2}$, ce qui est faux. L'hypothèse absurde est réfutée.

3 Invariants, monovariants (Vincent Jugé)

Quelques notions de cours

Un *invariant* est, comme son nom l'indique, une quantité qui ne change pas lorsque l'on exécute un certain nombre d'opérations. Un *monovariant* est une quantité qui varie de façon monotone (croissante ou décroissante), éventuellement strictement.

L'utilisation de tels concepts est bien sûr naturelle dès lors que l'on étudie un système dynamique. Un tel système peut nous être donné dans l'énoncé, par exemple si l'on étudie un graphe ou un entier que l'on modifie peu à peu, mais on peut également être amené à l'introduire par soi-même, par exemple dans le cadre d'un problème de pavage ou de découpage, ou bien si l'on souhaite effectuer une démonstration par récurrence.

En pratique, les invariants et monovariants seront rarement un objet d'étude en soi : ce sont davantage des outils intermédiaires que l'on doit mettre en place lorsque l'on étudie un problème. Par ailleurs, comme souvent en mathématiques et en combinatoire en particulier, on sera toujours amené à étudier des transformations que l'on souhaitera aussi **simples** que possible pour en extraire des invariants intéressants. En effet, de manière générale, dès lors que l'on étudie une transformation compliquée, (a) on n'y comprend rien, et (b) elle ne conserve pas grand chose.

Par ailleurs, un écueil bien connu, et qui a fait d'exercices difficiles des exercices en fait redoutables, est que, dans le cas d'une question ouverte, la réponse n'est pas nécessairement celle à laquelle on s'attendait. En particulier, maints élèves ont cherché tel ou tel invariant permettant de répondre de manière affirmative à une question d'olympiades, alors que la réponse était en fait négative…

Exercices

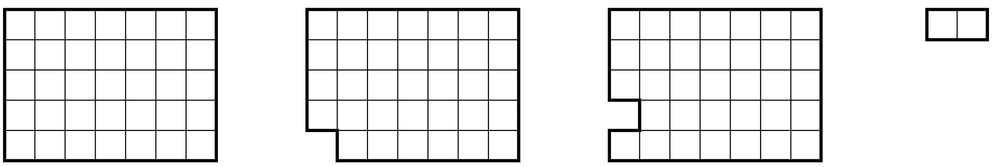
Exercice 1

Trois fourmis se déplacent sur le plan cartésien de la manière suivante. Chaque minute, deux des fourmis vont rester immobiles, et la troisième fourmi se déplacera sur une droite parallèle à la droite formée par ses deux comparses ; elle peut bien sûr rester immobile elle aussi si cela lui chante. Originellement, les trois fourmis se situent en trois points de coordonnées $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$. Est-il possible que, au bout d'un certain temps, nos trois fourmis se retrouvent en les points de coordonnées $(-1,0)$, $(0,1)$ et $(1,0)$?

Exercice 2

Peut-on paver les plateaux tronqués suivants à l'aide de dominos 2×1 que l'on peut placer verticalement ou horizontalement ?

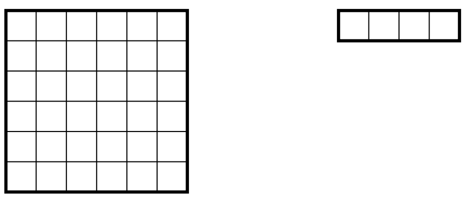
Plateau n°1 : Plateau n°2 : Plateau n°3 : Domino :



Exercice 3

Peut-on paver le plateau suivant à l'aide de tétraminos 4×1 que l'on peut placer verticalement ou horizontalement ?

Plateau : Tétramino :



Exercice 4
On souhaite paver un plateau de dimensions $a \times b$ à l'aide de petits rectangles de dimensions $1 \times t$, où t est un réel strictement positif qui peut dépendre du petit rectangle. Démontrer que cela est faisable si et seulement si l'une des deux dimensions a et b est en fait un entier.

Exercice 5
On a tracé quatre droites dans le plan, deux à deux non parallèles, et l'on constate que, depuis la nuit des temps, on trouve sur chaque droite une fourmi qui avance à vitesse constante (pas forcément la même vitesse pour deux fourmis différentes). Une éternité ayant passé, on remarque que, parmi les six paires possibles de fourmis, cinq se sont croisées. Démontrer que la sixième paire de fourmis s'est également croisée.

Exercice 6
Sur une île se trouvent 2020 caméléons. Parmi eux, on comptait jadis 800 caméléons bleus, 1000 caméléons blancs, et 1220 caméléons rouges. Puis, lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils changent tous les deux de couleur, et prennent la troisième couleur. Un jour, un Félix le pirate arriva sur l'île, et découvrit que tous les caméléons étaient de la même couleur. Quelle était cette couleur ?

Exercice 7
Eva la magicienne dispose d'un jeu de 100 cartes, numérotées de 1 à 100 ; chaque carte arbore le même numéro sur ses deux faces. Initialement, elle a mélangé ses cartes de manière arbitraire et les a empilées. Puis elle effectue les opérations suivantes : si la carte de numéro k se trouve en haut de la pile, alors elle prend les k premières cartes de la pile et les retourne, la $k^{\text{ème}}$ carte passant ainsi en première position, et ainsi de suite. Enfin, si la carte de numéro 1 se retrouve en haut de la pile, Eva s'arrête. Toute suite de telles opérations est-elle nécessairement finie ?

Exercice 8
Aline a écrit le mot `MATHEMATIQUES` au tableau. Puis elle s'autorise les opérations suivantes : elle choisit une lettre du mot écrit au tableau (disons λ) et la remplace par une suite finie de lettres qui sont strictement plus grandes que λ pour l'ordre alphabétique (la suite peut même être vide ou, au contraire, être très longue, auquel cas Aline va sans doute devoir écrire très petit). Toute suite de telles opérations est-elle nécessairement finie ?

Exercice 9
La banque de Bath a émis des pièces dont une face arbore la lettre H et l'autre face arbore la lettre T. Morgane a aligné n de ces pièces de gauche à droite. Elle réalise alors plusieurs fois de suite l'opération suivante : si la lettre H est visible sur exactement k pièces, avec $k \geqslant 1$, alors Morgane retourne la $k^{\text{ème}}$ pièce en partant de la gauche ; si $k = 0$, elle s'arrête. Par exemple, si $n = 3$, le processus partant de la configuration THT sera $THT \to HHT \to HTT \to TTT$: Morgane s'arrête donc au bout de 3 opérations.

(a) Démontrer que, quelle que soit la configuration initiale, Morgane doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'opérations.

(b) Pour chaque configuration initiale C, on note $L(C)$ le nombre d'opérations que va réaliser Morgane avant de s'arrêter. Par exemple, $L(THT) = 3$ et $L(TTT) = 0$. Trouver la valeur moyenne des nombres $L(C)$ obtenus lorsque C parcourt l'ensemble des 2^n configurations initiales possibles.

Exercice 10
Lors de l'Olympiade Internationale de Mathématiques, on comptait 2019 participants. Parmi eux, 1009 avaient 1010 amis et 1010 avaient 1009 amis, la relation d'amitié étant réciproque. Le machiavélique Théodore, passé maître dans l'art de faire et défaire les amitiés, décide alors de faire survenir des événements comme celui-ci :

> il choisit trois participants A, B et C, tels que A soit ami avec B et C, mais que B ne soit pas amis avec C ; puis B et C deviennent amis, mais mettent fin à leur relation d'amitié avec A ; les autres relations d'amitié ne changent pas durant cet événement.

Démontrer que, quelles que, au vu des relations d'amitié initiales, Théodore pourra nécessairement se débrouiller pour que, à la fin de l'olympiade, chaque participant ait au plus un ami.

Exercice 11
Raphaël a inscrit, sur chaque sommet d'un pentagone, un entier, de sorte que la somme de ces cinq entiers soit strictement positive. Puis il s'autorise des opérations de la forme suivante : il choisit trois sommets consécutifs sur lesquels se trouvent des entiers x, y et z, tels que $y < 0$, et les remplace respectivement par $x + y$, $-y$ et $y + z$. Toute suite de telles opérations est-elle nécessairement finie ? Et si Raphaël reprend ce processus sur un 2019-gone au lieu d'un pentagone ?

Exercice 12
Lucie a disposé sept boîtes sur une table : elle les note $B_1, \ldots, B_7$. Elle place alors un jeton dans chacune d'elles, puis s'autorise des opérations des deux types suivants : (1) choisir un entier $k \leqslant 6$ tel que la boîte B_{k+1} ne soit pas vide, retirer un jeton de la boîte B_{k+1}, et ajouter deux jetons dans la boîte B_k ; (2) choisir un entier $k \leqslant 5$ tel que la boîte B_{k+2} ne soit pas vide, retirer un jeton de la boîte B_{k+2}, et échanger les contenus des boîtes B_k et B_{k+1}. Est-il possible que, au bout d'un nombre fini d'opérations, Lucie se retrouve avec exactement $2019^{2019^{2019^{\cdots}}}$ jetons dans la boîte B_1 et aucun ailleurs, où le nombre 2019 apparaît 13 fois dans la dernière expression ?

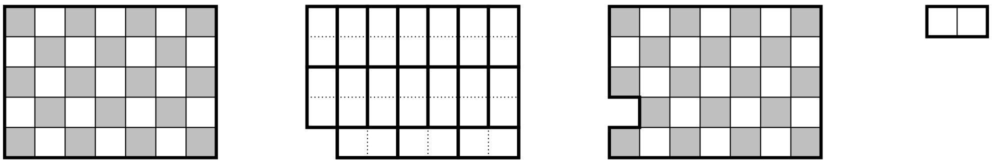
Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
Lorsqu'une des fourmis se déplace, l'aire du triangle qu'elle forme avec ses comparses ne change pas : il s'agit là d'un invariant du problème ! Or, le triangle originel est d'aire $1/2$, tandis que le triangle de sommets $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$ est d'aire 1. Nos trois fourmis ne pourront jamais se retrouver simultanément en ces trois points-là.

Solution de l'exercice 2
On peut paver le plateau n°2, comme illustré ci-dessous. En revanche, le plateau n°1 est d'aire $5 \times 7 = 35$, alors que chaque domino est d'aire $1 \times 2 = 2$: il nous faudrait donc $35/2$ dominos pour le paver, ce qui est bien sûr impossible. Enfin, cet argument ne fonctionne pas pour le plateau n°3, mais une idée est alors de colorier les cases de ce plateau en blanc et noir, comme illustré ci-dessous. En effet, le plateau comptera alors 18 cases noires et 16 cases blanches, alors même que chaque domino devrait alors recouvrir une case blanche et une case noire :

paver ce plateau avec des dominos est donc également impossible (notons que le même argument fonctionne bien sûr avec le plateau n°1, mais qu'il a le désavantage d'être nettement moins simple).

Plateau n° 1 : Plateau n° 2 : Plateau n° 3 : Domino :

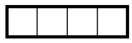


Solution de l'exercice 3
Là encore, un argument d'aire n'est pas suffisant, mais à force d'échouer à paver le plateau avec notre tétramino, on finit par se dire que c'est impossible. Prouver que cette intuition est correcte pourrait par exemple requérir un argument de coloriage, et c'est ainsi qu'on aboutit à la construction suivante. On va numéroter chaque case avec un élément de $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, l'élément en ligne i et colonne j recevant le numéro $i + j \pmod 4$, comme illustré ci-dessous (la ligne 0 est la ligne du bas et la colonne 0 est la colonne de gauche). Chaque tétramino devrait recouvrir une case de chacun des quatre numéros possibles, mais on compte plus de 1 que de 3 : le pavage désiré est donc bien impossible.

Plateau :

1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1

Tétramino :



Solution de l'exercice 4
Puisqu'il s'agit là d'une généralisation de l'exercice précédent, on va tout de suite chercher un invariant qui généralise lui aussi l'invariant précédent. Cependant, cette fois-ci, la longueur qui est prescrite est une longueur unité (alors que l'on a aucun contrôle sur la largeur de nos petits rectangles), donc on ne va pas pouvoir se contenter de tronçonner notre plateau en un nombre fini de lignes et de colonnes. Qu'à cela ne tienne ! Une généralisation usuelle de découpages de plus en plus fins consiste à utiliser une intégrale.

On munit donc notre plateau d'un repère puis on associe à tout point de coordonnées (x, y) une quantité, que l'on notera $F(x, y)$. Dans l'esprit des solutions précédentes, un tel point correspondrait à la case en ligne y et colonne x, où les ligne et colonne sont infinitésimales. Précédemment, on avait une quantité invariante quand on la sommait le long de la dimension **longue** (c'est-à-dire de longueur 2 ou 4) de tout domino ou tétramino : il s'agissait, par exemple, du nombre de cases blanches moins le nombre de cases noires. Dans notre cas, la seule dimension sur laquelle on exerce un contrôle est la dimension de longueur 1, et on souhaite donc que, si on somme les nombres $F(x, y)$

— à x fixé, et lorsque y parcourt un intervalle de longueur ℓ, ou bien

— à y fixé, et lorsque x parcourt un intervalle de longueur ℓ, alors on obtienne une somme nulle si et seulement si ℓ est un entier. De telles sommes, incluant une infinité de nombres, n'ont pas nécessairement de sens a priori, et c'est pourquoi on utilise en fait des intégrales.

Dans un premier temps, on s'intéresse donc au cas où l'on a fixé $y = 0$, et où l'on fait en sorte que chaque intégrale $\int_a^{a+\ell} F(x,0)\,\mathrm{d}x$ soit égale à 0, quelle que soit la valeur du réel a et de l'entier ℓ. On remarque déjà qu'il suffit que ces intégrales soient nulles quand $\ell = 1$, puisque tout intervalle de longueur $\ell \geqslant 2$ peut être tronçonné en ℓ intervalles de longueur 1, sur laquelle notre intégrale vaudra déjà 0.

Une idée qui pourrait ensuite nous simplifier la vie serait que, pour tout a, le ratio $F(x+a,0)/F(x,0)$ ne dépende pas de x. En effet, en notant $r(a)$ ce ratio, on aurait alors

$$\int_a^{a+1} F(x,0)\,\mathrm{d}x = r(a) \int_0^1 F(x,0)\,\mathrm{d}x,$$

et il nous suffira de s'assurer que l'intégrale $\int_0^1 F(x,0)\,\mathrm{d}x$ est nulle.

Mais alors on a évidemment la relation $r(a)r(b) = r(a+b)$, ce qui signifie que la fonction $R : x \mapsto \ln(r(x))$, sous réserve qu'elle ait un sens, sera solution de l'équation $R(a) + R(b) = R(a+b)$. On reconnaît là l'équation de Cauchy, dont les plus simples solutions connues sont linéaires. Il serait donc agréable qu'il existe un nombre, disons λ, tel que $R(x) = \lambda x$ pour tout x, et alors on aura $r(x) = \exp(\lambda x)$ et $F(x,0) = \exp(\lambda x) F(0,0)$. Mais alors

$$\int_0^\ell F(x,0)\,\mathrm{d}x = F(0,0) \int_0^\ell \exp(\lambda x)\,\mathrm{d}x = F(0,0) \times (\exp(\ell\,\lambda) - 1)/\lambda.$$

On souhaite donc que $\exp(\ell\,\lambda)$ soit égal à 1 si et seulement si ℓ est un entier : cette propriété sera vraie si et seulement si $\lambda = \pm 2\imath\pi$. On en vient donc à poser

$$f(x) = \mathrm{e}^{2\imath\pi x}.$$

En adaptant le raisonnement précédent à y fixé (pas nécessairement à 0), puis en faisant jouer à x et y des rôles symétriques, on constate qu'il serait agréable d'avoir

$$F(x,y) = f(x)F(0,y) = f(y)F(x,0) = f(x)f(y)F(0,0)$$

pour tous les réels x et y : c'est donc le choix que l'on fait, en posant en outre $F(0,0) = 1$.

Mais alors, si P est un pavé de la forme $[u_1, u_2] \times [v_1, v_2]$, on a bien

$$\begin{aligned}\iint_P f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_{u_1}^{u_2} \left(\int_{v_1}^{v_2} f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = \int_{u_1}^{u_2} f(y) \left(\int_{v_1}^{v_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y \\ &= \left(\int_{u_1}^{u_2} f(y)\,\mathrm{d}y \right) \left(\int_{v_1}^{v_2} f(x)\,\mathrm{d}x \right) = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{2\imath\pi} \, \frac{f(u_2) - f(u_1)}{2\imath\pi}.\end{aligned}$$

En particulier, on constate que $\iint_P f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$ si et seulement si $f(u_1) = f(u_2)$ ou $f(v_1) = f(v_2)$, c'est-à-dire si et seulement si l'une des dimensions du pavé P est un entier.

Mais alors tout petit rectangle de dimensions $1 \times t$ recouvre un pavé P tel que $\iint_P f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$. Par conséquent, si l'on a pu découper notre plateau $\mathcal{P} = [0,a] \times [0,b]$ en petits rectangles, c'est en fait que $0 = \iint_{\mathcal{P}} f(x)\,f(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0$ également, donc qu'au moins une des deux dimensions a et b est un entier.

Solution de l'exercice 5
Il existe mille manières de résoudre cet exercice, et l'on pourrait, par exemple, aligner les calculs de géométrie analytique. Cependant, il existe également une solution basée sur l'existence d'un invariant mignon.

Munissons notre plan d'un repère cartésien, et choisissons également une origine des temps. On numérote alors nos fourmis de 1 à 4, et on note d_k la droite sur laquelle se déplace la fourmi k. Puis, si cette fourmi se retrouve au point de coordonnées (x, y) à l'instant t, on lui associe, dans un repère en 3 dimensions, le point de coordonnées (x, y, t). Ce faisant, lorsque notre fourmi décrit la droite d_k, et puisqu'elle se déplace à vitesse constante, l'ensemble des points que l'on a dessinés forme également une droite, que l'on note Δ_k.

Supposons maintenant que la paire $(3, 4)$ soit la seule paire de fourmis dont on n'est pas sûr qu'elles se sont rencontrées. Alors les droites Δ_1 et Δ_2 ont un point commun, ce qui signifie qu'elles appartiennent à un même plan $\mathcal{P}$. Puis les droites Δ_3 et Δ_4 ont chacune un point commun avec Δ_1 et avec Δ_2, donc elles appartiennent aussi au plan $\mathcal{P}$. Or, puisque d_3 et d_4 ne sont pas parallèles, les droites Δ_3 et Δ_4 ne sont pas parallèles non plus. Elles sont donc sécantes, ce qui signifie bien que les fourmis 3 et 4 se sont croisées.

Solution de l'exercice 6
Cherchons un invariant du système dynamique qui nous est présenté ici. Si l'on note a, b et c le nombre de caméléons bleus, blancs et rouges présents sur l'île, alors chaque changement de couleurs va faire varier a, b et c de -1 ou de $+2$: puisque distinguer ces deux cas serait pénible, contentons-nous pour l'instant de remarquer que les valeurs de ces trois entiers varient de $+1 \pmod 3$. Ainsi, s'il y a eu k changements de couleurs en tout, on compte en fait $k + 2 \pmod 3$ caméléons bleus, $k+1 \pmod 3$ caméléons blancs et $k+2 \pmod 3$ caméléons rouges. En particulier, quand Félix arrive, il est impossible qu'on ait 2020 caméléons bleus et aucun caméléon rouge, ou l'inverse. C'est donc qu'il y avait 2020 caméléons blancs.

Solution de l'exercice 7
On va montrer que toute suite de telles opérations est bien finie. Pour ce faire, on peut supposer que ce n'est pas le cas, et s'intéresser au numéro maximal parmi les cartes qui apparaîtront une infinité de fois en haut de la pile. En effet, s'il s'agit de la carte de numéro k, il y a un moment où cette carte se retrouve en haut de la pile, mais où plus aucune carte de numéro $\ell \geqslant k + 1$ ne se retrouvera en haut de la pile. À ce moment-là, Eva met notre carte en $k^{\text{ème}}$ position, puis elle ne la déplacera plus jamais, contredisant le fait que notre carte doit revenir en haut de la pile.

Une autre solution consiste à attribuer 2^k points à une carte de numéro k si celle-ci est en $k^{\text{ème}}$ position, puis à considérer la somme $\mathcal{S}$ de tous les points attribués aux différentes cartes. En effet, lorsque Eva effectue une opération, la somme $\mathcal{S}$ augmente strictement : elle commence éventuellement par diminuer de $2 + 4 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 2$, en raison de toutes les cartes bien placées qu'Eva aurait pu retourner, mais elle augmente ensuite de 2^k au minimum. Puisqu'il s'agit d'un entier majoré par $1 + 2 + \ldots + 2^{100}$, notre suite d'opérations est donc nécessairement finie.

Solution de l'exercice 8
Comme à l'exercice précédent, on va montrer que toute suite de telles opérations est bien finie. Pour ce faire, on peut supposer que ce n'est pas le cas, et s'intéresser à la plus petite lettre qu'Aline choisira une infinité de fois. En effet, s'il s'agit de la lettre λ, il y a un moment où Aline ne choisira plus jamais de lettre strictement plus petites que λ. S'il y a k occurrences de

la lettre λ à ce moment-là, alors Aline ne pourra choisir la lettre λ que k fois supplémentaires, ce qui est une contradiction.

Comme précédemment, on peut tenter d'interpréter notre solution en termes de monovariant. Cependant, cette fois-ci, notre monovariant ne *peut pas* être un entier, car on n'a aucun contrôle sur le nombre de lettres qu'écrit Aline à chaque étape. Notre monovariant sera donc une suite de 26 entiers $(x_1, \ldots, x_{26})$: l'entier x_k sera égal au nombre d'occurrences de la $k^{\text{ème}}$ lettre de l'alphabet dans le mot écrit au tableau. En effet, cette suite d'entiers décroît strictement, pour l'ordre lexicographique. Or, on montre facilement, par récurrence sur n, qu'une suite de n entiers naturels, si elle décroît strictement pour l'ordre lexicographique, est nécessairement finie : il s'agit d'une adaptation directe du raisonnement exposé au paragraphe précédent.

Solution de l'exercice 9

Pour répondre à la question (a), on peut procéder comme aux exercices ci-dessus, et supposer qu'il existe une configuration initiale à partir de laquelle Morgane continuera *ad vitam æternam*. Dans ces conditions, soit k le plus grand entier tel que Morgane va retourner la $k^{\text{ème}}$ pièce une infinité de fois. Il y a un moment où cette pièce montrera la lettre T, et où plus aucune pièce à droite de notre $k^{\text{ème}}$ pièce ne sera retournée. Mais alors, si Morgane retourne encore une fois cette $k^{\text{ème}}$ pièce, c'est qu'on avait k lettres H visibles, et qu'on en a maintenant $k+1$, ce qui est impossible.

Une autre manière de procéder est de chercher un monovariant qui diminuera de 1 lors de chaque opération, et vaudra 0 pour la configuration ne contenant que des T : en effet, on connaîtra ainsi la valeur de $L(C)$ pour toute configuration C.

Lors de chaque opération, deux paramètres changent manifestement : le nombre de H, qui varie de k à $k \pm 1$, et la face visible sur la $k^{\text{ème}}$ pièce. Pour construire notre monovariant, une première idée est donc d'allouer un score à chaque pièce en fonction de la face qu'elle arbore, plus un score collectif en fonction du nombre de H visibles : le score de chaque pièce devra valoir 0 si la pièce montre sa face T, et le score collectif devra valoir 0 si toutes les pièces montrent leur face T. On recherche ainsi un score cumulé de la forme

$$\mathcal{S} = f(|\Omega|) + \sum_{k \in \Omega} x_k,$$

où $k \in \Omega$ si la pièce k montre sa face H, et où les x_i sont des réels et f une fonction telle que $f(0) = 0$.

Quand le cardinal de Ω varie de k à $k-1$, c'est que la $k^{\text{ème}}$ pièce est passée de la face H à la face T ; quand il varie de k à $k+1$, la $k^{\text{ème}}$ pièce est passée de la face T à la face H. Pour que $\mathcal{S}$ diminue de 1 dans les deux cas, on souhaite donc que

$$f(k-1) - f(k) - x_k = f(k+1) - f(k) + x_k = -1$$

pour tout $k \geqslant 0$. On en déduit que $x_k = f(k-1) - f(k) + 1 = x_{k-1} + 2$ puis, quitte à poser $x_0 = 0$, que $x_k = 2k$ et $f(k) = -k^2$.

Une fois ce choix effectué, le score cumulé $\mathcal{S}$ diminue bien de 1 à chaque opération, et il est manifestement minoré par $-n^2$, donc notre suite d'opérations est finie.

Servons-nous de ce monovariant pour répondre à la question (b). Une fois les opérations effectuées, on sait que $\mathcal{S} = 0$. Ainsi, en notant $\mathcal{S}(C)$ le score cumulé d'une configuration C, on constate en fait que $L(C) = \mathcal{S}(C)$. On va donc calculer la valeur moyenne de ces scores cumulés.

Tout d'abord, le score moyen de la $k^{\text{ème}}$ pièce vaut bien sûr $(0 + 2k)/2 = k$. Par ailleurs, le score collectif d'une configuration est égal, au signe près, au nombre de paires (ordonnées) de pièces arborant leur face H. Ainsi, toute paire de pièces distinctes apportera une contribution moyenne de $-1/4$ au score collectif, tandis que toute paire formée de deux fois la même pièce apporte une contribution moyenne de $-1/2$. En conclusion, la valeur moyenne de $L(C)$ est égale à

$$(1 + 2 + \ldots + n) - n(n-1)/4 - n/2 = n(n+1)/2 - n(n-1)/4 - n/2 = n(n+1)/4.$$

<u>Solution de l'exercice 10</u>

Dans la suite, on assimilera l'ensemble des participants à un graphe. Une première chose à faire est de s'intéresser aux invariants que conservent les événements dus à Théodore. Ici, le nombre de relations d'amitié diminue de 1, et les degrés des sommets A, B et C varient de -2, 0 et 0 : leur parité reste donc inchangée. D'autre part, ces événements ne peuvent pas conduire à la fusion de deux composantes connexes, ni de créer de cycle dans une composante acyclique.

On dira donc qu'une composante connexe est *bonne* si Théodore peut la transformer en un graphe de degré maximal 1, et qu'elle est *mauvaise* sinon, et on s'intéresse aux bonnes composantes connexes. On voit alors clairement qu'une clique de taille $k \geqslant 3$ est mauvaise, puis qu'un cycle de taille $k \geqslant 3$ est lui aussi mauvais, car on finit par le réduire en un triangle.

Puis, plus généralement, si une composante connexe ne contient que des sommets de degré pair (et non nul), la composante de B et de C restera une composante ne contenant que des sommets de degré pair (et non nul) : on ne pourra donc pas réduire notre composante initiale en sommets de degré au plus un. Ainsi, on dit qu'une composante connexe est *acceptable* si ce n'est pas une clique de taille $k \geqslant 3$ et si elle contient au moins un sommet de degré impair (ou s'il s'agit en fait d'un sommet isolé) ; nous venons de démontrer que toute bonne composante connexe est acceptable.

Ne voyant pas quelles contraintes supplémentaires exiger de la part de nos composantes connexes, faisons pour l'instant le pari que toute composante acceptable est bonne. Si on trouve un contre-exemple, on pourra toujours raffiner notre notion de composante acceptable.

Tout d'abord, initialement, chaque composante connexe contient au moins 1010 sommets. Puisqu'on a 2019 sommets en tout, le graphe est connexe. Et il contient des sommets de degré impair, donc ce n'est même pas une clique. Notre graphe est donc formé d'une unique composante connexe acceptable. Soit maintenant $\mathcal{C}$ une composante acceptable comportant au moins un sommet de degré 2, et montrons que Théodore peut la transformer en une nouvelle composante elle aussi acceptable (voire deux). Pour ce faire, il suffit de ne pas casser la connexité de cette composante, sauf quand on est sûr que cela ne causera pas de catastrophe.

Tout d'abord, si $\mathcal{C}$ ne contient pas de cycle, c'est donc un arbre, et nul événement ne peut y créer de cycle. S'il existe un sommet A de degré 2 ou plus, en choisissant deux voisins B et C de A, Théodore peut ainsi appliquer un événement au triplet (A, B, C), et scindera $\mathcal{C}$ en un ou deux arbres, chacun étant acceptable.

D'autre part, si $\mathcal{C}$ contient un triangle T, soit K une clique maximale contenant T. Puisque $\mathcal{C}$ n'est pas une clique, elle c'est qu'il existe un sommet B voisin de K mais pas de tous les sommets de K. On considère alors deux sommets A et C de K tels que B soit voisin de A mais pas de C. Puis, en appliquant un événement au triplet (A, B, C), Théodore transforme $\mathcal{C}$ en une nouvelle composante connexe $\mathcal{C}'$ qui contient les mêmes sommets qu'avant.

Supposons maintenant que $\mathcal{C}$ contient un cycle mais pas de triangle. Soit A un sommet de degré maximal appartenant à un cycle, et soit B et D deux voisins de A appartenant à un tel cycle : on note ρ le chemin qui les relie sans passer par A. Puisque $\mathcal{C}$ lui-même n'est pas un cycle, c'est que $\deg A \geqslant 3$. Ainsi, soit C un autre voisin de A. Comme $\mathcal{C}$ est sans triangle, B et C ne sont pas voisins. Ainsi, Théodore peut appliquer un événement au triplet (A, B, C). Ce faisant, les seules arêtes de $\mathcal{C}$ qui ont disparu sont AB et AC, mais on peut les remplacer par les chemins $AD\,\rho$ et $AD\,\rho\,BC$, de sorte que notre composante reste connexe.

En conclusion, toute composante connexe acceptable peut être réduite en une autre composante connexe acceptable, ou en une forêt (dont toutes les composantes sont acceptables) contenant une arête de moins. En procédant ainsi de proche en proche, Théodore peut donc parvenir à ses fins.

Solution de l'exercice 11

Tout d'abord, on s'intéresse au cas du pentagone. A priori, on ne peut pas savoir quelle est la réponse attendue. Mais au bout de divers essais, on se rend compte que l'on arrive pas à créer de suite d'opérations infinie, et on se convainc donc qu'une telle suite doit être finie. Dans de telles conditions, on pourra chercher des invariants et des monovariants de notre processus.

Dans la suite, on identifie nos sommets aux éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, de sorte que chaque arête du pentagone relie deux éléments voisins. Puis on note x_k l'entier écrit sur le sommet k. La première esquisse d'invariant qui saute aux yeux est l'égalité $(x+y)-y+(z+y) = x+y+z$. Ainsi, la somme $\mathcal{S}_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5$ est un invariant, et elle restera donc strictement positive. Au vu des contraintes de l'énoncé, on sent bien qu'il s'agit là d'une information importante.

Forts de ce succès, on peut être tenté de regarder les sommes de degré 2, de la forme $\mathcal{S}_2 = \sum_{k=0}^{4} x_k^2$ ou, plus généralement, $\mathcal{S}_{2,\ell} = \sum_{k=0}^{4} x_k x_{k+\ell}$. En effet, il s'agit là encore de sommes cycliques, donc peu susceptibles d'être trop affectées par le choix des sommets $(i-1, i, i+1)$ qu'a choisis Raphaël. Par ailleurs, on remarquera que

$$\mathcal{S}_2 = \mathcal{S}_{2,0},\ \mathcal{S}_{2,1} = \mathcal{S}_{2,4},\ \mathcal{S}_{2,2} = \mathcal{S}_{2,3} \text{ et } \mathcal{S}_1^2 = \sum_{k=0}^{4} \mathcal{S}_{2,k},$$

de sorte que tout polynôme cyclique de degré 2 peut s'exprimer à partir de l'invariant $\mathcal{S}_1$ et des deux quantités $\mathcal{S}_{2,0}$ et $\mathcal{S}_{2,1}$, auxquelles on s'intéresse donc.

Considérons alors une opération où, sans perte de généralité, Raphaël a choisi les sommets $(-1, 0, 1)$. Les quantités $\mathcal{S}_{2,0}$ et $\mathcal{S}_{2,1}$ augmentent alors respectivement de $2x_0(x_{-1}+x_0+x_1)$ et de $x_0(x_{-2}+x_2-2(x_{-1}+x_0+x_1))$. Ainsi, la quantité

$$3\mathcal{S}_{2,0} + 2\mathcal{S}_{2,1} = \sum_{k=0}^{4}(3x_k^2 + 2x_k x_{k+1}) = \sum_{k=0}^{4} x_k^2 + (x_k + x_{k+1})^2$$

augmente de $2x_0\mathcal{S}_1$. Mais puisque $x_0 < 0 < \mathcal{S}_1$, c'est qu'elle diminue strictement. S'agissant d'un entier naturel, elle ne peut diminuer qu'un nombre fini de fois, ce qui conclut.

Penchons-nous maintenant sur le cas du 2019-gone ou, plus généralement, du $(2n+1)$-gone, avec $n \geqslant 2$. On pourrait s'intéresser de nouveau aux sommes $\mathcal{S}_1 = \sum_{k=0}^{n-1} x_k$, $\mathcal{S}_{2,\ell} =$

$\sum_{k=0}^{n-1} x_k x_{k+\ell}$ et $\mathcal{S}'_{2,\ell} = \sum_{k=0}^{n-1}(x_k + \ldots + x_\ell)^2$. Ce faisant, on peut alors montrer que, lorsque Raphaël choisit les sommets $(-1, 0, 1)$, la quantité $\mathcal{S}_1$ est un invariant. Puis, après moult calculs longs mais pas forcément très difficiles, on en vient à constater que la quantité

$$\Delta = \sum_{\ell=1}^{n-1}(n-\ell)\mathcal{S}'_{2,\ell} + n(7-n^2)/6\,\mathcal{S}'_{2,0},$$

qui est la généralisation la plus naturelle de la somme $\mathcal{S}'_{2,0} + \mathcal{S}'_{2,1}$ identifiée dans le cas $n = 2$, augmente de $2x_0\mathcal{S}_1$. Malheureusement, cette quantité n'a aucune raison d'être positive a priori, puisque $7 - n^2 < 0$ dès lors que $n \geqslant 3$.

Devoir manipuler des termes de degré 2 semble donc trop compliqué, et on se restreint alors à ne considérer que des termes linéaires en les x_i ; mais, pour qu'ils soient positifs, on en prendra la valeur absolue. On s'intéresse ainsi aux quantités

$$\mathcal{T}_{k,\ell} = x_k + x_{k+1} + \ldots + x_\ell;$$

Seules peu d'entre elles varient lors d'une opération de Raphaël. En effet :

— si $-1, 0, 1 \notin \{k, k+1, \ldots, \ell\}$ ou si $\{-1, 0, 1\} \subseteq \{k, k+1, \ldots, \ell\}$, alors $\mathcal{T}_{k,\ell}$ ne varie pas ;

— si $\ell \in \{1, \ldots, n-2\}$, alors les sommes $\mathcal{T}_{0,\ell}$ et $\mathcal{T}_{1,\ell}$ échangent leurs valeurs ;

— de même, si $k \in \{2, \ldots, n-1\}$, alors les sommes $\mathcal{T}_{k,-1}$ et $\mathcal{T}_{k,0}$ échangent leurs valeurs.

Par conséquent, si l'on pose

$$\Delta = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{\ell=0}^{n-1} |\mathcal{T}_{k,\ell}|,$$

les seuls termes qu'il nous faut étudier de plus près pour contrôler la variation de Δ sont $\mathcal{T}_{0,0}$ et $\mathcal{T}_{1,-1}$. Ainsi, on constate que Δ augmente de

$$(|-x_0| - |x_0|) + (|\mathcal{S}_1 + x_0| - |\mathcal{S}_1 - x_0|) = |\mathcal{S}_1 + x_0| - |\mathcal{S}_1 - x_0|.$$

Puisque $x_0 < 0 < \mathcal{S}_1$, on sait que $|\mathcal{S}_1 + x_0| < |\mathcal{S}_1 - x_0|$, de sorte que Δ diminue strictement, ce qui conclut.

Note : En pratique, il est peu probable de penser, de but en blanc, à considérer directement toutes les sommes $\mathcal{T}_{k,\ell}$. Cependant, si l'on cherche à évaluer l'évolution des sommes $\mathcal{T}_{k,k}$ après une opération, on se ramène à devoir aussi considérer certaines des sommes $\mathcal{T}_{k,k+1}$ juste avant l'opération ; puis, potentiellement, certaines des sommes $\mathcal{T}_{k,k+2}$ avant l'opération précédente, et ainsi de suite. C'est donc en faisant graduellement augmenter la différence $\ell - k$ que l'on peut être amené à vouloir étudier l'ensemble des sommes $\mathcal{T}_{k,\ell}$.

Solution de l'exercice 12

Au vu du nombre de jetons considérés, utiliser des notations simples s'impose, ce sans quoi on risque vite d'être perdu. Ainsi, on notera $(n_1, \ldots, n_7)$ la configuration où la boîte B_k contient n_k jetons. Puis on va définir un certain nombre d'opérations auxiliaires que l'on va numéroter (on dispose déjà des opérations 1 et 2) : on notera alors $A \underset{i}{\longrightarrow} B$ le passage de la configuration A à la configuration B par une opération de type i. De même, on va poser $v_0 = 1$ puis $v_{n+1} = 2019^{v_n}$ pour tout $n \geqslant 0$: à la fin, on souhaite que Lucie ait v_{13} jetons en boîte B_1.

Notons dès lors que, si jamais on vide un jour la boîte B_1, une récurrence immédiate montre qu'on ne pourra y mettre qu'un nombre pair de jetons, contredisant l'objectif de Lucie. Ainsi, on ne pourra jamais utiliser l'opération 2 sur la boîte B_3.

Cherchons maintenant comment obtenir un grand nombre de jetons en utilisant 2 boîtes, puis 3, puis 4... Avec 2 boîtes, on ne peut faire que les opérations suivantes :

$$(n,0) \underset{1}{\longrightarrow} (n-1,2) \underset{1}{\longrightarrow} \ldots \underset{1}{\longrightarrow} (0,2n).$$

Puis, avec 3 boîtes, on peut donc obtenir :

$$(n,0,0) \underset{1}{\longrightarrow} (n-1,2,0) \underset{1}{\longrightarrow} (n-1,0,4) \underset{2}{\longrightarrow} (n-2,4,0) \underset{1}{\longrightarrow} \ldots \underset{2}{\longrightarrow} (0,2^n,0).$$

Il est ainsi possible de passer de n jetons dans une boîte à 2^n dans la suivante, s'il y a une boîte supplémentaire (vide) à droite. On notera 3 cette opération, qui est une combinaison des opérations 1 et 2.

Avec 4 boîtes, on peut cette fois obtenir :

$$(n,0,0,0) \underset{1}{\longrightarrow} (n-1,2,0,0) \underset{3}{\longrightarrow} (n-1,0,2^2,0) \underset{2}{\longrightarrow} (n-2,2^2,0,0)$$

$$\underset{3}{\longrightarrow} (n-2,0,2^{2^2},0) \underset{2}{\longrightarrow} \ldots \underset{2}{\longrightarrow} (0,2^{2^{2\cdots}},0,0),$$

où le nombre 2 apparaît n fois dans la dernière formule. On notera 4 cette opération.

De même, avec 3 boîtes, on peut obtenir

$$(n,0,0) \underset{2}{\longrightarrow} (n-1,0,0) \underset{2}{\longrightarrow} \ldots \underset{2}{\longrightarrow} (k,0,0)$$

pour tout $k \leqslant n$.

On commence donc par mettre un maximum de jetons en B_6, tout en vidant les boîtes B_2, B_3, B_4, B_5 et B_7 au moyen des opérations 1 :

$$(1,1,1,1,1,1,1) \underset{1}{\longrightarrow} (0,3,0,3,1,1,1) \underset{1}{\longrightarrow} (0,3,0,0,7,1,1)$$

$$\underset{1}{\longrightarrow} (0,3,0,0,0,15,1) \underset{1}{\longrightarrow} (0,3,0,0,0,0,31).$$

Puis on applique brutalement l'opération 4 :

$$(0,3,0,0,0,0,31) \underset{4}{\longrightarrow} (0,0,2^{2^2},0,0,0,31) \underset{4}{\longrightarrow} (0,0,0,2^{2^{2\cdots}},0,0,31),$$

où le nombre 2 apparaît $2^{2^2} = 16$ fois dans la dernière formule.

Vérifions que c'est suffisant : on va poser $u_0 = 1$, puis $u_{n+1} = 2^{u_n}$ pour tout $n \geqslant 0$. Alors $u_3 = 16$, puis $v_1 = 2019 < 2^{11}$ et on vérifie par récurrence que $v_n \leqslant 2^{u_{n+2}-5} - 1$ pour tout $n \geqslant 1$. En effet, c'est vrai pour $n = 1$, puis

$$v_{n+1} \leqslant 2^{11 v_n} \leqslant 2^{2^5 \times (2^{u_{n+2}-5}-1)} = 2^{2^{u_{n+2}}-2^5} \leqslant 2^{2^{u_{n+2}-5}} - 1 = 2^{u_{n+3}-5} - 1.$$

Ici, on a réussi à placer u_{16} jetons dans la boîte B_4. Puisque l'on a seulement besoin de $v_{13} \leqslant 2^{u_{15}-5} - 1 \leqslant u_{16}$ jetons à la fin, c'est clairement trop ! En outre, il faudra s'assurer que l'on peut bien les transférer dans la boîte B_1 sans poser de problème.

Heureusement, l'opération 2 nous permet de les supprimer un par un, jusqu'à arriver à la configuration $(0,0,0,k,0,0,31)$, où $k \leqslant u_{16}$ est un entier de notre choix. Puis, en utilisant les opérations 1 et 2, on pourra s'en sortir comme suit :

$$(0,0,0,k,0,0,31) \underset{1}{\longrightarrow} (0,0,0,1,2k-2,0,31) \underset{2}{\longrightarrow} (0,0,0,0,0,2k-2,31) \underset{1}{\longrightarrow} (0,0,0,0,0,0,4k+27).$$

On constate alors avec joie que $v_{13} \equiv (-1)^{v_{12}} \equiv -1 \pmod 4$, de sorte que la nombre $(v_{13} - 27)/4$ est bien un entier. On choisit donc $k = (v_{13} - 27)/4$, ce qui conclut.

4 TD d'arithmétique (Théo Lenoir)

Td d'arithmétique

L'objectif de ce TD était de voir l'application de plusieurs théorèmes/idées classiques sur des exercices. Les quatres premiers exercices utilisent des notions d'analyse comme les inégalités, les exercices entre 5 à 7 utilisent le théorème de Bézout et la division euclidienne, les exercices de 8 à 12 utilisent le théorème des restes chinois, les exercices de 14 à 17 sont des équations diophantiennes. Durant cette séances, les exercices $1, 2, 3, 5, 6, 8, 10, 11$ ont été traités.

Exercice 1
A quelle condition sur $y \in \mathbb{N}$, $y^2 + 7y + 6$ est un carré ?

Solution de l'exercice **??**
Supposons que $y^2 + 7y + 6$ est un carré, posons x l'entier positif tel que $y^2 + 7y + 6 = x^2$. L'idée ici est d'encadrer x. Comme x est positif on voit que $x \geqslant y$. Mais on peut faire mieux : comme $(y+2)^2 = y^2 + 4y + 4 < y^2 + 7y + 6 = x^2$, on obtient que $x > y + 2$. Désormais, on cherche un majorant de x : $(y+4)^2 = y^2 + 8y + 16 > y^2 + 7y + 6 = x^2$ donc $x < y + 4$. Comme $y + 2 < x < y + 4$ et x et y sont des entiers, $x = y + 3$. En réinjectant cela dans l'équation $y^2 + 7y + 6 = (y+3)^2 = y^2 + 6y + 9$ donc $y = 3$.

Réciproquement pour $y = 3$, $y^2 + 7y + 6 = 36 = 6^2$ est bien un carré. L'unique solution du problème est donc $y = 3$

Exercice 2
A quelle condition sur $(x, y) \in \mathbb{N}^2$, $(x+y)^2 + 3x + y + 1$ est un carré ?

Solution de l'exercice **??**
On utilise les mêmes techniques qu'à l'exercice 1 même s'il y a deux paramètres. Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $(x+y)^2 + 3x + y + 1$ soit un carré et z un entier positif tel que $(x+y)^2 + 3x + y + 1 = z^2$. Comme $(x+y)^2 < (x+y)^2 + 3x + y + 1 = z^2$, on a $z > x + y$. Comme $(x+y+2)^2 = (x+y)^2 + 2^2 + 2 \times 2 \times (x+y) = (x+y)^2 + 4x + 4y + 4 > (x+y)^2 + 3x + y + 1 = z^2$, on obtient $z < x + y + 2$. En particulier $x + y < z < x + y + 2$ donc $z = x + y + 1$. En réinjectant dans l'équation, $(x+y)^2 + 3x + y + 1 = (x+y+1)^2 = (x+y)^2 + 2(x+y) + 1$ donc $x = y$.

Réciproquement si $x = y$, $(x+y)^2 + 3x + y + 1 = (x+y)^2 + 2x + 2y + 1 = (x+y+1)^2$ donc $(x+y)^2 + 3x + y + 1$ est bien un carré. Les solutions du problème sont donc les couples (y, y) avec $y \in \mathbb{N}$.

Exercice 3
A quelle condition sur $(a,b) \in \mathbb{N}^2$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n a + b$ est un carré ?

Solution de l'exercice **??**
Déjà on remarque facilement que si $a = 0$ et b est un carré, alors $2^n a + b$ est un carré pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Supposons $a \neq 0, b \neq 0$. On remarque que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4(2^n a + b) = 2^{n+2}a + 4b$ est un carré. En particulier comme $2n + 2a + 4b$ et $2^{n+2}a + b$ sont des carrés pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a des carrés espacés de $3b$. Soit $n \in \mathbb{N}$ posons $2^{n+2}a + b = {k_n}^2$. Comme $b > 0$, $2^{n+2}a + 4b > 2^{n+2}a + b = {k_n}^2$, on a nécessairement $2^{n+2}a + 4b \geqslant (k_n + 1)^2$. En particulier $3b = 2^{n+2}a + 4b - (2^{n+2}a + b) \geqslant (k_n+1)^2 - {k_n}^2 = 2k_n + 1$ donc k_n est borné, donc $(2^{n+2}a + b)_{n \in \mathbb{N}}$ est borné donc $a = 0$ ce qui est absurde. Dans le cas où $b = 0$ et $a \neq 0$, a et $2a$ sont des carrés donc leur valuation 2-adique est paire, or $v_2(a) + 1 = v_2(2a)$ ce qui est impossible. Si a est différent de 0, b est nécessairement un carré.

Réciproquement si $a = 0$ et b est un carré, alors $2^n a + b$ est un carré pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Les solutions sont donc les couples $(0, k^2)$ pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4
Quels sont les $(n,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tels que

$$(2^n - 2^0)(2^n - 2^1)\dots(2^n - 2^{n-1}) = k!$$

Solution de l'exercice **??**
Soit (n,k) un couple solution. Tout d'abord le facteur de droite fait apparaitre de nombreuses puissances de 2, il semble donc naturel de regarder la valuation 2 adique des deux termes. Comme

$$(2^n - 2^0)(2^n - 2^1)\dots(2^n - 2^{n-1}) = 2^{0+1+\dots n-1}(2^n - 1)(2^{n-1} - 1)\dots(2-1)$$

, la valuation 2-adique du terme de gauche vaut $1 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$. La formule de Legendre donne que $v_2(k!) = \sum_{i=1}^{k} \lfloor \frac{k}{2^i} \rfloor \leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{k}{2^i} = \frac{k}{2} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2^i} = \frac{k}{2} \frac{1-2^{-k}}{1-2^{-1}} \leqslant k$. En particulier, $k \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$.

En fait, comme $k \geqslant \frac{n(n-1)}{2}$, on obtient $(2^n - 2^0)(2^n - 2^1)\dots(2^n - 2^{n-1}) \geqslant \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!$. Si n est grand, le terme de gauche est plus grand que $5^{\frac{n(n-1)}{2}-4}$ ce qui grossièrement en "ordre de grandeur" est de l'ordre de $5^{\frac{n^2}{2}} = \sqrt{5}^{n^2}$ tandis que le second terme est majoré par $2^{nn} = 2^{n^2}$ qui est plus petit pour n grand que le terme de droite. On va donc chercher à montrer que pour n assez grand $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)! > (2^n - 2^0)(2^n - 2^1)\dots(2^n - 2^{n-1})$ pour n assez grand. Pour $n = 6$, en calculant on peut remarquer que $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)! > (2^n - 2^0)(2^n - 2^1)\dots(2^n - 2^{n-1})$. Posons $U_n = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!$ et $V_n = (2^n - 2^0)(2^n - 2^1)\dots(2^n - 2^{n-1}) =^{0+1+\dots n-1} (2^n - 1)(2^{n-1} - 1)\dots(2-1)$. On remarque que $\frac{v_{n+1}}{v_n} = (2^{n+1} - 1)2^n \leqslant 2^{2n+1}$ et $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(1+\cdots+n)!}{(1+\cdots+(n-1))!} \geqslant (1 + \cdots + (n-1))^{n-1}(1 + \cdots + n) \geqslant 4^{n-1} \times 8 = 2^{2n+1}$ si $1 + \cdots + n - 1 \geqslant 4$ et $1 + \cdots + n \geqslant 8$ ce qui est vrai pour $n \geqslant 4$. En particulier, comme pour $n \geqslant 4$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n}$ et $u_6 > v_6$, pour tout $n \geqslant 6$ $u_n > v_n$. On obtient donc que $n \leqslant 5$.

Ensuite il ne reste plus qu'à vérifier les différents cas : pour $n = 5$, $31 = 2^5 - 1$ donc 31 divise $k!$ donc $k \geqslant 31$. En particulier $31! \geqslant 30 \times (2^5 - 2^0)(2^5 - 2^1)\dots(2^5 - 2^4) > (2^5 - 2^0)(2^5 - 2^1)\dots(2^5 - 2^4)$.

— Pour $n = 4$ ou 3, $7 = 2^3 - 1$ divise u_n, donc $k \geqslant 7$. Comme $7! = 2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7$. $n = 3$ est impossible car 9 ne divise pas v_3. Comme $v_4 = 2^6 \times 3^2 \times 5 \times 7 > 7!$, on a $k \geqslant 8$ donc $v_2(k!) \geqslant v_2(8!) = 7$ contradiction.

— Pour $n = 2$, $v_2 = 6 = 3!$ donc $(2, 3)$ est solution.

— Pour $n = 1$, $v_1 = 1 = 0! = 1!$ donc $(1, 0)$ et $(1, 1)$ sont solutions.

Les uniques solutions sont $(2, 3)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$.

Exercice 5
Soient $(m, n) \in \mathbb{Z}$. Quelles sont les couples solutions $(a, b) \in \mathbb{Z}$ de $am + bn = 1$?

Solution de l'exercice **??**
Si m et n ne sont pas premiers entre eux, l'équation $am + bn = 1$ n'a pas de solution car pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, le pgcd de m et n divise $am + bn$.

Si m et n sont premiers entre eux, l'équation $am + bn = 1$ admet une solution (a_0, b_0) par le lemme de Bézout. L'équation se réécrit donc $am + bn = a_0m + b_0n$ i.e. $m(a - a_0) = n(b_0 - b)$. Par le lemme de Gauss comme n et m sont premiers entre eux, n divise $a - a_0$ donc $a = a_0 + kn$. En réinjectant dans l'équation $b_0 - b = km$ donc $b = b_0 - km$. Toute solutions est de la forme $(a, b) = (a_0 + kn, b_0 - km)$. Réciproquement ces couples là sont solutions.

Exercice 6
Montrer que si m et n sont deux entiers strictement positifs premiers entre eux, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que tout nombre entier $k \geqslant N$ peut s'écrire sous la forme $k = am + nb$ avec a et b des entiers positifs. Déterminer la valeur minimale de N.

Solution de l'exercice **??**
On peut reprendre ce qui a été fait dans l'exercice précédent et le généraliser pour l'équation $am + bn = v$ pour $v \in \mathbb{Z}$: l'ensemble des solutions de $am + bn = v$ est l'ensemble des couples $(a, b) = (a_0 + kn, b_0 - km)$ pour $k \in \mathbb{Z}$ si a_0, b_0 est une solution particulière de l'équation. Comme pour tout couple solutions (a, b), $a + b$ est constant, on cherche à trouver une solution avec b positif et petit pour avoir également $a \geqslant 0$. En particulier, si on cherche la solution sous la forme $(a, b) = (a_0 + kn, b_0 - km)$, on a envie de prendre k le quotient de la division euclidienne de b_0 par m. Si on veut écrire un nombre k comme combinaison linéaire positive de m et n, le pire des cas est celui où le reste de b par n vaut $n - 1$, mais que dans ce cas $a_0 + kn = -1$. L'entier correspondant est $-1 \times n + m(n - 1) = mn - n - m$. Montrons donc que $N = mn - n - n + 1$ convient.

Soit $v \geqslant mn - m - n + 1$. Les solutions de $am + bn = v$ sont de la forme $(a, b) = (a_0 + kn, b_0 - km)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Soit k le quotient de la division euclidienne de b_0 par m, et (a, b) la solution associée à k. On a donc $0 \leqslant b \leqslant m - 1$. Comme $a = \frac{k-bn}{m} \geqslant \frac{mn-m-n+1-(m-1)n}{m} = \frac{1-m}{m} = -1 + \frac{1}{m} > -1$ et a est entier on a $a \geqslant 0$. Ainsi v s'écrit comme combinaison linéaire positive de m et n.

Il reste à montrer que $mn - m - n$ ne peut s'écrire comme combinaison linéaire positive de m et n. Comme $mn - n - m = (-1) \times m + (m - 1) \times n$, les solutions de $am + bn = 1$ sont les couples $(a, b) = (-1 + kn, m - 1 - km)$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Si $k \leqslant 0$, alors $-1 + kn \leqslant -1$. Si $k > 0$, comme $k \geqslant 1$, $m - 1 - km \leqslant m - 1 - m = -1 < 0$. En particulier l'équation $am + bn = mn - m - n$ n'admet pas de solutions entières avec a et b positifs. L'entier minimal N vérifiant la propriété est donc $mn - m - n + 1 = (m - 1)(n - 1)$

Exercice 7
Soient m, n, a des entiers strictement positifs avec $a \geqslant 2$. Montrer que $PGCD(a^n-1, a^m-1) = a^{PGCD(m,n)} - 1$.

Solution de l'exercice **??**
Par symétrie supposons $n \geqslant m$. Effecutons la division euclidienne de n par m. Soit $q \in \mathbb{N}$ et $r \in [\![0, m-1]\!]$ tel que $n = mq + r$. On a $a^n - 1 = a^{mq+r} - 1 = (a^m)^q a^r - 1 = a^r - 1 \pmod{a^m - 1}$. Comme $0 \leqslant a^r - 1 < a^m - 1$, $a^r - 1$ est le reste de la division euclidienne de $a^n - 1$ par $a^m - 1$. En particulier $PGCD(a^n - 1, a^m - 1) = PGCD(a^m - 1, a^r - 1)$. On peut itérer le procédé : notons $r_0 = m, r_1 = n, r_2, \dots, r_k = PGCD(m, n), r_{k+1} = 0$ la suite de restes obtenus lors de l'algorithme d'Euclide, on montre avec la remarque précédente que pour tout $i \in [\![0, k]\!]$, $PGCD(a^m - 1, a^n - 1) = PGCD(a^{r_i} - 1, a^{r_{i+1}} - 1)$. En particulier pour $i = k$, $PGCD(a^m - 1, a^n - 1) = PGCD(a^{PGCD(m,n)} - 1, 0) = a^{PGCD(m,n)} - 1$

Exercice 8
Soit $n \geqslant 2$. Dénombrer le nombre de x dans $[\![1, n]\!]$ tels que $x^2 = x \pmod{n}$.

Solution de l'exercice **??**
Déjà le premier réflexe à avoir est de factoriser : on cherche le nombre de x dans $[\![1, n]\!]$ tels que $x(x-1) = 0 \pmod{n}$. Traitons d'abord le cas où n est une puissance d'un nombre premier différente de 1. Comme x et $x-1$ sont premiers car $x - (x-1) = 1$, n divise $x(x-1)$ si et seulement si n divise x ou $x-1$. Ainsi l'équation est équivalente comme x est dans $[\![1, n]\!]$ à $x = n$ ou $x = 1$: il y a deux solutions.

Maintenant il faut traiter le cas général. Déjà on peut remarquer que le nombre de solutions est en fait le nombre de classes de congruence modulo n telles que $x(x-1) = 0 \pmod{n}$. Pour se ramener au cas précédents, on a un outil qui permet de ramener un problème de congruence modulo n à un problème de congruence modulo des puissances de nombres premiers : le théorème des restes chinois. Posons $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ avec les p_i des nombres premiers et les a_i des nombres entiers strictement positifs. L'équation est équivalente à pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $p_i^{a_i}$ divise $x(x-1)$ ce qui est équivalent à pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $x = 0 \pmod{p_i^{a_i}}$ ou $x = 1 \pmod{p_i^{a_i}}$. L'équation est donc équivalente à il existe $(e_1, \dots, e_k)$ dans $\{0, 1\}^k$ tel que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $x = e_i \pmod{p_i^{a_i}}$. Les $p_i^{a_i}$ étant deux à deux premiers entre eux, si on fixe $(e_1, \dots, e_k)$ dans $\{0, 1\}^k$ le système pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $x = e_i \pmod{p_i^{a_i}}$ admet une unique solution modulo n. Aussi chaque classe de solution est distincte : si on se donne $(e_1, \dots, e_k) \neq (e'_1, \dots, e'_k)$ dans $\{0, 1\}^k$ et qu'on note a la solution modulo n de $x = e_i \pmod{p_i^{a_i}}$, b celle de $x = e'_i \pmod{p_i^{a_i}}$, supposons par l'absurde $a = b$, dans ce cas pour tout i $e_i = a = b = e'_i \pmod{p_i^{a_i}}$ et comme les e_i et e'_i sont dans $\{0, 1\}$, on obtient $e_i = e'_i$ ce qui est contradictoire. En particulier il y a autant de classe de solution que de $(e_1, \dots, e_k)$ dans $\{0, 1\}^k$ c'est à dire 2^k, avec k le nombre de diviseur premier distinct de n.

En fait le lemme chinois nous donne que le nombre de solution ici modulo n est le lemme que le produit pour tout i du nombre de solution modulo $p_i^{a_i}$

Exercice 9
Dénombrer le nombre de x dans $[\![1, n]\!]$ tels que $x^2 = 1 \bmod n$.

Solution de l'exercice **??**
Comme dans l'exercice précédent on factorise : on cherche les x tels que n divise $x-1$ et $x+1$. Cette fois-ci $x-1$ et $x+1$ ne sont pas forcément premiers entre eux, mais leur pgcd divise $x + 1 - (x-1) = 2$. En particulier si n est une puissance d'un nombre premier impair,

comme le pgcd de $x-1$ et $x+1$ divise 2 qui est premier avec tout nombre premier impair, alors n divise $x-1$ ou n divise $x+1$ donc $x=1$ ou $x=n-1$. Si n est une puissance de 2, par contre c'est plus compliqué. Pour $n=2$ il n'y a qu'une solution : $x=1$. Mais pour $n=4$ on a deux solutions : $x=1$ ou 3 et pour $n=8$, $1,3,5,7$ sont solutions. Si n est une puissance de 2 supérieure ou égale à 4, alors si n divise $(x-1)(x+1)$, x est impair, et parmis $x-1$ et $x+1$ un est divisible par 2 et pas par 4. En particulier si on pose $n=2^k$ avec $k \geqslant 2$, 2^{k-1} divise $x-1$ ou $x+1$, donc $x=1$ ou $x=1+2^{k-1}$ ou $x=2^k-1$ ou $x=2^{k-1}-1$. Si $k \geqslant 3$, toutes ces quantités sont différents car $1<2^{k-1}-1<2^{k-1}+1<2^k-1$. En particulier l'équation a quatre solutions si $k \geqslant 3$, 2 si $k=2$, 1 sinon.

Ensuite pour le cas général, il suffit de refaire le même raisonnement que dans l'exercice précédent. Posons $n=p_1^{a_1}\dots p_k^{a_k}$ avec les p_i des nombres premiers et les a_i des nombres entiers strictement positifs, le lemme chinois nous donne que le nombre de solution ici modulo n est le lemme que le produit pour tout i du nombre de solution modulo $p_i^{a_i}$. En particulier si on note N le nombre de diviseur premier impair distinct de n, alors si 8 divise n il y a $4N$ solutions, si 4 divise N mais pas 8 il y a $2N$ solutions, sinon il y a N solutions.

Exercice 10

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $(a,b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que n divise $4a^2+9b^2-1$.

<u>*Solution de l'exercice*</u> **??**

Commençons par tricher et regarder notre équation dans $\mathbb{Q}$: on cherche a et b tel que $4a^2+9b^2-1=0$. On peut poser $b=0$, dans ce cas $a=\frac{1}{2}$ convient. Pour $a=0$, $b=\frac{1}{3}$ convient. Maintenant soit $n \in \mathbb{N}^*$ il faut réussir à généraliser ça modulo n.

La fraction $\frac{1}{2}$ n'a pas de sens si n est divisible par 2, par contre si n est premier avec 2, 2 est inversible modulo n : posons $b=0$, et a un inverse de 2 modulo n, alors $4a^2+9b^2-1=(2a)^2-1=1-1=0 \pmod n$. De même si n est premier avec 3, $a=0$ et b un inverse de 3 modulo n convient.

On sait donc résoudre le problème si 3 ne divise pas n, si 2 ne divise pas n, il reste alors le cas général. Pour cela, on va utiliser le lemme chinois : posons $n=2^k m$ avec $k \in \mathbb{N}$ et m impair. Comme 2^k et m sont premiers entre eux, on cherche à trouver a et b tels que 2^k et m divisent $4a^2+9b^2-1$. Mais 2^k est premier avec 3, et m est premier avec 2 : prenons a tel que $a=0 \pmod{2^k}$ et $a=2^{-1} \pmod m$ et b tel que $b=3^{-1} \pmod{2^k}$ et $b=0 \pmod m$. On a bien $4a^2+9b2-1=0$ modulo m et modulo 2^k, donc n divise $4a^2+9b^2-1$.

Exercice 11

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe k entiers positifs consécutifs qui ne sont pas des puissances de nombre premiers.

<u>*Solution de l'exercice*</u> **??**

En fait cet exercice ressemble à "Montrer que pour tout $k>0$ il existe k entiers consécutifs qui ne sont pas des nombres premiers" qui est plus connu et pour lequel on peut trouver une solution en considérant $(k+1)!+2,(k+1)!+3,\dots,(k+1)!+(k+1)$. En effet on a k nombres consécutifs, et si $i \in [\![2,k+1]\!]$, i divise $(k+1)!+i$ qui est pourtant strictement plus grand que i, donc qui ne peut être premier.

En fait on peut adapter l'exemple en considérant $(k+1)!^2+2,(k+1)!^2+3,\dots,(k+1)!^2+(k+1)$. n effet on a k nombres consécutifs, et si $i \in [\![2,k+1]\!]$, i divise $(k+1)!^2+i$. Si i n'est pas une puissance de nombre premier alors $(k+1)!^2+i$ non plus, si i est une puissance de nombre premier, posons $i=p^k$ avec $k \geqslant 2$, alors p^k divise $(k+1)!^2+i$, et comme $i \leqslant (k+1)$, p^{k+1}

divise i^2 qui divise $(k+1)!^2$. En particulier p^{k+1} ne divise pas i donc ne divise pas $(k+1)!^2+i$, on obtient donc $(k+1)!^2+i=p^k=i$ ce qui est absurde.

Mais on peut également utiliser le lemme chinois : on veut trouver N tel que N soit divisible par deux nombres premiers, $N+1$ idem et même chose jusqu'à $N+k-1$. Pour cela donnons nous $p_1,\dots p_{2k}$ des nombres premiers distincts. On aimerait que p_1 et p_2 divise N soit $N=0 \pmod{p_1}$ et $N=0 \pmod{p_2}$. On aimerait que p_3 et p_4 divisent $N+1$ donc que $N=-1 \pmod{p_3}$ et $N=-1 \pmod{p_4}$. On obtient en continuant un système que pourrait vérifier un N pour convenir. Soit N une solution du système suivant : pour tout $i \in [\![0k-1]\!]$, $N=-i \pmod{p_{2i+1}}$ et $N=-i \pmod{p_{2i+2}}$, N existe par le lemme chinois les p_i étant deux à deux premiers entre eux. Quitte à ajouter un multiple de $p_1\dots p_{2k}$ on peut supposer N positif. Pour tout $i \in [\![0k-1]\!]$, $N+i$ est divisible par p_{2i+2} et p_{2i+1} donc ne peut être une puissance d'un nombre premier. En particulier la séquence $N,\dots,N+k-1$ est une suite de k nombres consécutifs n'étant pas des nombres premiers. Une telle technique peut se généraliser pour beaucoup d'énoncés similaires : par exemple montrer qu'on peut trouver pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ k nombres consécutifs divisible par au moins 42 nombres premiers distincts.

Exercice 12
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_1 \dots a_n$ des entiers supérieurs ou égaux à 2 premiers entre eux deux à deux tels que $a_1 \dots a_n - 1$ soit le produit de deux entiers consécutifs.

Solution de l'exercice **??**
Déjà on va réécrire le problème : on cherche $a_1,\dots,a_n$ deux à deux premiers entre eux tels que $a_1\dots a_n = k(k+1)+1 = k^2+k+1$. En fait cela revient à chercher $k \in \mathbb{N}$ tel que k^2+k+1 admette au moins n diviseurs premiers distincts (car chaque a_i apporte un facteur premier distinct des autres, et car si k^2+k+1 s'écrit sous la forme $p_1^{b_1}\dots p_m^{b_m}$ avec les p_i premiers les b_i dans $\mathbb{N}^*$ et $m \geqslant n$, on peut prendre $a_i = p_i^{b_i}$ si $i \leqslant n-1$ et $a_n = p_n^{b_n}\dots p_m^{b_m}$). Désormais on cherche à prouver qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que k^2+k+1 admette au moins n diviseurs premiers distincts.

Tout d'abord, on va montrer que l'ensemble des p qui divise k^2+k+1 pour $k \in \mathbb{N}$ est infini. En effet si on suppose qu'il est fini, notons $p_1,\dots p_i$ les diviseurs premiers de k^2+k+1 lorsque k parcourt $\mathbb{N}^*$, pour $k=p_1\dots p_i$, $k^2+k+1>1$ donc admet un diviseur premier, valant nécessairement p_j pour i entre 1 et i. Comme p_j divise k, il divise k^2+k donc il divise $k^2+k+1-k^2-k=1$ ce qui est absurde. En particulier l'ensemble des p premiers qui divise k^2+k+1 pour $k \in \mathbb{N}$ est infini.

Maintenant, on cherche un résultat plus fort : on veut que k^2+k+1 soit divisible par n nombre premiers en même temps. Pour cela remarquons que si p divise k^2+k+1 pour un certain k, alors p divise a^2+a+1 si $a=k \pmod{p}$. On va donc se ramener à un système de congruence. Soit $p_1,\dots,p_n$ des nombres premiers distincts tels qu'il existe $k_1,\dots,k_n$ tels que p_i divise $k_i^2+k_i+1$. Soit x tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $x=k_i \pmod{p_i}$, un tel x existe par le lemme chinois les p_i étant deux à deux premiers entre eux. Quitte à rajouter un multiple de $p_1\dots p_n$ à x on peut supposer x positif. D'après la remarque faite précédemment, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, p_i divise x^2+x+1. En particulier on a bien prouvé le résultat voulu.

Exercice 13
Soit p un nombre premier que vaut $\binom{2p}{p}$ modulo p ?

Solution de l'exercice **??**
On écrit ce que vaut explicitement $\binom{2p}{p}$ en faisant disparaitre les facteurs p : $\binom{2p}{p} =$

$\frac{2p}{p}\frac{(2p-1)\dots(p+1)}{(p-1)!} = 2\frac{(2p-1)\dots(p+1)}{(p-1)!}$. En particulier comme $(2p-1)\dots(p+1) = (p-1)\dots 1 = (p-1)! \pmod p$ et $(p-1)!$ est premier avec p, on obtient donc que $\binom{2p}{p} = 2 \pmod p$.

Exercice 14
Résoudre pour $(k, a, b) \in \mathbb{N}^3$, $k(k+1) = 2^a 3^b$

Solution de l'exercice **??**
Comme k et $k+1$ sont premiers entre eux et $k < k+1$, on a trois cas :

— $k = 1$, dans ce cas $k+1 = 2$ donc $a = 1$, $b = 0$. Réciproquement $(1, 1, 0)$ est solution

— $k = 2^a$ et $k+1 = 3^b$. Dans ce cas $2^a + 1 = 3^b$. $a = 0$ n'est pas solution, pour $a = 1$, $b = 1$. Réciproquement, le triplet $(2, 1, 1)$ est solution. Pour $a = 2$ il n'y a pas de solution, pour $a = 3$, $b = 2$ et réciproquement le couple $(8, 3, 2)$ est solution. Si $a \geqslant 4$, l'ordre de 3 modulo 16 étant 4, on obtient comme $3^b = 1 \pmod{16}$ que 4 divise b, donc 5 divise $3^4 - 1 = 2^4 \times 5$ qui divise $3^b - 1 = 2^a$ contradiction

— $k+1 = 2^a$ et $k = 3^b$. Dans ce cas $2^a = 3^b + 1$. $a = 0$ est impossible, pour $a = 1$ on obtient $b = 0$ et on retrouve $(1, 1, 0)$ comme couple solution. Pour $a = 2$, on trouve $b = 1$, réciproquement $(3, 2, 1)$ est solution. Pour $a \geqslant 3$, on regarde modulo 8 : $3^b + 1 = 0 \pmod 8$. Or $3^b = 1$ ou 3 modulo 8, ce qui est contradictoire.

Les solutions sont donc $(1, 1, 0)$, $(2, 1, 1)$, $(8, 3, 2)$ et $(3, 2, 1)$.

Exercice 15
Résoudre pour $(n, m, k) \in \mathbb{N}^3$, $3^n + 4^m = 5^k$

Solution de l'exercice **??**
Devant une telle équation il faut essayer de factoriser, 4^m étant un carré, si 5^k l'était on pourrait factoriser. On cherche donc à montrer que k est pair : il suffit de regarder modulo 3, supposons $n \geqslant 1$, dans ce cas $1 = (-1)^k \pmod 3$ donc k est pair et k ne peut pas être nul. Posons $k = 2k'$ avec $k' > 0$, alors $3^n = (5^{k'} - 2^m)(5^{k'} + 2^m)$. Le pgcd de $(5^{k'} - 2^m)$ et $(5^{k'} + 2^m)$ divise $(5^{k'} + 2^m) - (5^{k'} - 2^m) = 2^{m+1}$ et 3^n donc le pgcd vaut 1. $(5^{k'} - 2^m)$ et $(5^{k'} + 2^m)$ sont premiers entre eux, comme leur produit vaut 3^m et $(5^{k'} - 2^m) \leqslant (5^{k'} + 2^m)$, on obtient $5^{k'} - 2^m = 1$. Pour $m = 0$ ou 1 pas de solution, pour $m = 2$ on obtient $k' = 1$, soit $k = 2$ et en réinjectant dans l'équation initiale $n = 2$, réciproquement $(2, 2, 2)$ est solution. Pour $m \geqslant 3$, en regardant modulo 8 comme l'ordre de 5 est 2 et $5^k = 1 \pmod 8$, 2 divise k donc 3 divise $5^2 - 1 = 24$ qui divise $5^{k'} - 1 = 2^m$ ce qui est absurde, il n'y a donc pas de solution pour $m \geqslant 3$.

Reste le cas $n = 0$: $1 + 4^m = 5^k$. Pour $m = 0$, il n'y a pas de solution, pour $m = 1$, $k = 1$, réciproquement $(0, 1, 1)$ est solution. Pour $m \geqslant 2$, on regarde modulo 16 : l'ordre de 5 modulo 16 est 4, donc comme $5^k = 1 \pmod{16}$, 4 divise k. En particulier 3 divise $5^2 - 1 = 24$ qui divise $5^k - 1 = 4^m$ ce qui est absurde.

Les solutions sont donc $(0, 1, 1)$ et $(2, 2, 2)$

Exercice 16
Résoudre pour $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$

Solution de l'exercice **??**
Soit (x, y, z) une solution. Comme $x^2 + y^2 + z^2$ est pair, x^2, y^2 ou z^2 l'est donc x, y ou z est pair. Par symétrie supposons x pair. On pose $x = 2x'$, on obtient $4x'^2 + y^2 + z^2 = 4x'yz$. En regardant modulo 4 $y^2 + z^2 = 0 \pmod 4$. Comme un carré est congru à 0 ou 1 modulo 4 on obtient que 4 divise y^2 et z^2 donc y et z sont pairs. En posant $y = 2y'$ et $z = 2z'$, on obtient

$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 4xyz$. En particulier, en regardant modulo 4 comme un carré vaut 0 ou 1, on obtient que x', y' et z' sont pairs. On va pouvoir en fait itérer le procédé : montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$, que 2^n divise x, y et z.

Pour l'initialisation, le cas $n = 1$ a déjà été traitée. Pour l'hérédité, soit $n \in \mathbb{N}^*$ supposons que 2^n divise x, y et z. En posant $x = 2^n a$, $y = 2^n b$ et $z = 2^n c$, on obtient $a^2 + b^2 + c^2 = 2^{n+1}abc$. Comme $n \geqslant 1$, on a $a^2 + b^2 + c^2 = 0 \pmod 4$. Comme un carré est congru à 0 ou 1 modulo 4, on a nécessairement a, b, c pair, donc 2^{n+1} divise x, y et z.

En particulier comme 2^n divie x, y, z pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $x = y = z = 0$. Réciproquement $(0, 0, 0)$ étant solution, l'unique solution du problème est $(0, 0, 0)$.

Exercice 17
Soit p un nombre premier impair. A quelle condition sur $n \in \mathbb{N}^*$ $n^2 + np$ est un carré parfait ?

Solution de l'exercice **??**
On commence par factoriser le terme de gauche : $n(n + p)$ est un carré. Le pgcd de n et $n + p$ divise $n + p - n = p$ et n, il vaut donc 1 ou p. On va donc distinguer deux cas :

— Si p divise n, on pose $n = pk$ avec $k \in \mathbb{N}^*$, dans ce cas $n(n + p) = p^2 k(k + 1) = x^2$ pour $x \in \mathbb{N}$. En particulier p divise x^2 donc p divise x, $k(k + 1) = \left(\frac{x}{p}\right)^2$. Comme k et $k + 1$ sont premiers entre eux et leur produit est un carré, ils sont tous deux des carrés. Or si $k = y^2$ avec $y \in \mathbb{N}^*$, comme $k + 1$ est un carré $k + 1 \geqslant (y + 1)^2 = k + 2y + 1 > k + 1$ ce qui est une contradiction.

— Si p ne divise pas n, alors $n + p$ et n sont premiers entre eux. Comme leur produit est un carré, il existe $x \in \mathbb{N}^*$ et $y \in \mathbb{N}^*$ avec $y > x$ tel que $n = x^2$, $n + p = y^2$. En particulier $p = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$. Comme p est premier, $y - x > 0$ et $y + x > 0$, on a nécessairement $y - x = 1$. On obtient $p = (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$, soit $x = \frac{p-1}{2}$, bien défini car p est impair. On en déduit que $n = (x)^2 = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$.
Réciproquement si $n = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, $n^2 + np = \frac{(p-1)^4 + 4p(p-1)^2}{16} = \frac{(p-1)^2(p^2-2p+1+4p)}{16} = \frac{(p-1)^2(p+1)^2}{16} = \left(\frac{(p-1)(p+1)}{4}\right)^2$. Comme p est impair, $\frac{(p-1)(p+1)}{4}$ est bien entier. La seule solution du problème est $n = \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$.

5 TD d'arithmétique (Mathieu Barré)

Exercices

Exercice 1
Trouver tous les nombres entiers x, y et z qui vérifient $x + y + z + xy + yz + zx + xyz = 2017$.

Exercice 2
Trouver tous les entiers n pour lesquels $n^2 + 20n + 11$ est un carré parfait.

Exercice 3
Trouver tous les entiers positifs n et les nombres premiers p tels que $p^n + 144 = m^2$.

Exercice 4
Trouver tous les entiers positifs x et y tels que $x^2 - y! = 2019$.

Exercice 5
Soient a et b deux entiers premiers entre eux. Montrer qu'il existe des entiers m et n tels que $a^m + b^n \equiv 1 \pmod{ab}$.

Exercice 6
Résoudre l'équation diophantienne $6(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$.

Exercice 7
Existe-t-il des entiers $n \geqslant 1$ tels que 9 divise $7^n + n^3$?

Exercice 8
Résoudre l'équation diophantienne $y^2 = x^5 - 4$.

Exercice 9
Déterminer tous les entiers positifs n tels que 3 divise $n2^n + 1$.

Exercice 10
Un point du plan à coordonnées entières (p, q) est dit invisible si $PGCD(p, q) > 1$. Soit n un entier. Montrer qu'il existe un carré de côté n dans lequel tous les points à coordonnées entières sont invisibles.

Exercice 11
Trouver tous les nombres premiers p et q tels que pq divise $2^p + 2^q$.

Exercice 12
Soit p un nombre premier. Le résultat de la somme $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}$ s'écrit $\frac{a}{b}$ sous forme irréductible. Montrer que p^2 divise a.

Exercice 13
Montrer que la somme de deux carrés consécutifs n'est jamais égale à la somme de deux puissances quatrième consécutives.

Exercice 14
Trouver tous les entiers n tels que n^2 divise $2^n + 1$.

Solution des exercices

Solution de l'exercice 1
En arithmétique, on ne sait pas faire grand chose avec des sommes, il faut toujours essayer de factoriser ! Ici, on remarque que $x + y + z + xy + yz + zx + xyz = (x+1)(y+1)(z+1) - 1$, de sorte que l'équation à résoudre se réécrit :

$$(x+1)(y+1)(z+1) = 2018$$

La décomposition en facteurs premiers de 2018 étant 2×1009, il y a peu de possibilités pour que 2018 s'écrive comme le produit de trois entiers :

— Cas 1 : $x + 1 = 1$, $y + 1 = 2$, $z + 1 = 1009$

— Cas 2 : $x + 1 = 1$, $y + 1 = 1009$, $z + 1 = 2$

— Cas 3 : $x+1=2$, $y+1=1$, $z+1=1009$
— Cas 4 : $x+1=2$, $y+1=1009$, $z+1=1$
— Cas 5 : $x+1=1009$, $y+1=1$, $z+1=2$
— Cas 6 : $x+1=1009$, $y+1=2$, $z+1=1$

Les triplets (x, y, z) solution du problème sont donc toutes les 6 permutations du triplet $(0, 1, 1008)$.

Solution de l'exercice 2
Solution 1 : on cherche m tel que $n^2+20n+11=m^2$. Cette équation se réécrit $(n+10)^2-89=m^2$, ou encore

$$(n+10-m)(n+10+m)=89$$

Or 89 est un nombre premier donc on a nécessairement $n+10+m=89$ et $n+10-m=1$. On en déduit que $n=35$ et $m=44$.

Solution 2 : on cherche à encadrer $n^2+20n+11$ entre deux carrés consécutifs. On a toujours $n^2+20n+11<(n+10)^2$. On a également $n^2+20n+11>(n+9)^2$ si $n \geqslant 36$. Ainsi, pour $n \leqslant 36$, $n^2+20n+11$ est strictement compris entre deux carrés consécutifs et ne saurait donc être un carré parfait. On traite alors les cas pour $n \leqslant 35$ à la main, éventuellement en accélérant le travail par des arguments de parité.

Solution 3 : on cherche à encadrer $n^2+20n+11$ entre deux carrés, pas forcément consécutifs. Pour tout entier n, on a :

$$(n+3)^2<n^2+20n+11<(n+10)^2$$

si bien que si $n^2+20n+11$ est un carré parfait, c'est forcément le carré de $n+4$, $n+5$, $n+6$, $n+7$, $n+8$ ou $n+9$. Chacun de ces cas peut être résolu rapidement à la main.

Solution de l'exercice 3
Notre identité remarquable préférée permet de réécrire le problème sous la forme

$$p^n=(m-12)(m+12)$$

p étant premier, les deux facteurs $m-12$ et $m+12$ sont nécessairement des puissances de p : $m-12=p^\alpha$ et $m+12=p^\beta$, avec $\beta>\alpha \geqslant 0$ et $\alpha+\beta=n$. On remarque alors que p divise à la fois $m+12$ et $m-12$. p divise donc leur différence, à savoir 24. Dès lors, $p=2$ ou $p=3$.

Si $p=2$, $m+12$ et $m-12$ sont deux puissances de 2 distantes de 24, ce qui se produit seulement pour $m+12=32$ et $m-12=8$. Si $p=3$, $m+12$ et $m-12$ sont deux puissances de 3 distantes de 24, ce qui se produit seulement pour $m+12=27$ et $m-12=3$.

Finalement, les seules solutions du problèmes sont $p=2$, $m=20$, $n=8$ et $p=3$, $m=15$, $n=4$.

Solution de l'exercice 4
Pour $y \geqslant 4$, $y!$ est divisible par 4 donc $x^2 \equiv 2019 \equiv 3 \pmod 4$. Il y a contradiction car un carré est toujours congru à 0 ou 1 modulo 4. Il ne reste plus qu'à traiter les cas $y \in \{1, 2, 3\}$, et on trouve $x=45$, $y=3$ comme seule solution.

Solution de l'exercice 5
Solution 1 : a et b étant premiers entre eux, il suffit de trouver m et n tels que $a^m+b^n \equiv 1 \pmod a$ et $a^m+b^n \equiv 1 \pmod b$, c'est-à-dire tels que $b^n \equiv 1 \pmod a$ et $a^m \equiv 1 \pmod b$. Par le théorème d'Euler, le choix $n=\varphi(a)$ et $m=\varphi(b)$ convient.

Solution 2 : a et b étant premiers entre eux, ab et $a+b$ sont également premiers entre eux. Le théorème d'Euler donne donc $(a+b)^{\varphi(ab)} \equiv 1 \pmod{ab}$. Or, en développant $(a+b)^{\varphi(ab)}$ par la formule du binôme de Newton, on voit que $(a+b)^{\varphi(ab)} \equiv a^{\varphi(ab)} + b^{\varphi(ab)} \pmod{ab}$. Dès lors, $a^{\varphi(ab)} + b^{\varphi(ab)} \equiv 1 \pmod{ab}$, ce qui prouve le résultat cherché avec $m = n = \varphi(ab)$.

Solution de l'exercice 6

Puisque $6(x^2+y^2) = z^2+t^2$, on a $3 \mid z^2+t^2$. Un carré étant toujours congru à 0 ou 1 modulo 3, si la somme de deux carrés est divisible par 3 chacun de ces carrés l'est. On a donc $3 \mid z^2$ et $3 \mid t^2$, d'où $3 \mid z$ et $3 \mid t$. En écrivant $z = 3z'$ et $t = 3t'$ et en remplaçant dans l'équation de départ, il vient : $2(x^2+y^2) = 3(z'^2+t'^2)$. Par un raisonnement analogue à ce qui précède, $3 \mid x^2+y^2$ et on peut écrire $x = 3x'$, $y = 3y'$. En substituant ce résultat dans l'équation, on trouve $6(x'^2+y'^2) = z'^2+t'^2$, ce qui est exactement l'équation de départ mais avec des variables strictement plus petites $x' < x$, $y' < y$, $z' < z$ et $t' < t$. Par descente infinie, il n'existe pas d'autre solution que le quadruplet $(0,0,0,0)$.

Solution de l'exercice 7

La solution de cet exercice peut être consultée dans l'excellent cours sur la notion d'ordre donné par Igor Kortchemski au stage olympique d'été de Grésillon 2011 (exercice 1), dont le polycopié est en ligne à cette adresse.

Solution de l'exercice 8

Une puissance cinquième est toujours congru à 0, 1 ou 10 modulo 11. Par ailleurs, un carré est toujours congru à 0, 1, 4, 9, 5 ou 3 modulo 11. Ainsi, y^2+4 est toujours congru à 4, 5, 8, 2, 9 ou 7 modulo 11 et ne saurait être égal à x^5 : il n'y a pas de solution.

Solution de l'exercice 9

On regarde le cycle des puissances de 2 modulo 3. Ce cycle est de période 2 : si n est pair, $2^n \equiv 1 \pmod 3$ et si n est impair, $2^n \equiv 2 \pmod 3$. Ainsi, si n est pair, $n2^n+1 \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow n+1 \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow n \equiv 2 \pmod 3$. De même, si n est impair, $n2^n+1 \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow 2n+1 \equiv 0 \pmod 3 \Leftrightarrow n \equiv 1 \pmod 3$.

Par le théorème chinois, n pair et $n \equiv 2 \pmod 3$ équivaut à $n \equiv 2 \pmod 6$. De même, n impair et $n \equiv 1 \pmod 3$ équivaut à $n \equiv 1 \pmod 6$. En conclusion, les solutions sont les entiers congrus à 1 ou 2 modulo 6.

Solution de l'exercice 10

On cherche a et b tels que pour tous i et j de $[\![0, n-1]\!]$, $a+i$ et $b+j$ ne soient pas premiers entre eux. Soient donc $(p_{i,j})_{i,j \in [\![0,n-1]\!]}$ n^2 nombres premiers deux à deux distincts : on veut que pour tous i et j, $a+i$ et $b+j$ soient tous deux divisibles par $p_{i,j}$, soit $a \equiv -i \pmod{p_{i,j}}$ pour tous i et j et $b \equiv -j \pmod{p_{i,j}}$. L'existence de tels a et b est garantie par le théorème chinois.

Solution de l'exercice 11

La solution de cet exercice peut être consultée dans l'excellent TD sur la notion d'ordre donné par François Lo Jacomo au stage olympique d'été de Grésillon 2011 (exercice 4), dont le polycopié est en ligne à cette adresse.

Solution de l'exercice 12

Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Wolstenholme. Pour en savoir plus à son sujet, vous pouvez consultez le document suivant.

Solution de l'exercice 13

Supposons qu'il existe des entiers naturels a et b tels que $a^2+(a+1)^2 = b^4+(b+1)^4$. En développant et en multipliant par 2 l'équation précédente, on obtient : $4a^2 + 4a + 1 = 4b^4 + 8b^3 + 12b^2 + 8b + 1$, ce qui peut se factoriser sous la forme

$$(2a + 1)^2 = (2b^2 + 2b + 2)^2 - 3$$

Ainsi, $(2a+1)^2$ et $(2b^2+2b+2)^2$ sont deux carrés qui diffèrent de 3. Nécessairement, l'un vaut 1 et l'autre vaut 4, ce qui ne conduit pas à des solutions positives pour a et b.

Solution de l'exercice 14
La solution de cet exercice peut être consultée dans le très bon cours (mais difficile) de Naoki Sato (exemple 8.5, page 33), disponible en ligne à cette adresse.

6 TD de combinatoire (Colin Davalo)

L'objectif de ce TD était de travailler sur des exercices dont la réponse nécessite de construire un exemple. Cependant certains exercices d'invariants pour lesquels la réponse à l'exercice est non se cachent parmis les exercices suivants pour entraîner le lecteur à être attentif.

Exercice 1
Les entiers de 1 à 2021 sont écrits au tableau. Une opération consiste à effacer deux entiers écrits au tableau x et y et à les remplacer par $x - y$. Est-il possible de finir avec uniquement le nombre 2048 écrit au tableau ?

Solution de l'exercice 1

On remplace x et y par x-y. En additionnant deux nombres, ce qui ne change pas, c'est la parité de leur somme. Ainsi la parité de la somme de tous les entiers écrits ne change pas. Or $1 + 2 + \cdots + 2021 = \frac{2021\times 2022}{2}$ est impair. Donc il est impossible de finir avec seulement 2048 qui est pair !

Exercice 2
Est-t-il possible d'écrire les $2^n - 1$ premiers entiers dans un certain ordre, de sorte que deux entiers consécutifs aient une écriture en base 2 qui ne varie que d'un chiffre ?

Solution de l'exercice 2

On procède par récurrence pour montrer le résultat demandé. Si on suppose que c'est vrai pour un certain entier n, alors on écrit les $n - 1$ premiers chiffres a_0,$a_2, \cdots, a_{2^n-1}$ dan sun certain ordre qui satisfait la condition requise, puis on écrit $a_{2^n+k} + 2^n + b_k$, avec b_k le reste de la division euclidienne de de $a_k + a_{2^n-1}$ modulo 2^n.

Entre le terme $2^n - 1$ et 2^n uniquement le n-ième chiffre change, et entre le temre $2^n + k$ et $2^n + k + 1$, c'est la même chiffre qui change qu'entre a_k et a_{k+1}.
Pour $n = 0$ c'est possible, ainsi c'est vrai pour tout entier n.

Exercice 3
On considère n boîtes alignées $B_1, \cdots, B_n$, et n billes distribuées dans les boîtes. Les opérations suivantes sont autorisées : prendre une bille de la boîte B_1 et en ajouter une en B_2, ou de prendre une bille en B_n pour l'ajouter en B_{n-1}, ou encore prendre deux billes dans une boite

B_i pour $1 < i < n$ et en ajouter une dans les boîtes B_{i-1} et B_{i+1}. Est-il toujours possible de se ramener à une configuration où toutes les boîtes contiennent une seule bille ?

Solution de l'exercice 3

On procède par récurrence. Le résultat est vrai pour 1 droite. . Supposons que le résultat est vrai pour $n-1$ boîtes avec $n \geqslant 1$. Si à un moment il n'y a pas de cases avec deux billes, alors par principe des tiroirs les n cases possèdent une bille et par conséquent on a terminé.

En appliquant successivement des opérations, à parir d'un certain moment une bille arrivera en position n ou 1 : en effet on peut par exemple remarquer que la somme des carrés des positions des n billes augmente, car pour tout entier n : $(n+1)^2+(n-1)^2 = 2n^2+2$, mais elle reste majorée par n^3, donc on peut ramener une bille en position n ou 1.

Supposons sans perte de généralité qu'une bille est en position n, alors les autres billes enposition n peuvent être mises en position $n-1$. On sait par hypothèse de récurrence qu'il existe une suite d'opération qui permet de finir avec une bille par case sur les $n-1$ premières cases si on s'autorise :

— Enlever une bille en case 1 et la mettre en case 2.

— Enlever deux billes en case $1 < k < n-1$ et en mettre une en case $k-1$ et k+1.

— Enlever une bille en case $n-1$ et la mettre en case $n-2$.

Il faut juste vérifier que la troisième opération est possible avec n boites en deux opérations autorisées : en effet on bouge la bille en position n vers la position $n-1$, puis on bouge deux billes en position $n-1$: une arrive en position $n-2$, et la bille qui était initialement en position n revient en position n.

Ainsi par récurrence c'est toujours possible.

Exercice 4
Au tableau, n entiers positifs ou nuls sont écrits. Le PGCD de ces n entiers est 1. Une opération consiste à remplacer deux entiers x et y si $x \leqslant y$ par $2x$ et $y-x$. Pour quelles configurations initiales est-il possible de finir après un certain nombre d'opérations avec $n-1$ zéros écrits au tableau ?

Solution de l'exercice 4
On fait quelques essais pour comprendre quelle peut être la configuration finale. Montrons que le plus grand diviseur impair des n nombres est au plus 1. Initialement c'est le cas, et si à un instant c'est le cas, et que l'on remplace x et y par $2x$ et $x-y$, alors tout diviseur impair d commun aux nombre écrits après cette transformation divise $2x$, donc x car d est impair, et divise $x-y$ donc divise y. Or cela veut dire que d divise le plus grand diviseur commun impair des n entiers avant l'opération, donc $d = 1$.

De plus le somme des n nombres écrits est constante.

Ainsi, pour que $n-1$ nombres soient nuls, il faut que le dernier soit égal à la somme initialement. Si cet entier admet un diviseur impair d, alors d est un diviseur impair des n nombres, et par conséquent $d = 1$. Ainsi la somme des n nombres est une puissance de 2.

Supposons que la somme des n entiers vaut 2^m réciproquement. Supposons qu'après un certain nombre d'étapes le PGCD des n nombres est 2^k avec $k < m$. Alors il existe deux entiers dont la valuation 2-adique est k. Si on les emplace par $2x$ et $y-x$, leur valuation 2-adique augmente. Si on continue ainsi, après un certain nombre d'étapes, 2^{k+1} divise tous les entiers.

Ainsi après un nombre fini d'étapes, le PGCD des n nombres est 2^m. Or La somme des n entiers est 2^m, donc on a bien $n-1$ des n entiers qui sont nuls.

C'est donc possible si et seulement si la somme des n nombres est une puissance de 2.

Exercice 5
Sur une ligne infinie, se trouvent des cailloux, avec un ou plusieurs cailloux par case. James a deux opérations possibles :

(a) Enlever un caillou à la case n et $n+1$ et en mettre un à la case $n+2$.

(b) Enlever deux cailloux à la case n, en mette un à la case $n+1$ et un à la case $n-1$.

Montrer qu'il y a toujours un moment au bout duquel James ne peut plus bouger ses pions.

Solution de l'exercice 5

On procède par récurrence forte sur le nombre de pierres pour montrer qu'avec k pierres il existe une constante C telle que chaque pion bouge au plus C_k fois. Le résultat est vrai pour $k=1$ avec $C_1 = 1$

Si le résultat est vrai pour tout nombre $1 \leqslant \ell \leqslant k$ de pierres pour un certain entier k. Tant que l'opération (a) n'est pas utilisée, la somme des distances entre les pierres augment à chaque fois de 2. Ainsi, après $D = 2n \times \binom{n}{2} \times \max(C_1, \cdots, C_{k-1})$ étapes, il y a une paire de pierres consécutives distantes d'au moins $\max(C_1, 2 \times \cdots, C_{k-1}) + 1$ et par conséquent par hypothèse de récurrence il est impossible que les deux groupes se rejoignent. Par hypothèse de récurrence, il est impossible de faire plus de $\max(C_1, 2 \times \cdots, C_{k-1})$ étapes en plus.

Si on applique (a), alors on ne peut plus appliquer que C_{n-1} étapes. Ainsi $D = (2n \times \binom{n}{2} + 2) \times \max(C_1, \cdots, C_{k-1})$ convient.

Exercice 6
Dans $2k$ pièces se trouvent $6k$ lampes. Chaque pièce contient 3 lampes, et les lampes sont elles-mêmes regroupées par paires (non nécessairement dans la même pièce). Chacune des ces $3k$ paires a un interrupteur unique qui contrôle les deux lampes de la paire. Existe-t-il nécessairement une configuration des interrupteurs (allumé ou éteint) qui permet d'avoir dans chaque pièce au moins une lampe allumée et une lampe éteinte ?

Solution de l'exercice 6
Supposons le réultat vrai pour 2 pièces avec un certain $k \geqslant 1$. Chacune des $2(k+1)$ pièce dispose de 3 interrupteurs, donc il y existe un interrupteur qui controlle deux lampes dans des salles différentes. Soient A et B ces deux salles, et $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3$ leurs lampes respectives, avec A_1 et B_1 contrôlées par le même interrupteur. Si A_2, A_3, B_2, B_3 ne sont pas reliés entre eux, on fusionne les interrupteurs de A_2 et B_2 ainsi que ceux de A_3 et B_3. Alors chaque interrupteur contrôle 2 lampes parmis les $2k$ autres pièces, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence et s'assurer que les autres pièces ont une lampe allumée et une lampe éteinte. En ce qui est de la salle A et B, il suffit que A_1 et B_1 ne soient pas dans le même état que A_1 et B_2.

Si A_2 et A_3 sont reliés, on fusionne les interrupteurs de B_2 et B_3 et on procède de même. Si A_2 et B_2 sont reliés, on fuisonne les interrupteurs de A_3 et B_3, si A_2 et B_3 sont reliés, on fuisonne les interrupteurs de A_3 et B_2 et si A_3 et B_3 sont reliés, on fuisonne les interrupteurs de A_2 et B_2. Dans tous les cas on utilise l'hypothèse de récurrence de même.

Exercice 7
On considère la suite suivante : $1, 0, 1, 0, 1, 0, 2, 3, \cdots$ où les termes à partir du 7-ième sont définis comme le reste modulo 10 de la somme des 4 termes précédants. Existe-t-il six termes consécutifs de la suite qui sont $0, 1, 0, 1, 0, 1$?

Solution de l'exercice 7

Soient $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ sept termes consécutifs de la suite, alors $a_1 + 2a_2 + 3a_3 + 4a_4 + 5a_5 + 6a_6$ est invariant modulo 5 car :

$$a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 + 5a_6 + 6a_7 \equiv a_2 + 2a_3 + 3a_4 + 4a_5 + 5a_6 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6$$

Ainsi, puisque $1+2\times 0+3\times 1+4\times 0+5\times 1+6\times 0 \equiv 4[5]$ et $0+2\times 1+3\times 0+4\times 1+5\times 0+6\times 1 \equiv 2[5]$. Ainsi ce segment ne peut jamais apparaître.

Exercice 8
USAMO 1997

Soit $0 < x_0 < 1$ un réel. Soit pour tout entier n, p_n le n-ième nombre premier. On définit la suite (x_n) par récurrence par $x_{n+1} = 0$ si $x_n = 0$ et sinon :

$$x_{n+1} = \left\{ \frac{p_{n+1}}{x_n} \right\}$$

Quels sont les réels x_0 tels que la suite (x_n) vallent 0 à partir d'un certain rang ?

Solution de l'exercice 8
Si x_n est irrationnel, alors x_{n+1} l'est aussi et par conséquent les termes de la suite ne seront jamais nuls si x_0 est irrationnel. Si $x_n = \frac{p}{q}$ est rationnel et sous forme minimale avec p et q premiers entre eux et $q > p > 0$, alors $x_{n+1} = \frac{r}{p}$ avec r le reste de la division euclidienne de $p_{n+1} \times q$ par p. Ainsi x_{n+1} s'écrit comme une fraction avec un dénominateur strictement inférieur à q. Ainsi, la suite des dénominateurs minimaux des rationels (x_k) décroît strictement jusqu'à ce que $x_k = 0$.

C'est donc vrai pour tous les nombres rationnels.

Exercice 9
Dans une ligne infinie, une demi-ligne infinie est remplie de pierres. Nathanaël joue au solitaire : si il y a trois cases consécutives, telle que les deux premières ont une pierre et pas la troisième, il peut enlever les deux pierres et placer une pierre sur la troisième.

En appliquant successivement ces opérations, quel est le point sur la ligne le plus loin qui est accessible ?

Solution de l'exercice 9
On cherche à trouver des poids w_n tels que la somme de ces poids pour chaque pierre est constante (ou au moins ne diminue pas). Si on veut que $w_n = a^a$ pour un certain a, alors on trouve que $a = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ convient car $\phi^2 = \phi + 1$.

Si on indice la ligne afin que la première pierre soit en position 0, la somme des poids des k premières pierres vaut $1 + \phi^{-1} + \cdots + \phi^{-k+1} = \frac{1-\phi^{-k}}{1-\phi^{-1}} = \phi^2$. Ainsi il est impossible d'avancer de deux cases sur la ligne, mais une case est possible.

Exercice 10
Soit n un entier. On considère une grille $n \times n$. Certaines cases de la grille sont colorés en

blanc, et d'autres en noir. Les sommets de la grille ayant un nombre impair de cases noires autour sont colorés en rouge.

Jean joue avec cette grille : il peut choisir un rectangle dont les côtés sont des arrêtes de la grille et changer de couleur toutes les cases dans ce rectangle : les cases blanches deviennent noires et les cases noires deviennent blanches. Soit X le nombre minimal d'opération que Jean doit effectuer pour que la grille devienne blanche. Montrer que :

$$\frac{Y}{4} \leqslant X \leqslant \frac{Y}{2}$$

Solution de l'exercice 10

On colorie les n points. Ensuite tant que c'est possible on décolorie des points appartenant à au moins 3 triplets entièrement colorés, puis lorsque c'ets impossible on décolorie des points appartenant à au moins 2 triplets entièrement colorés, puis on décolorie un point par triplet entièrement coloré. On décolorie dans un premier temps k_3 points, puis k_2 puis k_1. Par le principe des tiroirs, aprsè avoir décoloré k_3 points il reste au plus $3n-3k_3$ triplets entièrement colorés, et il n'y a pas de points colorés appartenant à 3 d'entre eux. Ainsi $2(3n-3k_3) \leqslant 3n-k_3$. De même, $3n-3k_3-2k_2 \leqslant 3n-k_3-k_2$, et $k_1 = 3n-3k_3-2k_2$. On réécrit ces trois inégalités ainsi : $3n \leqslant 2k_3$

2 Entraînement de mi-parcours

– Énoncés –

Exercice 1
Les 15 animatheurs partent en stage ensemble. Chaque jour, 3 animatheurs surveillent la piscine. On remarque que chaque paire d'animatheurs a surveillé une et une seule fois la piscine ensemble. Combien de jours le stage aura-t-il duré ?

Exercice 2
Soit n et b deux entiers naturels non nuls. Soit p un nombre premier impair divisant $b^{2^n}+1$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2^{n+1}m+1$.

Exercice 3
Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que $2^{2x+1}+2^x+1 = y^2$

Exercice 4
Elsa a écrit les nombres $1, 2, \ldots, 8$ au tableau. Puis elle s'autorise des opérations de la forme suivante : elle choisit deux nombres a et b tels que $a+2 \leqslant b$, s'il existe de tels nombres, puis elle les efface, et elle écrit les nombres $a+1$ et $b-1$ à la place.

(a) Démontrer qu'Elsa doit s'arrêter au bout d'un nombre fini d'opérations.

(b) Combien, au maximum, Elsa pourra-t-elle effectuer d'opérations ?

– Solutions –

Solution de l'exercice 1
La réponse est $\frac{\binom{15}{2}}{\binom{3}{2}} = 35$. Notons N le nombre de jours de stage. Pendant le stage, chaque paire d'animatheur a surveillé ensemble la piscine une unique fois, donc $\binom{15}{2}$ paires d'animatheur ont surveillé ensemble la piscine. Chaque jour, comme 3 animatheurs surveillent la piscine, $\binom{3}{2}$ paires d'animatheurs surveillent la piscine ensemble, et chaque jour celles-ci sont distinctes. En particulier, pendant les N jours, $N \times \binom{5}{2}$ d'animatheurs ont surveillé la piscine ensemble. On a donc $N \times \binom{3}{2} = \binom{15}{2}$, soit $N = \frac{\binom{15}{2}}{\binom{3}{2}} = 35$.

Solution de l'exercice 2
Regardons modulo p : $b^{2^n} = -1 \pmod p$ donc $b^{2^n} = -1 \pmod p$. En élevant au carré l'égalité précédente, $b^{2^{n+1}} = 1 \pmod p$. Notons w l'ordre de b modulo p. Comme $b^{2^{n+1}} = 1 \pmod p$, w divise 2^{n+1} donc w s'écrit sous la forme 2^k avec $k \in [\![1, n+1]\!]$. Si $k \leqslant n$, comme 2^k divise 2^n, $-1 = b^{2^n} = 1 \pmod p$ ce qui est impossible car b est impair. On en déduit que $w = 2^{n+1}$. Par le théorème de Fermat, w divise $p-1$, donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2^{n+1}m+1$.

Solution de l'exercice 3
On remarque que $x = 0, y = 2$ est solution. Désormais supposons $x \geqslant 1$. On commence par factoriser : $2^{2x+1}+2^x = 2^x(1+2^{x+1}) = y^2-1 = (y-1)(y+1)$. Comme $x \geqslant 1$, $(y+1)(y-1)$ est pair donc y est impair. Ainsi $y-1$ et $y+1$ sont tous les deux pairs, mais comme leur différence vaut 2, un seul est divisible par 4. En particulier, soit $y+1$ soit $y-1$ est divisible par 2^{x-1}.

— Si 2^{x-1} divise $y-1$, on pose $y = 1 + 2^{x-1} \times k$ pour k un entier naturel. On réinjecte dans l'équation initiale : $2^{2x+1}+2^x+1 = y^2 = 1+2^x k+2^{2(x-1)}k^2$. On obtient $2^{x+1}+1 = k+k^2 2^{x-2}$ soit $1-k = 2^{x-2}(k^2-8)$. En regardant modulo 2, on obtient que k est impair. Si $k \geqslant 1$, $1-k$ est négatif donc $k^2-8 \leqslant 0$ i.e. $0 \leqslant k \leqslant 2$. Par parité, $k=1$ ce qui contredit $1-k = 2^{x-2}(k^2-8)$.

— Si 2^{x-1} divise $y+1$, on pose $y = -1 + 2^{x-1} \times k$ pour k un entier naturel. On réinjecte dans l'équation initiale : $2^{2x+1} + 2^x + 1 = y^2 = 1 - 2^x k + 2^{2(x-1)}k^2$. On obtient $2^{x+1}+1 = -k + k^2 2^{x-2}$ soit $1+k = 2^{x-2}(k^2-8)$. En regardant modulo 2, on obtient que k est impair. Comme $1+k$ est positif, k^2-8 l'est aussi donc $k \geqslant 3$. On a donc $1+k = 2^{x-2}(k^2-8) \geqslant 2k^2-16$, ce qui se réordonne en $2k^2-k-17 \leqslant 0$. Pour $k \geqslant 4$, $2k^2-k-17 = k(2k-1)-17 \geqslant 4\times 7 - 17 = 11 > 0$, donc $3 \leqslant k \leqslant 4$. Comme k est impair, $k=3$ donc $4 = 2^{x-2}(9-8) = 2^{x-2}$ donc $x=4$. On a également $y = -1 + 3 \times 2^{4-1} = 23$.

Ainsi on a obtenu que toute solution est de la forme $(4,23)$ et $(0,2)$, il ne reste plus qu'à vérifier que ces deux couples sont solutions. Réciproquement comme $2^1+2^0+1 = 4 = 2^2$ et $2^9+2^4+1 = 512+16+1 = 529 = 23^2$, $(4,23)$ et $(0,2)$ sont les deux couples solutions.

Solution de l'exercice 4

Si les nombres écrits au tableau à un moment donné sont $n_1, n_2, \ldots, n_8$, considérons les deux quantités $\mathcal{S}_1 = n_1 + \ldots + n_8$ et $\mathcal{S}_2 = n_1^2 + \ldots + n_8^2$. On constate que chaque opération effectuée sur des entiers a et b laisse $\mathcal{S}_1$ invariant et augmente $\mathcal{S}_2$ de $2(a+1-b) \leqslant -2$. Puisque l'on aura toujours $\mathcal{S}_2 \geqslant 0$, c'est donc qu'Elsa doit bien s'arrêter au bout d'un nombre fini d'opérations.

Quand elle s'arrêtera, alors, pour un certain entier k et un certain entier ℓ, elle disposera de $8-\ell$ fois le nombre k et de ℓ fois le nombre $k+1$. On aura

$$8k + \ell = \mathcal{S}_1 = 1 + 2 + \ldots + 10 = 36,$$

donc $k = \ell = 4$.

En outre, au début, on avait $\mathcal{S}_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + 8^2 = 8 \times 9 \times 17/6 = 204$, et à la fin, on a $\mathcal{S}_2 = 4 \times (4^2+5^2) = 164$. Puisque $\mathcal{S}_2$ a décru de 2 ou plus à chaque opération, Elsa a donc effectué au plus $(204-164)/2 = 20$ opérations : c'est le cas si et seulement si, à chaque étape, elle a choisi deux entiers a et b tels que $a+2=b$.

Montrons donc qu'elle peut toujours effectuer un tel choix. Pour ce faire, elle procède comme suit. Supposons que, à un moment donné, l'ensemble des nombres écrits au tableau forme un intervalle (certains nombres peuvent être écrits plusieurs fois), formé des nombres compris entre deux entiers m et n : c'est bien le cas initialement. Alors Elsa va choisir les nombres m et $m+2$, obtenant deux occurrences du nombre $m+1$; puis elle choisit $m+1$ et $m+3$, puis $m+2$ et $m+4$, et ainsi de suite, jusqu'à choisir $n-2$ et n. Après de telles opérations, les entiers écrits au tableau seront encore compris entre m et n, et chaque entier compris entre $m+1$ et $n-1$ sera écrit au tableau, donc l'ensemble des entiers écrits au tableau forme bien un intervalle, ce qui conclut.

3 Deuxième partie : Algèbre et géométrie

1 Inégalités (Mathieu Barré)

Le cours a porté sur les notions suivantes :

— Un carré est toujours positif

— Inégalité arithmético-géométrique, cas $n = 2$

— Application : $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$ (lemme du tourniquet)

— Inégalité arithmético-géométrique, cas général

— Inégalité des mauvais élèves (preuve par récurrence)

— Application : inégalité de Nesbitt

— Inégalité de Cauchy-Schwarz (preuve à partir de l'inégalité des mauvais élèves)

On peut retrouver ces notions dans le très complet polycopié de Pierre Bornsztein sur le sujet.

Exercices

Exercice 1
Montrer que pour tout réel strictement positif x,

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2.$$

Exercice 2
Soient a et b deux réels positifs et n un entier. Montrer que

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}.$$

Exercice 3
Montrer que pour tous réels positifs x, y et z,

$$x^2 + y^4 + z^6 \geqslant xy^2 + y^2z^3 + xz^3.$$

Exercice 4
Soient a, b, c et d quatre réels strictement positifs tels que $a + b + c + d = 1$. Montrer que

$$\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{cda}{(1-b)^2} + \frac{dab}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{1}{9}.$$

Exercice 5
Soit x, y et z des réels positifs vérifiant $x^3y^2z = 1$. Quelle est la valeur minimale de $x+2y+3z$?

Exercice 6
Soit a, b, x, y et z des réels positifs. Montrer que

$$\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \geqslant \frac{3}{a+b}.$$

Exercice 7
Soient x, y et z des réels tels que $\frac{4}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Trouver le minimum de $x + 8y + 4z$.

Exercice 8
Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geqslant 3(a + b + c + 1).$$

Exercice 9
Trouver la plus grande constante K telle que pour tous réels positifs a, b et c, on ait

$$\sqrt{\frac{ab}{c}} + \sqrt{\frac{bc}{a}} + \sqrt{\frac{ac}{b}} \geqslant K\sqrt{a+b+c}.$$

Exercice 10
Montrer que si $x_0 > x_1 > \cdots > x_n$, alors

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant x_n + 2n.$$

Exercice 11
Soient a, b et c des réels positifs tels que $abc = 1$. Prouver que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Exercice 12
Soit $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs tels que

$$\frac{1}{1+x_1} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = 1.$$

Prouver que $x_1 \cdots x_n \geqslant (n-1)^n$.

Exercice 13
Montrer que si a, b et c sont des réels tels que $abc = 1$, alors

$$\frac{1}{2a^2+b^2+3} + \frac{1}{2b^2+c^2+3} + \frac{1}{2c^2+a^2+3} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Exercice 14
Soient $a_2, \ldots, a_n$ des réels positifs dont le produit vaut 1. Montrer que

$$(1+a_2)^2(1+a_3)^3 \cdots (1+a_n)^n \geqslant n^n$$

Solution des exercices

Solution de l'exercice 1
On peut transformer cette inégalité en carré positif :

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \Leftrightarrow x^2+1 \geqslant 2x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geqslant 0$$

De façon équivalente, l'inégalité arithmético-géométrique appliquée à la somme de deux termes que constitue le membre de gauche donne

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2\sqrt{x \times \frac{1}{x}} = 2$$

Solution de l'exercice 2
Première solution : Tentons d'appliquer l'IAG au membre de gauche, qui est composé d'une somme de 2 termes :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n &\geqslant 2\sqrt{\left(1+\frac{a}{b}\right)^n \times \left(1+\frac{b}{a}\right)^n} \\ &= 2\sqrt{\left[\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^n} \\ &= 2\sqrt{\left(2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^n}\end{aligned}$$

D'après l'exercice précédent, la somme d'un nombre et de son inverse est toujours supérieure à 2. On a donc : $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$, ce qui conduit enfin à

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2\sqrt{(2+2)^n} = 2^{n+1}$$

Seconde solution : La fonction $x \mapsto (1+x)^n$ est convexe sur $\mathbb{R}^+$ donc, par l'inégalité de Jensen,

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2\left(1+\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}\right)^n$$

et on conclut comme précédemment en utilisant $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geqslant 2$.

Solution de l'exercice 3
Il s'agit d'une simple application du lemme du tourniquet avec $a = x$, $b = y^2$ et $c = z^3$.

Solution de l'exercice 4
On remarque que $\frac{bcd}{(1-a)^2} = \frac{bcd}{(b+c+d)^2}$. L'IAG nous donne $bcd \leqslant \left(\frac{b+c+d}{3}\right)^3$. Donc $\frac{bcd}{(b+c+d)^2} \leqslant \frac{1}{27}(b+c+d)$. En faisant de même avec les autres termes et en sommant, il vient :

$$\frac{bcd}{(1-a)^2}+\frac{cda}{(1-b)^2}+\frac{dab}{(1-c)^2}+\frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{3}{27}(a+b+c+d) = \frac{1}{9}$$

Solution de l'exercice 5
Il s'agit de minimiser la somme $x+2y+3z$ en exploitant la condition $x^3y^2z = 1$ grâce à l'IAG. Malheureusement, il n'y a pas de termes en x^3 ni en y^2 dans l'expression $x+2y+3z$. Il nous faut donc découper le terme x en trois termes, de telle sorte que l'application de l'IAG fasse apparaître un terme en x^3 qui devrait se simplifier grâce à l'hypothèse $x^3y^2z = 1$. De même, il nous faut séparer le terme $2y$ en deux pour obtenir un exposant deux et laisser le terme $3z$ tel quel car l'exposant 1 correspond déjà. Ainsi, on écrit

$$\begin{aligned} x+2y+3z &= \frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}x+y+y+3z \\ &\geqslant 6\sqrt[6]{\frac{1}{3}x \times \frac{1}{3}x \times \frac{1}{3}x \times y \times y \times 3z} \text{ d'après l'IAG} \\ &= 6\sqrt[6]{\frac{1}{9}x^3y^2z} = 6\sqrt[6]{\frac{1}{9}} \text{ car } x^3y^2z = 1 \end{aligned}$$

Attention, il faut encore vérifier que la valeur $6\sqrt[6]{\frac{1}{9}}$ peut être atteinte pour conclure qu'il s'agit du minimum ! En effet, x, y et z étant positifs, on pourrait très bien dire sans trop de risque que $x+2y+3z \geqslant 0$, mais 0 n'est pas le minimum pour autant. Ici, en se rappelant du cas d'égalité de l'IAG, on vérifie aisément que prendre $\frac{1}{3}x = y = 3z = \sqrt[6]{\frac{1}{9}}$ convient.

Solution de l'exercice 6
On fait apparaître du degré 2 au numérateur pour pouvoir utiliser l'inégalité des mauvais élèves.

$$\begin{aligned} \frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by} &= \frac{x^2}{axy+bzx}+\frac{y^2}{ayz+bxy}+\frac{z^2}{azx+byz} \\ &\geqslant \frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+zx)} \end{aligned}$$

Or $(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geqslant 3(xy+yz+zx)$ d'après le lemme du tourniquet, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\left(\frac{4}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}\right)(x+8y+4z) \geqslant \left(\sqrt{\frac{4}{x}}.\sqrt{x}+\sqrt{\frac{2}{y}}.\sqrt{8y}+\sqrt{\frac{1}{z}}.\sqrt{4z}\right)$$

Vu que $\frac{4}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=1$, on obtient $x+8y+4z \geqslant (2+4+2)^2 = 64$.

Pour montrer que ce minimum est atteint, étudions le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : on doit avoir $\frac{\sqrt{\frac{4}{x}}}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{\frac{2}{y}}}{\sqrt{8y}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{z}}}{\sqrt{4z}}$, c'est-à-dire $\frac{2}{x} = \frac{1}{2y} = \frac{1}{2z}$. La contrainte $\frac{4}{x}+\frac{2}{y}+\frac{1}{z}=1$ permet alors de trouver $x=16$, $y=4$ et $z=4$ comme triplet qui convient.

Solution de l'exercice 8
D'après l'inégalité des mauvais élèves (ou l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction convexe $x \mapsto x^2$), on a :

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geqslant \frac{\left(a+b+c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{1+1+1}$$

Par l'IAG, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqslant 3$ et l'inégalité à prouver devient une inégalité en une seule variable $S=a+b+c$: $\frac{(S+3)^2}{3} \geqslant 3(S+1)$, qui est équivalente à $S(S-3) \geqslant 0$. Et on a bien $S \geqslant 3$ encore d'après l'IAG en faisant intervenir le fait que $abc=1$.

Solution de l'exercice 9
En élevant au carré, on obtient :

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}+2(a+b+c) \geqslant K^2(a+b+c)$$

D'après le lemme du tourniquet avec $x=\sqrt{\frac{ab}{c}}$, $y=\sqrt{\frac{bc}{a}}$ et $z=\sqrt{\frac{ac}{b}}$, on a $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b} \geqslant a+b+c$.

Ainsi, $3 \geqslant K^2$. En prenant par exemple $a=b=c=1$, $K=\sqrt{3}$ est non seulement une constante majorante mais aussi atteinte. C'est donc la réponse à cet exercice.

Solution de l'exercice 10
L'astuce est de faire apparaître les termes $x_0-x_1, x_1-x_2, \dots, x_{n-1}-x_n$ grâce à un télescopage sur le terme x_0-x_n. De fait, on a :

$$x_0-x_n = (x_0-x_1)+(x_1-x_2)+\cdots+(x_{n-1}-x_n)$$

de sorte que l'inégalité demandée est équivalente à

$$(x_0-x_1)+(x_1-x_2)+\cdots+(x_{n-1}-x_n)+\frac{1}{x_0-x_1}+\frac{1}{x_1-x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geqslant 2n$$

ou encore, en mettant chaque terme avec son inverse, à

$$\left(x_0-x_1+\frac{1}{x_0-x_1}\right)+\left(x_1-x_2+\frac{1}{x_1-x_2}\right)+\cdots+\left(x_{n-1}-x_n+\frac{1}{x_{n-1}-x_n}\right) \geqslant 2n$$

ce qui est vrai en appliquant le résultat de l'exercice 1 pour $x = x_0 - x_1, x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1} - x_n$.

Solution de l'exercice 11

On ne se lasse pas de faire appel à l'inégalité des mauvais élèves :

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} &= \frac{\left(\frac{1}{a}\right)^2}{a(b+c)} + \frac{\left(\frac{1}{b}\right)^2}{b(a+c)} + \frac{\left(\frac{1}{c}\right)^2}{c(a+b)} \\ &\geqslant \frac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2}{a(b+c)+b(a+c)+c(a+b)} \\ &= \frac{(ab+bc+ca)^2}{2(ab+bc+ca)} \text{ vu que } abc = 1 \\ &= \frac{1}{2}(ab+bc+ca)\end{aligned}$$

On termine l'exercice en remarquant finalement que $ab + bc + ca \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3$ d'après l'IAG.

Solution de l'exercice 12

La difficulté de cet exercice est de réussir à exploiter la condition $\frac{1}{1+x_1} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = 1$, qu'on voit mal comment faire apparaître à partir du produit $x_1 \cdots x_n$. Pour y voir plus clair, posons donc $y_i = \frac{1}{1+x_i}$, de sorte que $y_1 + \ldots + y_n = 1$ (*), et reformulons le problème avec les y_i. Comme $x_i = \frac{1}{y_i} - 1$, l'inégalité à prouver se réécrit

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{y_i} - 1\right) \geqslant (n-1)^n$$

ou encore

$$\prod_{i=1}^{n}(1-y_i) \geqslant (n-1)^n \prod_{i=1}^{n} y_i$$

Par ailleurs, en utilisant (*) et l'IAG, on obtient

$$1 - y_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} y_j \geqslant (n-1) \sqrt[n-1]{\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} y_j}$$

Le produit de cette inégalité pour i allant de 1 à n conduit finalement au résultat souhaité.

Solution de l'exercice 13

D'après l'IAG, $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ et $a^2 + 1 \geqslant 2a$ donc $2a^2 + b^2 + 3 \geqslant 2(ab + a + 1)$. En faisant de même avec les autres termes, il vient :

$$\frac{1}{2a^2+b^2+3} + \frac{1}{2b^2+c^2+3} + \frac{1}{2c^2+a^2+3} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1}\right)$$

Or $abc = 1$ donc d'une part $\frac{1}{ab+a+1} = \frac{1}{\frac{1}{c}+a+1} = \frac{c}{1+ca+c}$ et d'autre part $\frac{1}{bc+b+1} = \frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{ca}+1} = \frac{ca}{c+1+ca}$.
On a donc la bonne surprise que

$$\frac{1}{ab+a+1} + \frac{1}{bc+b+1} + \frac{1}{ca+c+1} = \frac{c}{1+ca+c} + \frac{ca}{c+1+ca} + \frac{1}{ca+c+1} = 1$$

ce qui achève la preuve.

Solution de l'exercice 14

Il s'agit de découper judicieusement chaque parenthèse pour lui appliquer l'IAG :

$$(1+a_2)^2 \geqslant 2^2 \times a_2$$
$$(1+a_3)^3 = \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+a_3\right)^3 \geqslant 3^3 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times a_3$$
$$(1+a_4)^4 = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+a_4\right)^4 \geqslant 4^4 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times a_4$$
$$\dots$$
$$(1+a_n)^n = \left(\frac{1}{n-1}+\dots+\frac{1}{n-1}+a_n\right)^n \geqslant n^n \times \frac{1}{(n-1)^{n-1}} \times a_n$$

Il ne reste plus qu'à faire le produit de ces inégalités pour que l'exercice soit terminé.

2 TD de géométrie : configurations classiques (Olivier Garçonnet)

Ce cours a eu pour but de revoir les outils très classiques pour résoudre des exercices d'Olympiades, ainsi nous avons évoqué la chasse aux angles et la puissance d'un point, deux outils permettant de résoudre un bon nombre de short list. Puis nous avons vu la configuration classique du pôle sud.

Chasse aux angles

Exercice 1

Soit deux cercles Γ1 et Γ2, s'intersectant en deux points distincts A et B, soit $P \in \Gamma 1$ et $Q \in \Gamma 2$ tels que P, B, Q sont alignés dans cette ordre. Soit T l'intersection des tangentes à Γ2 en P et à Γ2 en Q.

Montrer que $AQTP$ est cocyclique.

Solution de l'exercice 1

Par chasse aux angles et relation avec la tangente, on a $widehat PTQ = 180 - \widehat{TPQ} - \widehat{TQP} = 180 - \widehat{PAB} - \widehat{BAQ} = 180 - \widehat{PAQ}$, ainsi APTQ est cocyclique.

Exercice 2

Soit un cercle Γ de centre O, soit A, B, C, D quatre points distincts de Γ, soit M l'intersection de (AC) et (BD), soit N la deuxième intersection du cercle circonscrit à OAB et celui à OCD.

Montrer que $ANMD$ est cocyclique.

Solution de l'exercice 2

Par chasse aux angles dans un quadrilatère cyclique $\widehat{AND} = \widehat{ANO} + \widehat{OND} = \widehat{ABO} + \widehat{OCD} = 90 - \widehat{AOB}/2 + 90 - \widehat{DOC}/2 = 180 - \widehat{CAD} - \widehat{ADB} = AMD$, ainsi ANMD est cocyclique.

Exercice 3

Un quadrilatère convexe $ABCD$ a 2 angles droits en A et C. Un point E sur l'extension du segment $[AD]$ au-dela de D est tel que $\widehat{ABE} = \widehat{ADC}$. Le point K est le symétrique de C par rapport à A.

Prouver que $\widehat{ADB} = \widehat{AKE}$

Solution de l'exercice 3

Soit S le symétrique de B par rapport à A, $SK \parallel CB$, montrons par chasse aux angles que $ES \parallel CB : \widehat{SEB} = 2 \times \widehat{AEB} = 180 - 2 \times \widehat{EBA} = 180 - \widehat{ADC} - \widehat{ABE} = \widehat{ABC} - \widehat{ABE} = \widehat{EBC}$. Ainsi $ES \parallel SA$, donc E, S, K sont alignés et $\widehat{AKE} = \widehat{ACB} = \widehat{ADB}$.

Triangles semblables

Exercice 4

Soit un triangle ABC de centre de cercle inscrit I. Le cercle inscrit est tangent à BC, CA, AB en D, E, F respectivement. Soit P du même côté de EF que A tel que $\widehat{PEF} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{PFE} = \widehat{ACB}$.

Montrer que P, I, D sont alignés.

Solution de l'exercice 4

$PEF \sim ABC$ donc $APFE$ est cocyclique, I appartient à ce cercle car $\widehat{AFI} + \widehat{AEI} = 180$. Puis chasse aux angles, $\widehat{FIP} = \widehat{FEP} = \widehat{FBD} = 180 - \widehat{FID}$, ainsi P, I, D sont alignés.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un carré, soit M un point quelconque de $[BC]$, soit E l'intersection de (AM) et (CD), F l'intersection de (DM) et (AB).

Montrer que (EB) et (FC) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 5

Montrons que $FBC \sim BCE \iff \frac{EC}{CB} = \frac{BC}{BF}$, or avec thalès on peut réécrire $EC = \frac{BA \times MC}{MB}$ et $FB = \frac{CD \times MB}{MC}$, l'égalité des cotés du carré permet d'avoir la relation puis $\widehat{FCB} = \widehat{BEC}$ donc $ECB \sim CNB$ avec N l'intersection de (FC) et (BE), ainsi $\widehat{BNC} = 90$.

Puissance d'un point

Exercice 6

On considère K et L deux points d'un cercle Γ de centre O. Soit A un point de la droite (KL) en dehors du cercle. On note P et Q les points de contact des tangentes à Γ issues de A. Soit M le milieu de $[PQ]$.

Montrer que les angles $\widehat{MKO}$ et $\widehat{MLO}$ sont égaux.

Solution de l'exercice 6

O, M, P sont alignés car M et O appartiennent à la bissectrice de $\widehat{PAQ}$. Comme $\widehat{AMP} = \widehat{APO} = 90$, on a $AMP \sim APO$ et donc $AM \times AO = AP^2 = \mathcal{P}_A(\Gamma) = AK \times AL$, $KLOM$ est cocyclique et $\widehat{MKO} = \widehat{MLO}$.

Exercice 7
Soient ABC, un triangle avec ω son cercle circonscrit. Soit S, le milieu de l'arc BC ne contenant pas A. Soient $X \in AB$ et $Y \in AC$ tq $XY \parallel BC$. On prend P (resp. Q), la seconde intersection de SX (resp. SY) avec ω et $R = PQ \cap XY$.

Montrer que AR est tangent à ω.

Solution de l'exercice 7
Montrons que $PQ,\ XY$ et la tangente en A à ω, sont les axes radicaux de trois cercles, le premier est ω, le deuxième le cercle passant par AXY et le troisième passant par $PQYX$. Ce quadrilatère est bien cocyclique car par chasse aux angles comme $\widehat{BCS} = \widehat{CBS}$, on a $\widehat{PQY} = \widehat{PQB} + \widehat{QBS} = \widehat{PSB} + \widehat{BCS} = \widehat{PSB} + \widehat{CBS} = 180 - \widehat{PXY}$. Comme $\widehat{AYX} = \widehat{ACB}$, la tangente en A à ω est la même que celle au cercle circonscrit à AXY, donc celle ci est l'axe radical. Finalement les trois axes radicaux s'intersectent en un point donc on obtient le résultat voulu.

Exercice 8
Soit A un point en dehors d'un cercle ω. Les tangentes de A au cercle ω rencontre ω en S et T. $X,\ Y$ sont les milieux de $AT,\ AS$. Soit R l'intersection de la deuxième tangente de X au cercle ω. $P,\ Q$ sont les milieux de XT, XR. Soit $K = PQ \cap XY$, $L = SX \cap TK$.

Prouver que $KRLQ$ est un quadrilatère cyclique.

Solution de l'exercice 8
Le but est de considérer K comme l'intersection de trois axes radicaux et de prouver que $L \in \omega$. Soit L' l'intersection de SX et du cercle ω, regardons les cercles ω, le cercle circonscit à $L'TX$ (Γ) et le cercle restreint au point X. P et Q ont la même puissance par rapport à ω que par rapport à X, donc (QP) est l'axe radical. YX est tangent à Γ car $\widehat{L'XY} = \widehat{XST} = \widehat{L'TX}$, donc c'est l'axe radical de Γ et X. Les trois axes radicaux sont concourants donc K, L', T sont alignés et $L' = L$.

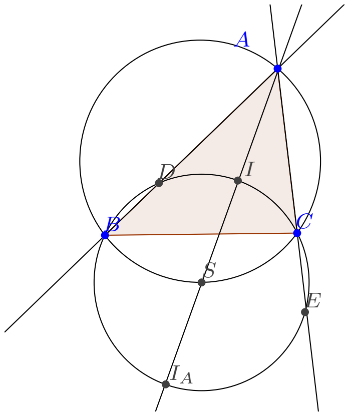
Maintenant par chasse aux angles : $\widehat{RLK} = \widehat{RST} = \widehat{RTX} = \widehat{QPX} = \widehat{PQX} = \widehat{RQK}$, on a la cocyclicité de $RLQK$.

Pôle Sud

Dans un dernier temps, nous avons vu la configuration très classique qu'est le pôle sud, pour trouver une démonstration des différentes propriétés je conseille le merveilleux cours de géométrie pour débutants de Cécile Gachet. (voir exercice 5.6) http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/geom_base.pdf
Nous avons vu en plus une propriété très intéressante :

Proposition 1.
Notons D et E, la deuxième intersection du cercle antarctique et de la droite (AB) et (AC) respectivement. Alors $AB = AE$ et $AC = AD$.

Démonstration. Montrons que ADC est un triangle isocèle. Dans le quadrilatère cyclique $BDCE$, avec O comme centre, on a $\widehat{ADC} = \widehat{CEB} = \frac{\widehat{BSC}}{2}$. Puis dans le quadrilatère $ABCD$ et dans le triangle ADC, $\frac{\widehat{BSC}}{2} = \frac{180-\widehat{DAC}}{2} = 180 - \frac{\widehat{ADC}+\widehat{ACD}}{2}$. Soit en mettant tout ensemble, on obtient $\widehat{ADC} = \frac{\widehat{ADC}+\widehat{ACD}}{2}$ donc on a $AD = AC$ puis par puissance d'un point $AB = AE$.



□

Cette propriété est très utile dans l'exercice suivant :

Exercice 9
Soit ABC, un triangle et M, le milieu de $[BC]$. Notons I_B et I_C, les centres des cercles incrits aux triangles ABM et ACM respectivment. Montrer que la seconde intersection des cercles circonscrits aux triangle ABI_B (Γ_1) et ACI_C (Γ_2) se situe sur la droite AM.

Solution de l'exercice 9
Le plus dur est de reconnaître la configuration.
Il suffit de montrer que M appartient à l'axe radical des deux cercles.
Pour cela il faut voir que (Γ_1) est le cercle antarctique au triangle ABM avec comme sommet M et (Γ_2) celle au triangle ACM avec comme sommet M. Soit B' et C' la deuxième intersection (BC) avec (Γ_1) et (Γ_2) respectivement. Avec la propriété précédente on a $MB' = MA = MC'$ et avec $MB = MC$, on a $\mathcal{P}_M(\Gamma_1) = MB' \times MB = MC' \times MC = \mathcal{P}_M(\Gamma_2)$. On a ainsi la solution voulue.

Exercice 10
Soit ABC un triangle, $\Gamma 1$ son cercle circonscrit, soit S le centre du cercle $\Gamma 2$ passant par BCI avec I le centre du cercle inscrit, soit D (respectivement E) la deuxième intersection de $\Gamma 2$ avec BS (avec CS). Soit F sur l'arc BC de $\Gamma 1$ ne contenant pas S tel que $\widehat{BSA} = \widehat{FSC}$.

Montrer que $AFDE$ est cocyclique.

Solution de l'exercice 10
S est le pôle sud donc $\widehat{DBC} = \widehat{SBC} = \widehat{BCS} = \widehat{BDE}$, donc $BC \mathbin{/\!/} ED$, de même avec la chasse aux angles nous donnent $\widehat{AFB} = \widehat{ASB} = \widehat{FSC} = \widehat{FAC}$, donc $AF \mathbin{/\!/} BC$, finalement on a des axes radicaux parallèles donc cela donnent la cocyclicité de $AFDE$.

3 Polynômes (Savinien Kreczman)

– Théorie –

La théorie a été donnée à l'oral. Se référer à l'excellent cours d'Igor Kortchemski, disponible sur le site de la POFM : `http://maths-olympiques.fr/?page_id=11`.

– Exercices résolus –

Ces exercices ont été résolus au tableau pendant la séance théorique.

Opérations sur les polynômes

Exercice 1
Soit P un polynôme tel que le reste de la division euclidienne de P par $X-1$ vaut 2 et celui de la division de P par $X-2$ vaut 1. Que vaut le reste de la division de P par $(X-1)(X-2)$?

Solution de l'exercice 1
On sait qu'on a les relations

$$\begin{cases} P(x) = Q(x)(x-1)+2 \\ P(x) = Q'(x)(x-2)+1 \end{cases}$$

pour deux polynômes Q et Q', et on cherche un polynôme R de degré inférieur à 2 tel que

$$P(x) = Q''(x)(x-1)(x-2)+R(x)$$

Puisque R est de degré $\leqslant 1$, on a $R(x) = ax+b$ pour des coefficients a et b à trouver. D'autre part, en évaluant les équations ci-dessus en $x=1$ et $x=2$, on trouve $P(1)=2$ et $P(2)=1$, puis $R(1)=2$ et $R(2)=1$. Dès lors, on se convainc facilement que $R(x)=3-x$.

Degré et ordre de grandeur

Exercice 2
Trouver tous les polynômes à coefficients réels tels que $\forall a,b,c \in \mathbb{R}$,

$$P(a+b-2c)+P(b+c-2a)+P(c+a-2b) = 3P(a-b)+3P(b-c)+3P(c-a)$$

Solution de l'exercice 2
Remplacer a,b,c par 0 donne $P(0)=0$ (le terme indépendant vaut donc 0). Remplacer ensuite b,c par 0 donne $P(-2a)=P(a)+3P(-a)$. On a une égalité entre polynômes, donc les degrés sont égaux ainsi que les coefficients correspondants. En particulier les coefficients dominants de ces polynômes sont égaux. Si le coefficient dominant de P est c_n (avec P de degré n), ceux-ci sont $c_n(-2)^n$ à gauche et $c_n+3c_n(-1)^n$ à droite. Il faut que ceux-ci soient égaux, i.e. $(-2)^n = 1+3(-1)^n$, donc $n=1$ ou $n=2$. Le polynôme est donc de la forme $P(X)=aX^2+bX$, et on vérifie que ces polynômes fonctionnent bien.

Racines et factorisation

Exercice 3
Montrer que $|X|$ n'est pas un polynôme.

Solution de l'exercice 3
On procède par l'absurde : si $|X|$ était un polynôme, $|X| - X$ en serait un également. Ce serait donc le polynôme nul puisqu'il aurait une infinité de racines (tous les nombres positifs). Ceci est impossible puisque par exemple $|X| - X$ évalué en -1 vaut 2.

Exercice 4
Soit n un naturel, $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts et $b_1, \ldots, b_n$ des réels également distincts. Dans un tableau $n \times n$, on écrit en ligne i, colonne j, le nombre $a_i + b_j$. Montrer que si le produit des éléments d'une ligne du tableau est indépendant de la ligne choisie, alors le produit des éléments d'une colonne est également indépendant de la colonne. (Source non trouvée)

Solution de l'exercice 4
Considérons le polynôme $Q(X) = \prod_{j=1}^{n}(X + b_j)$, qui est tel que le produit des éléments de la ligne i est $Q(a_i)$. On a que $Q - Q(a_1)$ est de degré n et a n racines (les a_i), donc $Q(X) - Q(a_1) = \prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$, par la formule de factorisation (le coefficient dominant est bien 1). On a alors que le produit des éléments de la colonne j est $\prod_{i=1}^{n}(a_i + b_j) = (-1)^n \prod_{i=1}^{n}(-a_i - b_j) = (-1)^n(Q(-b_j) - Q(a_1))$ ne dépend pas de j (puisque $Q(-b_j) = 0$) comme voulu.

Formules de Viète

Exercice 5
Soient a et b deux nombres réels tels que les deux polynômes $x^2 + ax + b$ et $x^2 + bx + a$ ont chacun deux racines réelles distinctes, et le polynôme $(x^2 + ax + b)(x^2 + bx + a)$ a trois racines réelles distinctes. Quelles valeurs peut prendre la somme de ces trois racines ? (All-Russian Olympiad 2015 Grade 9 Day 1 Problem 1)

Solution de l'exercice 5
Les conditions de l'énoncé impliquent que les deux polynômes du second degré (appelons-les P_1 et P_2) ont une racine commune. Notons r_2 la racine commune, r_1 la racine propre à P_1 et r_3 la racine propre à P_2.

Les formules de Viète appliquées à P_1 donnent

$$\begin{cases} r_1 r_2 = b & (1) \\ r_1 + r_2 = -a & (2) \end{cases}$$

tandis qu'appliquées à P_2 elles donnent

$$\begin{cases} r_3 r_2 = a & (3) \\ r_3 + r_2 = -b & (4) \end{cases}$$

On déduit donc

$$\begin{cases} r_1 + r_2 + r_2 r_3 = 0 \\ r_2 r_1 + r_2 + r_3 = 0 \end{cases}$$

de (2) et (3) d'une part et de (1) et (4) d'autre part. En soustrayant ces deux équations on obtient $(r_1 - r_3)(1 - r_2) = 0$, donc $r_2 = 1$ puisque r_1 et r_3 sont distinctes. En revenant au système précedent on obtient $r_1 + r_2 + r_3 = 0$.

Examen de coefficients

Exercice 6
Soit P et Q deux polynômes unitaires de degré 2014 tels que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \neq Q(x)$. Montrer qu'il existe un réel x tel que $P(x-1) = Q(x+1)$.

Solution de l'exercice 6
Rappelons qu'un polynôme de degré impair a toujours au moins une racine réelle. Il existe deux polynômes P' et Q' de degré au plus 2012 tels que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) = x^{2014} + ax^{2013} + P'(x)$ et $Q(x) = x^{2014} + bx^{2013} + Q'(x)$. Puisque $P - Q$ n'a pas de racine réelle, il est de degré pair et donc $a - b = 0$.

On cherche un réel x tel que $R(x) = 0$ où $R(x) = P(x-1) - Q(x+1)$. En développant, il vient $P(x-1) - Q(x+1) = x^{2014} - 2014x^{2013} + ax^{2013} - x^{2014} - 2014x^{2013} - bx^{2013} + R'(x)$ avec R' de degré $\leqslant 2012$. Le coefficient de degré 2014 de R est donc 0 et celui de degré 2013 est $-4028 + a - b \neq 0$. R a donc bien une racine réelle, comme voulu.

– Exercices –

Exercice 7
Etant donnés trois entiers distincts a, b et c, trouver tous les polynômes à coefficients entiers P tels que $P(a) = b$, $P(b) = c$ et $P(c) = a$. (Source non trouvée)

Exercice 8
a, b et c sont des entiers distincts non nuls et le polynôme $P(X) = X^3 + aX^2 + bX + c$ est tel que $P(a) = a^3$ et $P(b) = b^3$. Trouver a, b et c. (Olympiade de Finlande 2013, Question 1)

Exercice 9
Soit $k \geqslant 0$ un nombre entier. Déterminer tous les polynômes P à coefficients réels de degré k possédant k zéros réels distincts et tels que $P(a+1) = 1$ pour tout a zéro de P. (TST Suisse 2018 Epreuve 1 Question 1)

Exercice 10
Soit P un polynôme à coefficients entiers. Montrer que si $P(n) = 1979$ pour quatre valeurs

entières différentes de n, alors $P(n)$ ne vaut 3958 pour aucune valeur entière de n. (IMO LL 1979 VIE 1)

Exercice 11
Soit P un polynôme de degré 4 avec $P(0) = 1$, $P(1) = 1$, $P(2) = 4$, $P(3) = 9$, $P(4) = 16$. Calculer $P(-2)$.

Exercice 12
Si α, β, γ sont les trois racines de $x^3 - x + 1$, déterminer la valeur de

$$\frac{1-\alpha}{1+\alpha} + \frac{1-\beta}{1+\beta} + \frac{1-\gamma}{1+\gamma}$$

Exercice 13
Trouver tous les polynômes P tels que $P(0) = 0$ et $P(x^2+1) = P(x)^2 + 1$.

Exercice 14
On se donne n un entier positif et $k_0, \ldots, k_{2n}$ des entiers non nuls tels que $k_0 + \ldots + k_{2n} \neq 0$. Peut-on toujours trouver une permutation $(a_0, \ldots, a_{2n})$ de $(k_0, \ldots, k_{2n})$ telle que le polynôme $P(X) = a_{2n}X^{2n} + \ldots + a_0 X^0$ n'ait pas de racine entière ? (All-Russian MO 2016 Grade 11 Day 2 Problem 5)

Exercice 15
Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P(2017n)$ est premier pour tout n naturel. (TST Suisse 2017 Epreuve 4 Question 1)

Exercice 16
Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. Supposons qu'il existe un entier i tel que $P(i), P(i+1), P(i+2)$ et $P(i+3)$ soient entiers. Montrer que $P(n)$ est entier pour tout entier n. (Irish MO 2014 Round 2 Problem 3)

Exercice 17
Trouver tous les polynômes à coefficients réels tels que

$$\forall a \in \mathbb{R},\ P(a) \in \mathbb{Z} \implies a \in \mathbb{Z}$$

(Iran MO 2002 Round 3 Problem 23)

Exercice 18
Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients réels et $k_0, \ldots k_n$ des entiers distincts. Montrer qu'on a $|P(k_i)| \geqslant \frac{n!}{2^n}$ pour au moins un $i \in \{0, \ldots, n\}$ (IMO LL 1977 Ex 60)

Exercice 19
Soit P un polynôme de degré 3. On appelle *cycle* tout triple (a, b, c) de réels distincts tels que $P(a) = b, P(b) = c$ et $P(c) = a$. Supposons qu'on puisse trouver huit cycles (a_i, b_i, c_i) $(i \in \{1, \dots, 8\})$ contenant 24 réels distincts. Prouver que les huit nombres $a_i + b_i + c_i$ prennent au moins trois valeurs distinctes. (All-Russian MO 2016, Grade 10, Day ?, Problem 3)

Exercice 20
Notons S la fonction qui à un naturel n associe la somme de ses chiffres. Trouver tous les polynômes à coefficients entiers P tels que

$$\forall n \geqslant 2016,\ P(n) > 0 \text{ et } S(P(n)) = P(S(n)).$$

(IMO SL 2016 N1)

Exercice 21
Soit P un polynôme de degré $n > 1$ à coefficients entiers et k un naturel non nul. Posons $Q(x) = P(\cdots P(x) \cdots)$ où P apparaît k fois. Prouver qu'il y a au plus n solutions entières à l'équation $Q(x) = x$. (IMO 2006 P5)

– Solutions des exercices –

Le terme « solution » est employé abusivement ici. Il s'agit plus d'ébauches de solutions, qui donnent l'idée sans vérifier de détails.

Solution de l'exercice 7
Par le truc habituel des polynômes à coefficients entiers, on a $a - b | b - c | c - a | a - b$, et donc $|a - b| = |b - c| = |c - a|$, puis $a = b = c$ ce qui est une contradiction, donc aucun polynôme ne convient.

Solution de l'exercice 8
Viète pour $P(X) - X^3$.

Solution de l'exercice 9
Par exemple utiliser Viète pour la somme des racines de P d'une part et de $P - 1$ n'autre part. De (nombreuses) autres solutions existent.

Solution de l'exercice 10
On a $P(X) - 1979 = Q(X)(X - a)(X - b)(X - c)(X - d)$. Puisque 1979 est premier et que les facteurs à droite sont entiers, on peut conclure.

Solution de l'exercice 11
Constater que $1, 2, 3, 4$ sont racines de $P(X) - X^2$ qui est de degré au plus 4, donc ce dernier

polynôme s'écrit $C(X-1)(X-2)(X-3)(X-4)$ pour une constante C réelle. Trouver C grâce à $P(0)$ et évaluer en -2.

Solution de l'exercice 12
Sachant x racine de $x^3 - x + 1$, se demander de quel polynôme $y = \frac{1-x}{1+x}$ est racine. On trouve $x = \frac{1-y}{1+y}$ et on remplace dans le polynôme. On trouve alors que y est racine de $-y^3 + y^2 - 7y - 1$. On conclut par Viète que la somme cherchée vaut 1.

Solution de l'exercice 13
Montrer par récurrence que P a au moins n points fixes (i.e. des x tels que $P(x) = x$) $x_1, \ldots, x_n$, en prenant $x_n + 1 = x_n^2 + 1$. En déduire ensuite que $P(X) - X$ est le polynôme nul.

Solution de l'exercice 14
Prendre a_{2k} comme le maximum des k_i empêche tout entier $\geqslant 2$ ou $\leqslant -2$ d'être racine, 0 et 1 s'éliminent facilement et si -1 était racine pour toute permutation des k_i, en particulier tous les k_i non maximaux seraient égaux (on le voit en faisant des transpositions) ce qui entraîne une contradiction.

Solution de l'exercice 15
Se rappeler que $a - b | P(a) - P(b)$ pour un polynôme à coefficients entiers. Poser $P(2017) = p$ premier et considérer $P(2017(kp+1)) - P(2017)$ pour k naturel.

Solution de l'exercice 16
Lagrange fonctionne, travailler par récurrence (ne pas oublier de faire les deux sens) également.

Solution de l'exercice 17
On a $|P(n+1) - P(n)| \leqslant 1$ si n entier par le théorème des valeurs intermédiaires, et donc P est constant ou du premier degré. Si $P(X) = aX + b$, on a donc que $-b/a$ et $(1-b)/a$ sont entiers, donc $1/a$ également, et b est multiple de a. Ces solutions conviennent, et les solutions constantes non-entières également.

Solution de l'exercice 18
Supposons spdg $x_0 < \cdots < x_n$, et procédons par l'absurde. La formule d'interpolation de Lagrange donne

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}\right) P(x_i)$$

P est unitaire, donc on a

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j \neq i}^{n} \frac{1}{x_i - x_j}\right) P(x_i)$$

Par notre hypothèse d'absurde,

$$\sum_{i=0}^{n}(\prod_{j\neq i}^{n}\frac{1}{x_i-x_j})P(x_i) < \sum_{i=0}^{n}(\prod_{j\neq i}^{n}\frac{1}{x_i-x_j})\frac{n!}{2^n}$$

Or,

$$\prod_{\substack{j=0\\ j\neq i}}^{n}(x_i-x_j) = \prod_{\substack{j=0\\ j<i}}^{n}(x_i-x_j)\prod_{\substack{j=0\\ j>i}}^{n}(x_i-x_j) \geqslant i!(n-i)!$$

en valeur absolue. Dès lors,

$$\sum_{i=0}^{n}(\prod_{j\neq i}^{n}\frac{1}{x_i-x_j})P(x_i) < \sum_{i=0}^{n}(\prod_{i\neq j}^{n}\frac{1}{x_i-x_j})\frac{n!}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!} = 1$$

ce qui est une contradiction puisque cette quantité doit valoir 1.

Solution de l'exercice 19

Considérer le polynôme $Q(X) = X + P(X) + P(P(X))$ de degré 9. Evalué en un élément d'un cycle, il renvoie la somme des éléments du cycle. Par l'absurde, on trouverait quatre cycles ayant même somme, donc 12 valeurs qui ont la même image par Q ce qui est impossible.

Solution de l'exercice 20

Montrer en lemme $m \geqslant S(m)$ avec égalité ssi $m \in \{0, \ldots, 9\}$. Prendre $n = 10^k$ avec k grand (pour « séparer les termes » du polynôme) pour constater que $a_i \geqslant 0$ pour tout i (sinon on peut créer une suite arbitrairement longue de 9 dans $P(n)$ sans changer $S(n)$). Ensuite, prendre $n = 9 \cdot 10^k$, toujours avec k grand, l'égalité devient

$$\sum_k a_k 9^k = P(9) = S(P(9\cdot 10^k)) = \sum_k S(a_k 9^k).$$

Il faut donc avoir $a_k 9^k \in \{0, \ldots, 9\}$ pour tout k vu le lemme. En éliminant encore quelques petits cas, on aboutit à la solution : P est une constante entière entre 1 et 9, ou P est l'identité.

Solution de l'exercice 21

Considérons $a_1, \ldots, a_j$ distincts tels que $P(a_i) = a_{i+1}$ et $P(a_j) = a_1$ (ce qu'on appellera une orbite de longueur j). On a $a_2 - a_1 | a_3 - a_2 | \ldots | a_1 - a_j$, donc tous ces termes sont égaux en valeur absolue, ce qui est impossible si $j > 2$. Si il n'y a pas d'orbite de longueur 2, on a fini.

Si (a_1, a_2) et (b_1, b_2) sont deux orbites, on a $a_1 - b_1 | a_2 - b_2 | a_1 - b_1$ et donc $|a_1 - b_1| = |a_2 - b_2|$, et de même $|a_1 - b_2| = |a_2 - b_1|$, ce dont on peut déduire $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$. De même, si (a_1, a_2) et (t) sont deux orbites on trouve $a_1 + a_2 = 2t$. Tous les points cherchés sont donc solutions de $x + P(x) = C$ pour un C bien choisi, et il y en a donc bien n au plus.

4 Transformations géométriques (Timothée Rocquet)

Le cours était principalement inspiré de `http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/geom_transfos.pdf`

Exercice 1
Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit, D et E appartenant respectivement à $[AB]$ et $[AC]$ tels que $BD = CE$, N le milieu de l'arc BC contenant A. Montrer que A, D, E, N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 1
Soit N' l'intersection autre A des cercles circonscrits à ABC et ADE. Par construction, N' est le centre de la similitude envoyant B sur C et D sur E donc $N'BD$ et $N'CE$ sont semblables mais $BD = CE$ donc $N'B = N'C$ donc $N' = N$.

Exercice 2
Soit ABC un triangle, D et E des points à l'extérieur de ABC tels que $\widehat{ADB} = \widehat{AEC} = 90$ et $\widehat{ABD} = \widehat{ACE}$, et M le milieu de $[BC]$. Montrer que $MD = ME$.

Solution de l'exercice 2
On introduit S tel que BDA et BMS sont semblables. Les triangles CEA et CMS sont également semblables il existe donc des similitudes : $S_1 : \begin{cases} B \to B \\ D \to M \\ A \to S \end{cases}$, $S_2 : \begin{cases} C \to C \\ M \to E \\ S \to A \end{cases}$ donc $S_1' : \begin{cases} B \to B \\ D \to A \\ M \to S \end{cases}$, $S_2' : \begin{cases} C \to C \\ S \to M \\ A \to E \end{cases}$ donc $S_2' \circ S_1' : \begin{cases} M \to M \\ D \to E \end{cases}$. Le rapport de cette dernière similitude est les produit des rapports de S_1' et S_2', c'est-à-dire $\frac{BS}{BM}\frac{CM}{CS} = 1$ donc $MD = ME$.

Exercice 3
Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles semblables et A'', B'', C'' les milieux de $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$. Montrer que $A''B''C''$ est semblable à ABC.

Solution de l'exercice 3
Soit M le centre de la similitude envoyant ABC sur $A'B'C'$. Il existe alors une similitude $S : \begin{cases} A \to A' \\ B \to B' \\ C \to C' \\ M \to M \end{cases}$ donc il existe $S_1 : \begin{cases} A \to B \\ A' \to B' \\ M \to M \\ A'' \to B'' \end{cases}$ donc $S_1' : \begin{cases} A \to A'' \\ B \to B'' \\ M \to M \end{cases}$ et il existe aussi $S_2 : \begin{cases} A \to C \\ A' \to C' \\ M \to M \\ A'' \to C'' \end{cases}$ donc $S_2' : \begin{cases} A \to A'' \\ C \to C'' \\ M \to M \end{cases}$ mais un similitude est entièrement caractérisée par l'image de deux points donc $S_1' = S_2' : \begin{cases} A \to A'' \\ B \to B'' \\ C \to C'' \\ M \to M'' \end{cases}$.

Exercice 4
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles se coupant en P et Q, la tangente à ω_1 en P recoupe ω_2 en A, la tangente à ω_2 en P recoupe ω_1 en B. Soit C le symétrique de P par rapport à A, D la deuxième intersection de (PB) et du cercle circonscrit à PQC. Montrer que P est le milieu de $[BD]$.

Solution de l'exercice 4
Soit ω_3 le cercle circonscrit à PQC. Puisque Q est l'intersection de ω_1 et ω_2, il existe une si-

militude $S_1 : \begin{cases} A \to P \\ P \to B \\ Q \to Q \end{cases}$. Puisque Q est l'intersection de ω_1 et ω_3, il existe une similitude $S_2 : \begin{cases} C \to D \\ P \to B \\ Q \to Q \end{cases}$. Comme un similitude est entièrement caractérisée par l'image de deux points, $S_1 = S_2 : \begin{cases} P \to B \\ C \to D \\ A \to P \\ Q \to Q \end{cases}$ mais A est le milieu de $[PC]$ donc P est le milieu de $[BD]$.

Exercice 5
Soit $ABCDE$ un pentagone tel que $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE}$ et $\widehat{ABC} = \widehat{ACD} = \widehat{ADE}$. Soit $P = (BD) \cap (CE)$. Montrer que (AP) coupe $[CD]$ en son milieu.

Solution de l'exercice 5

Les triangles ABC, ACD, ADE sont semblables donc il existe une similitude $S : \begin{cases} A \to A \\ B \to C \\ C \to D \\ D \to E \end{cases}$ donc elle envoie $(AC) \cap (BD) = K$ sur $(AD) \cap (CE) = L$ donc $\frac{KA}{KC} = \frac{KB}{KD}$ donc (KL) est parallèle à (BC) par le théorème de Thalès.

On peut maintenant poser M le milieu de $[CD]$, N le milieu de $[KL]$ et F l'intersection de (BD) et (CE). Il existe alors deux homothéties $H_1 : \begin{cases} A \to A \\ K \to B \\ L \to C \\ N \to M \end{cases}$ et $H_2 : \begin{cases} F \to F \\ K \to C \\ L \to B \\ N \to M \end{cases}$ donc A, M, N d'une part et K, M, N d'autre part sont alignés.

5 TD de géométrie (Martin Rakovsky)

– Axes radicaux et pôle Sud –

Ce troisième cours était un TD permettant de revoir les outils introduits lors des cours précédents. De nombreux exercices étaient tirés d'Olympiades.

Autour du pôle sud

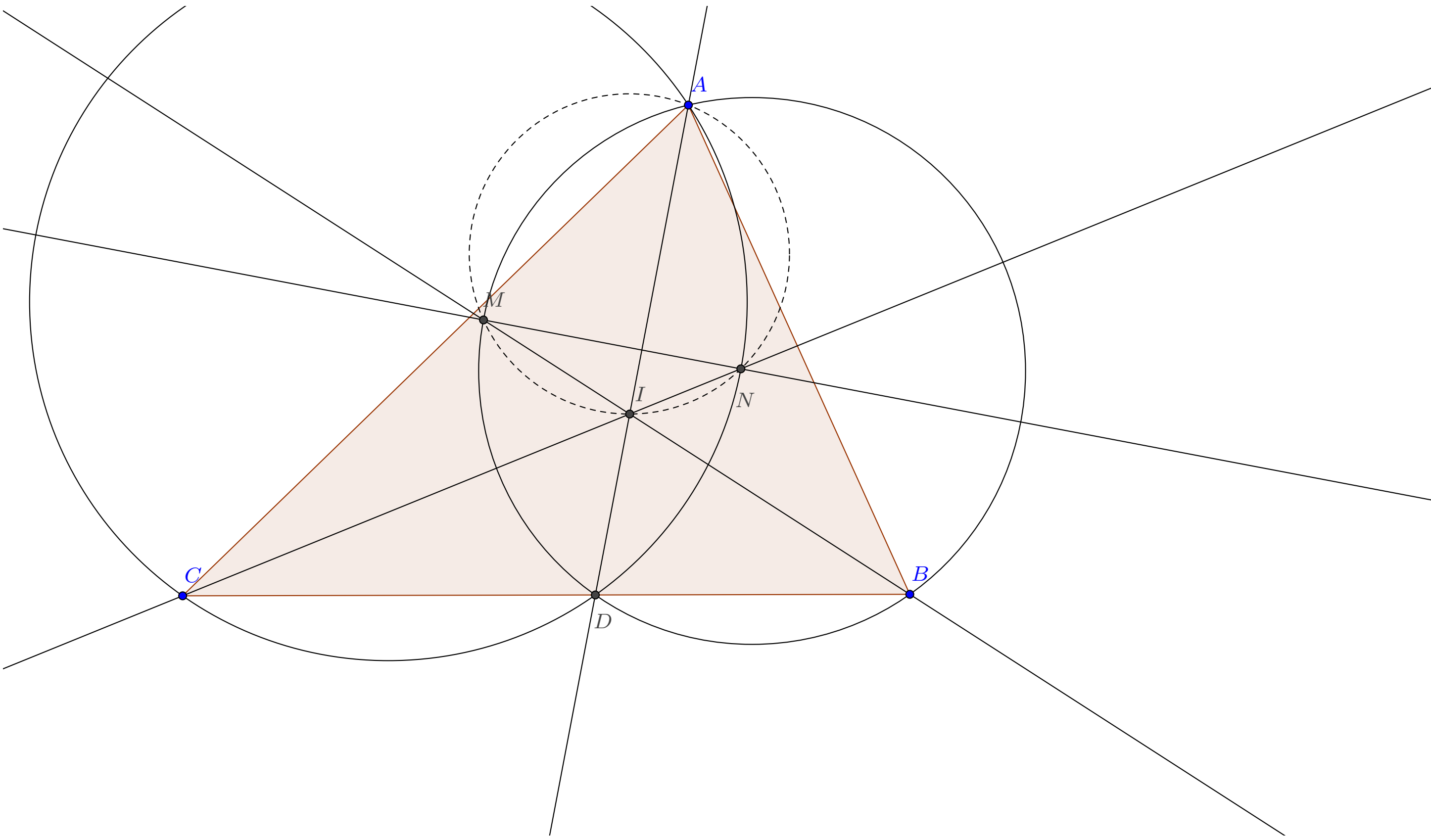
Exercice 1
(BXMO 2011) Soit ABC un triangle dont I est le centre du cercle inscrit. Les bissectrices $(AI), (BI), (CI)$ coupent les côtés opposés en D, E, F respectivement. La médiatrice de $[AD]$ coupe (BI) et (CI) en M, N respectivement. Montrer que A, I, M, N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 1
Des bissectrices et des médiatrices s'intersectent, c'est donc qu'il y a des pôles sud cachés. M

est le pôle sud de B dans le triangle BAD donc $BAMD$ est cyclique, de même $CAND$ est cyclique. Il vient

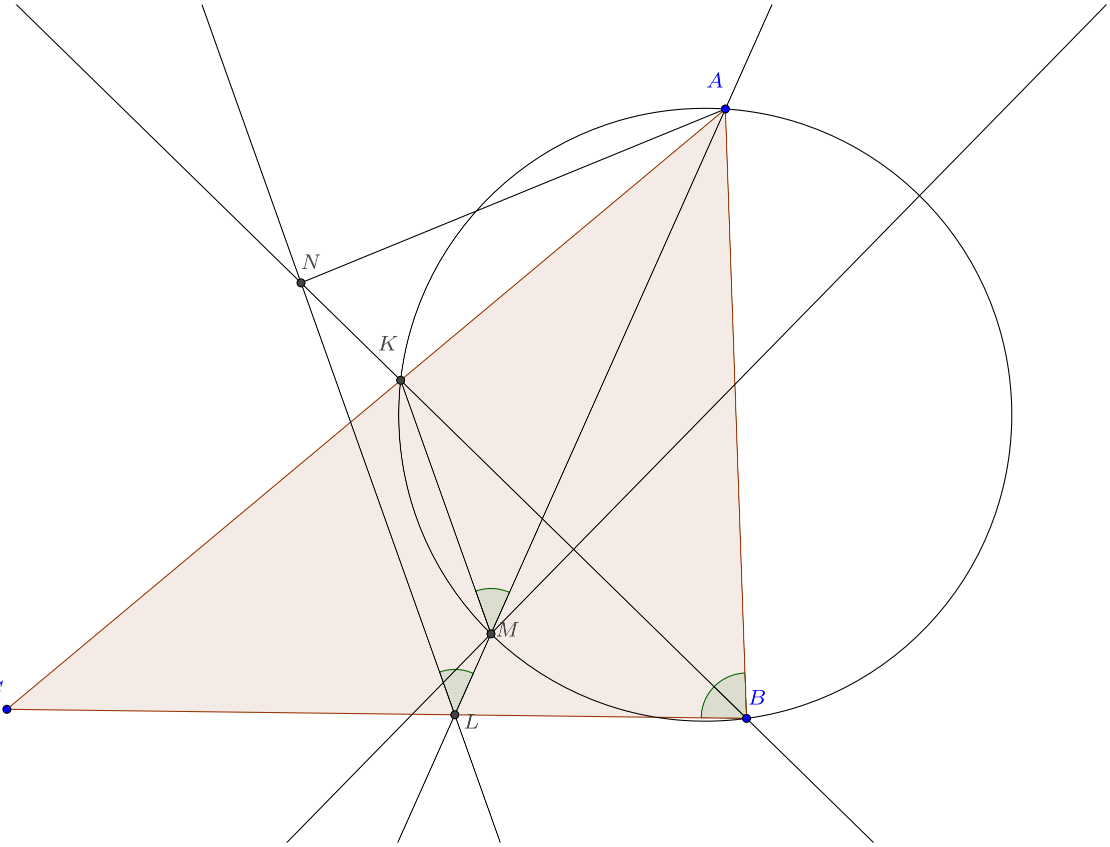
$$\widehat{MAN} = \widehat{MAD} + \widehat{DAN} = \widehat{MBD} + \widehat{NCD} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 180 - \widehat{BIC} = 180 - \widehat{MIN}$$

d'où le résultat.



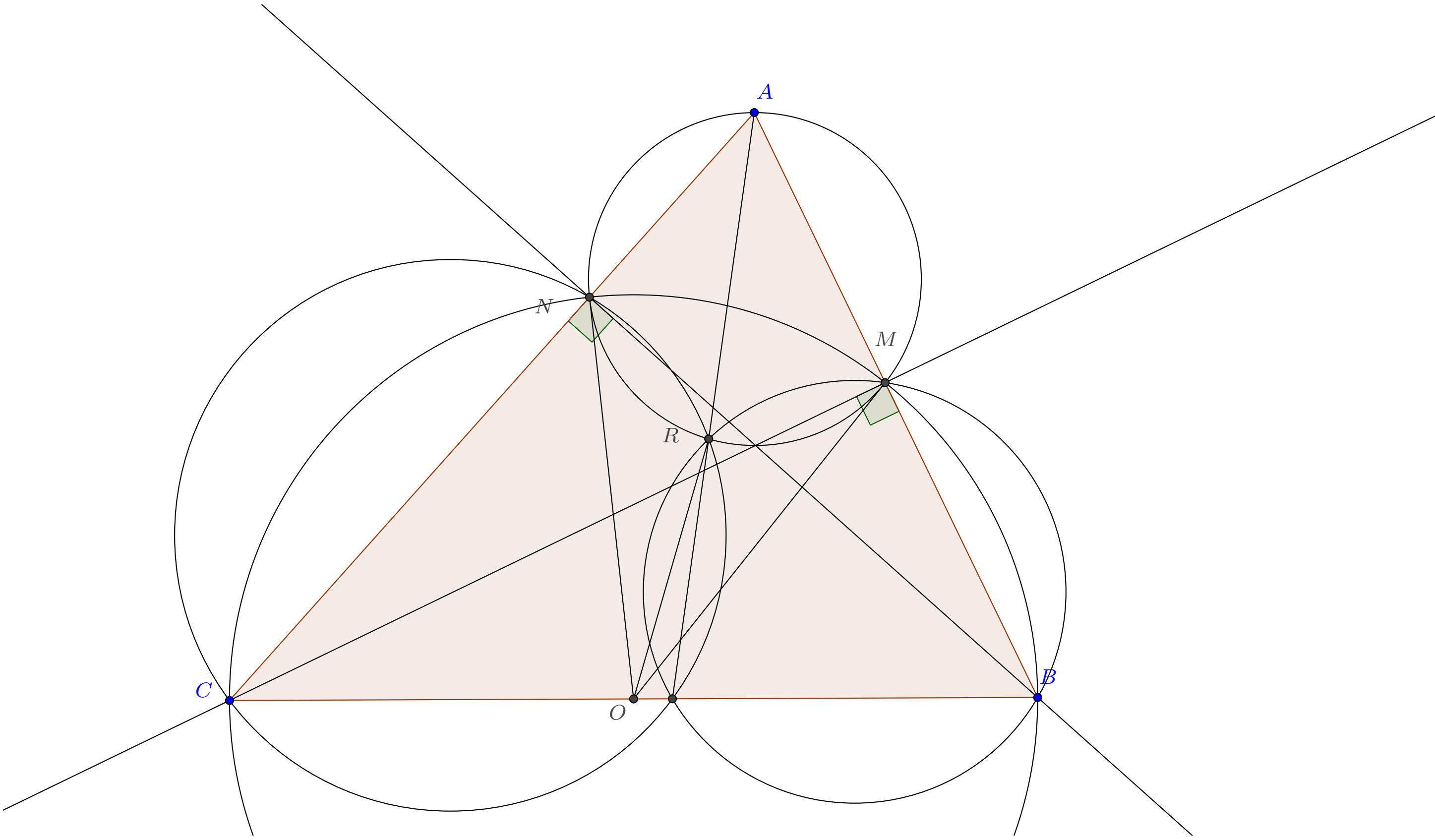
Exercice 2
(JBMO 2010) Soient (AL) et (BK) les bissectrices du triangle ABC non isocèle, avec L sur $[BC]$ et K sur $[AC]$. La médiatrice de $[BK]$ coupe (AL) en M. N est sur (BK) de telle sorte que (LN) et (MK) sont parallèles. Montrer que $LN = NA$.

Solution de l'exercice 2
Des bissectrices et des médiatrices qui s'intersectent, c'est donc qu'il y a des pôles sud cachés. M est le pôle sud de A dans le triangle KBA par hypothèse donc $MKAB$ est cyclique. $\widehat{NLA} = \widehat{KMA} = \widehat{KBA} = \widehat{NBA}$ donc $NLBA$ est cyclique et N est le pôle sud de B dans LBA car intersection d'une bisscetrice et du cercle circonscrit. Donc $NL = LA$.



Exercice 3
(P1 IMO 2004) Soit ABC un triangle acutangle non isocèle en A. Le cercle de diamètre $[BC]$ coupe $[AB]$ et $[AC]$ en M et N respectivement. Soit O le milieu de $[BC]$. Les bissectrices de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MON}$ se coupent en R. Montrer que les cercles circonscrits de BMR et CNR se coupent sur $[BC]$.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>
MON est isocèle en O, donc la bissectrice de $\widehat{MON}$ est la médiatrice de $[MN]$, donc R est le pôle sud de A dans MAN. Donc $RMNA$ est cyclique. Si X est l'intersection du cercle CNR et de $[BC]$, on a $180 - \widehat{RXB} = \widehat{RXC} = \widehat{RNA} = \widehat{RMC}$ donc X est sur le cercle BMR d'où le résultat. (La dernière étape du raisonnement est connue comme le premier théorème de Miquel).



Axes radicaux

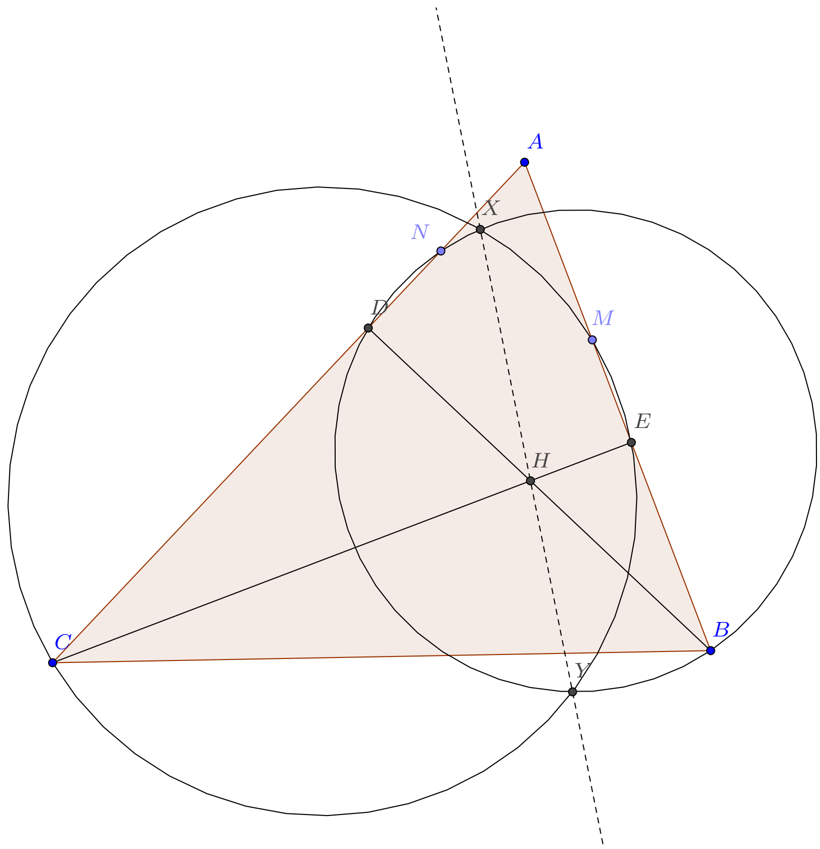
Exercice 4
(IMO 1995 P1) Soient A, B, C et D quatre points distincts alignés dans cet ordre. Soient Γ_1 et Γ_2 les cercles de diamètre respectifs $[AC]$ et $[BD]$, qui s'intersectent en X et Y. On considère O un point arbitraire sur (XY) qui ne soit pas sur la droite (AB). (CO) recoupe Γ_1 en M, (BO) recoupe Γ_2 en N. Montrer que $(AM), (DN)$ et (XY) sont concourantes.

Solution de l'exercice 4
O figure sur l'axe radical des cercles Γ_1 et Γ_2 qui est (XY), il vient donc que $OM \cdot OC = ON \cdot OB$ donc les points M, C, N et B sont cocycliques.

On a alors
$$\widehat{AMN} = \widehat{AMC} + \widehat{CMN} = 90 + \widehat{CBM} = 180 - \widehat{ADN}$$
donc les points A, M, N et D sont cocycliques et on note ω ce cerlce. Comme (AM) est l'axe radical de ω et Γ_1, (DN) est l'axe radical de ω et Γ_2 et (XY) l'axe radical de Γ_1 et Γ_2, ces trois droites sont concourantes.

Exercice 5
Soit ABC un triangle, H le point d'intersection des hauteurs issues des sommets du triangle. Soit M un point quelconque sur $[AB]$ et N un point quelconque sur $[AC]$. Soient Γ_1 et Γ_2 les cercles de diamètre respectifs $[CM]$ et $[BN]$. Les cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en X et Y. Montrer que X, H et Y sont alignés.

Solution de l'exercice 5
Il suffit de montrer que H est sur l'axe radical des cercles Γ_1 et Γ_2. Soit D le pied de la hauteur issue de B et E le pied de la hauteur issue de C. D appartient au cercle de diamètre $[NB]$ et E appartient au cercle de diamètre $[CM]$. On déduit que la puissance de H par rapport à Γ_2 est $HD \cdot HB$ et la puissance de H par rapport à Γ_1 est $HE \cdot HC$. Comme les points D, E, C et B sont cocycliques, $HD \cdot HB = HC \cdot HE$ donc H a même puissance par rapport aux deux points.



6 TD d'algèbre (Victor Vermès)

L'objectif de ce TD était de retravailler sur les polynômes, et de traiter les exercices du cours précédent de Savinien qui n'avaient pas été traités lors de sa scéance.

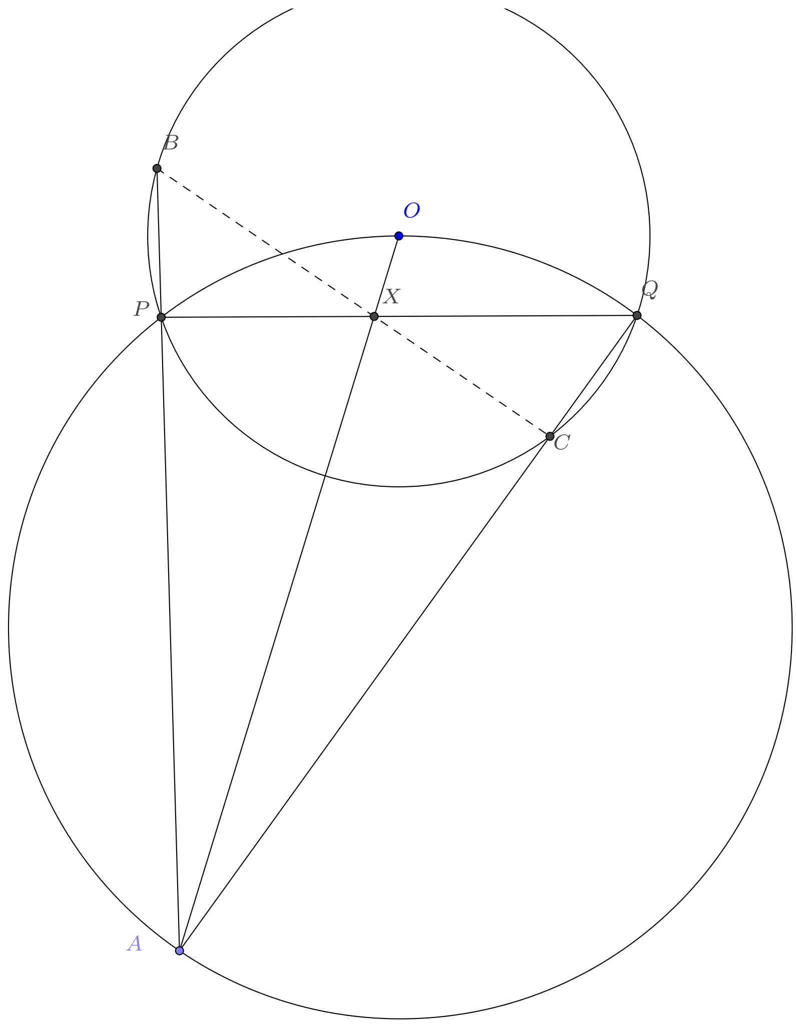
4 Entraînement de fin de parcours

Exercice 1

Soit ABC un triangle, Γ_1 un cercle passant par B et C et dont le centre O se trouve sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Soit Γ_2 un cercle passant par O et A qui coupe Γ_1 en P et Q. Soit X le point d'intersection des droites (PQ) et (AO). Montrer que X appartient à $[BC]$.

Solution de l'exercice 1

O figure sur la médiatrice de $[BC]$ car il est le centre de Γ_1 et O est sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$ donc O est le pôle sud de A dans le triangle ABC. Il vient que les points O, B, A et C sont cocycliques. La droite (OA) est l'axe radical du cercle Γ_2 et du cercle circonscrit à ABC, la droite (PQ) est l'axe radical de Γ_1 et de Γ_2 et la droite (BC) est l'axe radical de Γ_1 et du cercle circonscrit au triangle ABC. Ces trois axes radicaux sont concourants et comme (PQ) et (OA) se coupent en X, X est le point de concours des trois axes donc X appartient à la droite (BC).



Exercice 2

Déterminer tous les entiers positifs n tels qu'il existe un polynôme P de degré n à coefficients entiers et n entiers deux à deux distincts $k_1, k_2, \dots, k_n$ satisfaisant $P(k_i) = n$ pour tout entier $1 \leqslant i \leqslant n$ et $P(0) = 0$.

Solution de l'exercice 2
Soit $Q(X) = P(X) - n$. Puisque pour tout indice i compris entre 1 et n, $Q(k_i) = P(k_i) - n = n - n = 0$ donc Q a n racine et est de degré n. Ainsi il existe c tel que

$$Q(X) = (X - k_1)(X - k_2) \cdots (X - k_n)$$

avec c entier car P est à coefficients entiers. Or d'une part $Q(0) = P(0) - n = -n$ et d'autre part $Q(0) = c(-k_1) \cdot (-k_2) \cdots (-k_n)$ Comme les k_i sont deux à deux distincts et non nuls, au plus deux des k_i sont de valeur absolue égale à 1, donc au moins $n-2$ des k_i sont de valeur absolue supérieure ou égale à 2. Ainsi $\mid c(-k_1) \cdot (-k_2) \cdots (-k_n) \mid \geqslant 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdots 2 = 2^{n-2}$. Ainsi $n \geqslant 2^n - 2$.

Montrons par récurrence que si $m \geqslant 5$ est un entier, $2^{m-2} >$. Si $m = 5$, on a bien $5 < 2^3 = 8$. On suppose que $2^{m-2} > m$ et on souhaite montrer que $2^{m+1-2} > m + 1$. Or $2^{m-1} = 2 \cdot 2^{m-2} > 2m > m + 1$ en utilisant l'hypothèse de récurence. Ceci achève la récurrence.

De cette discussion on déduit que $n \leqslant 4$. Or si $n = 1$, le polynôme X satisfait la condition (avec $k_1 = 1$). Si $n = 2$, le polynôme $(X-1)(X-2) - 2$ satisfait la condition (avec $k_1 = 1$ et $k_2 = 2$). Si $n = 3$, le polynôme $(X-1)(X+1)(X-3) - 3$ satisfait la condition (avec $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 3$). Enfin, si $n = 4$, le polynôme $(X-1)(X+1)(X+2)(X-2) - 4$ satisfait la condition (avec $k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = -2, k_4 = 2$).

Les solutions sont donc les entiers $1, 2, 3$ et 4.

Exercice 3

Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}$. Montrer que

$$\frac{1 - a^2 + c^2}{c(a + 2b)} + \frac{1 - b^2 + a^2}{a(b + 2c)} + \frac{1 - c^2 + b^2}{b(c + 2a)} \geqslant 6$$

Solution de l'exercice 3
On note que $1 - a^2 + c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - a^2 + c^2 = a^2 + 2b^2 + 3c^2$ en utilisant l'hypothèse. D'autre part, d'après l'inégalité des moyennes, on a $ac \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + c^2)$ et $2bc \leqslant b^2 + c^2$, donc

$$c(a + 2b) = ac + 2bc \leqslant \frac{1}{2}(a^2 + c^2) + b^2 + c^2 = \frac{1}{2}\big(a^2 + 2b^2 + 3c^2\big)$$

On en déduit que

$$\frac{1 - a^2 + c^2}{c(a + 2b)} \geqslant \frac{a^2 + 2b^2 + 3c^2}{\frac{1}{2}(a^2 + 2b^2 + 3c^2)} = 2$$

De même on trouve $\frac{1-b^2+a^2}{a(b+2c)} \geqslant 2$ et $\frac{1-c^2+b^2}{b(c+2a)} \geqslant 2$. En sommant les trois termes on trouve

$$\frac{1 - a^2 + c^2}{c(a + 2b)} + \frac{1 - b^2 + a^2}{a(b + 2c)} + \frac{1 - c^2 + b^2}{b(c + 2a)} \geqslant 2 + 2 + 2 = 6$$

Exercice 4

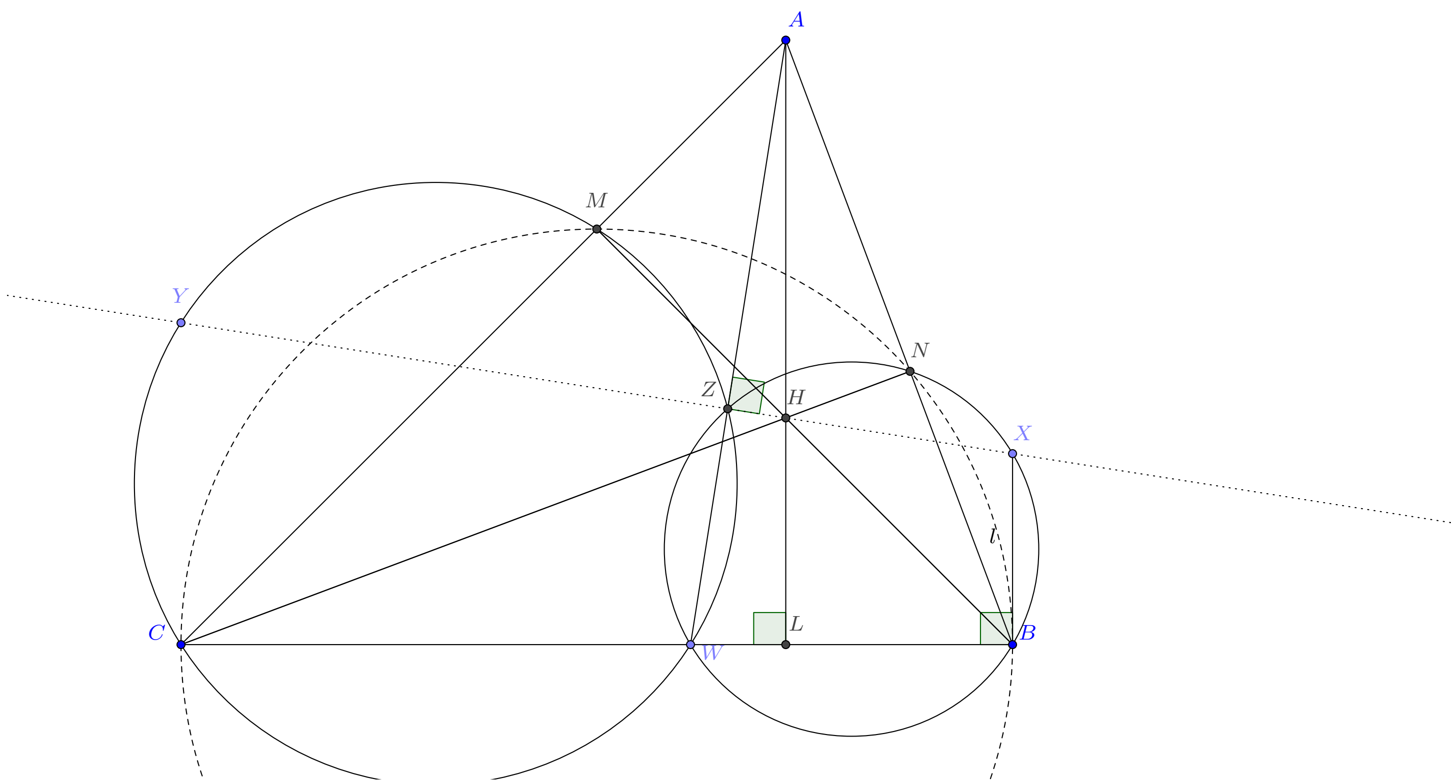
Soit ABC un triangle dont tous les angles sont strictement inférieurs à 90 dégrés. Soit W un point sur $[BC]$. Soient M et N les pieds des hauteurs respectivement issues de B et C et soit H l'intersection de (BM) et (CN). Soit ω_1 le cercle circonscrit de BWN et X le point sur ω_1 diamétralement opposé à W. De même ω_2 est le cercle circonscrit à CWM et Y sur ω_2 diamétralement opposé à W. Montrer que X, Y, H sont alignés.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

Soit L le pied de la hauteur issue de A et Z le point d'intersection des cercles ω_1 et ω_2 autre que W. Puisque $\widehat{BNC} = \widehat{BMC} = 90$, le quadrialtère $NBCM$ est cyclique. On en déduit que $AM \cdot AC = AN \cdot AB$ par puissance d'un point. Cela traduit que A possède la même puissance par rapport à ω_1 et ω_2. Donc A est sur l'axe radical de ω_1 et ω_2. Cet axe radical est (ZW) donc les points A, Z et W sont alignés. On déduit que $\widehat{AZX} = 180 - \widehat{WZX} = 90$.

Puisque $\widehat{HNB} = 180 - \widehat{HLB} = 90$, le quadrilatère $HNBL$ est cyclique. Ainsi $AN \cdot AB = AH \cdot AL$ par puissance du point A par rapport au cercle $(HNBL)$. De plus par puissance du point A par rapport à ω_1, on a $AN \cdot AB = AZ \cdot AW$. Donc $AH \cdot AL = AZ \cdot AW$ donc les points Z, H, L et W sont cocycliques. Donc $\widehat{AZH} = 180 - \widehat{WZH} = 180 - (180 - \widehat{WLH}) = \widehat{WLH} = 90$.

On a donc $\widehat{AZX} = 90 = \widehat{AZH}$ donc les points Z, H et X sont alignés. On montre de même en résonnant dans ω_2 que les points Z, H et Y sont alignés. En combinant, les points X, H et Y sont alignés.



5 Derniers cours

1 Dénombrabilité (Victor Vermès)

Le cours proposé est le même que celui fait par Matthieu Lequesne au stage de Montpellier 2014 (page 432) : http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/stage_ete_2014.pdf

2 Méthode probabiliste (Théo Lenoir)

Ce cours sera disponible sur dans le polycopié à partir du 10 septembre 2019.

VI. Groupe D

Contenu de cette partie

1 Première partie : Arithmétique et géométrie

1 TD d'arithmétique (Vincent Jugé)

Quelques notions de cours

Commençons par un premier résultat, simple mais très puissant dès lors que l'on étudie des polynômes à coefficients entiers.

Théorème 1.
Soit a et b deux entiers, et soit P un polynôme à coefficients entiers. L'entier $P(b) - P(a)$ est divisible par $b - a$.

Démonstration. Il suffit de considérer P comme un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Z}/\Delta\mathbb{Z}$, où l'on a posé $\Delta = b - a$. Plus précisément, écrivons P sous la forme $P(X) = \sum_{k=0}^{d} p_k X^k$. Puisque $b \equiv a \pmod{\Delta}$, on a également $b^k \equiv a^k \pmod{\Delta}$ pour tout $k \geqslant 0$, de sorte que

$$P(b) \equiv \sum_{k=0}^{d} p_k b^k \equiv \sum_{k=0}^{d} p_k a^k \equiv P(a^k) \pmod{\Delta}.$$

□

Ce premier résultat, et surtout sa preuve (certes elliptique) en une seule ligne, suggère que se placer dans la structure algébrique adaptée est souvent un outil efficace. C'est pourquoi on en vient assez vite à introduire la notion suivante.

Définition 2 (Corps commutatif)**.**
Soit $\mathbb{K}$ un ensemble muni d'une loi addition (notée $+$) et d'une loi de multiplication (notée $\times$), toutes deux commutatives. On dit qu'un élément x de $\mathbf{K}$ est *inversible* s'il existe un élément y de $\mathbb{K}$ tel que $x \times y = 1$, et on dit que $\mathbb{K}$ est un *corps* si tout élément non nul est inversible.

Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont des corps, alors que l'ensemble $\mathbb{Z}$ n'en est pas un, puisque 2 n'y admet pas d'inverse. D'autre part, pour tout nombre premier p, l'ensemble $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est lui aussi un corps, ce qui est évidemment très pratique dès lors que l'on fait de l'arithmétique.

C'est également le cas de l'ensemble $\mathbb{K}(X)$ des *fractions rationnelles* (c'est-à-dire les fractions de deux polynômes) à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$, ou encore de l'ensemble $\mathbb{K}(\!(X)\!)$ des *séries de Laurent formelles* (c'est-à-dire des sommes, éventuellement infinies, de la forme $\sum_{k \geqslant n} a_k X^k$ pour un certain entier relatif n) et dont les coefficients a_k appartiennent à un corps $\mathbb{K}$. On peut même montrer que l'ensemble des racines (réelles ou complexes, au choix) de polynômes à coefficients entiers forme lui aussi un corps.

De nombreux résultats découlent de la structure de corps de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, tels que le *lemme de Hensel*.

Théorème 3 (Lemme de Hensel)**.**
Soit p un nombre premier, α un entier et Q un polynôme à coefficients entiers. Si p divise $Q(\alpha)$ mais pas $Q'(\alpha)$, alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un entier β tel que $\alpha \equiv \beta \pmod{p}$ et tel que p^n divise $Q(\beta)$; l'entier β est défini de manière unique modulo p^n.

Démonstration. Le résultat étant immédiat pour $n = 1$, on procède par récurrence sur n. Supposons que $n \geqslant 1$, et qu'il existe un entier β tel que $\alpha \equiv \beta \pmod{p}$ et que p^n divise $Q(\beta)$, cet entier β étant défini de manière unique modulo p^n. Il nous suffit de démontrer que, lorsque l'entier ℓ décrit l'ensemble $\{0, 1, \ldots, p-1\}$, il ne prendra qu'une seule valeur telle que $Q(\beta + \ell p^n) \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$.

Soit λ l'entier tel que $Q(\beta) = \lambda p^n$, et intéressons nous à l'entier $Q(\beta + \ell p^n)$. On remarque ici que $p^{2n} \equiv 0 \pmod{p^{n+1}}$, de sorte que

$$(\beta + \ell p^n)^k \equiv \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \beta^{k-i} \ell^i p^{ni} \equiv \beta^k + k\beta^{k-1}\ell p^n \pmod{p^{n+1}}$$

pour tout $k \geqslant 0$. Par conséquent, si l'on pose $Q(X) = \sum_{k=0}^{d} q_k X^k$, on trouve

$$Q(\beta+\ell p^n) \equiv \sum_{k=0}^{d} q_k (\beta+\ell p^n)^k \equiv \sum_{k=0}^{d} q_k (\beta^k + k\beta^{k-1}\ell p^n) \equiv Q(\beta) + \ell p^n Q'(\beta) \equiv p^n(\lambda + \ell Q'(\beta)) \pmod{p^{n+1}}.$$

Or, comme $\beta \equiv \alpha \pmod{p}$, on sait que $Q'(\beta) \equiv Q'(\alpha) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Ainsi, p^{n+1} divise $Q(\beta + \ell p^n)$ si et seulement si $\ell \equiv \lambda / Q'(\beta) \pmod{p}$. □

Une autre conséquence de la notion de corps est que de nombreux résultats sur les polynômes à coefficients réels, s'ils ont été obtenus de manière algorithmique, peuvent être généralisés aux polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Cela dit, puisque tout élément non nul de $\mathbb{K}$ est inversible, multiplier un polynôme par un tel élément ne changera aucune relation de divisibilité. On s'intéressera donc en particulier aux polynômes *unitaires*.

Définition 4 (Polynôme unitaire)**.**
On dit qu'un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ est *unitaire* si son coefficient de degré maximal vaut 1.

Théorème 5 (Théorème de Bézout)**.**
Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. Il existe un polynôme unitaire $D \in \mathbb{K}[X]$ qui est leur *plus grand* diviseur commun : un polynôme $R \in \mathbb{K}[X]$ divise P et Q si et seulement si R divise D. De plus, il existe deux polynômes $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $D = AP + BQ$, et D est l'unique polynôme unitaire de dégré minimal que l'on puisse écrire sous cette forme. D'autre part, si $\mathbb{L}$ est un autre corps contenant $\mathbb{K}$, alors D est également le plus grand diviseur commun de P et Q dans $\mathbb{L}[X]$.

Démonstration. Le polynôme D peut en fait être obtenu en appliquant l'algorithme de division euclidienne aux polynômes P et Q. Sur les entiers, cet algorithme a pour propriété de faire décroître strictement les entiers considérés ; sur les polynômes (que l'on peut choisir unitaires), il fait décroître strictement le degré des polynômes considérés. □

Théorème 6 (Polynôme irréductible, théorème de Gauss et de factorisation)**.**
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme unitaire. On dit que P est *irréductible* sur $\mathbb{K}$ si on ne peut écrire P comme le produit de deux polynômes non constants de $\mathbb{K}[X]$. Dans ce cas, si P divise un produit AB de deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors P divise nécessairement A ou B. Enfin, tout polynôme unitaire de $\mathbb{K}[X]$ peut s'écrire de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. Il suffit de reprendre la démonstration usuelle du théorème de Gauss et de factorisation sur les entiers. □

On en déduit en particulier un moyen de majorer le nombre de racines d'un polynôme modulo p.

Théorème 7 (Racines modulo p et degré)**.**
Soit p un nombre premier et $Q \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ un polynôme de degré $d \geqslant 0$. Alors Q a au plus d racines (comptées avec leur multiplicité) dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Démonstration. Il suffit de procéder par récurrence sur d, en divisant Q par $X - r$ à chaque fois que l'on repère une racine r. □

Notons enfin que l'on peut identifier les polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ à des polynômes de $\mathbb{Q}[X]$ spécifiques, car ils peuvent ensuite être assimilés à des polynômes de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. Cela nous pousse à nous intéresser à la relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}[X]$, alors même que $\mathbb{Z}$ n'est *pas* un corps, et donc que l'on ne peut plus exiger des polynômes qu'ils soient unitaires. On peut néanmoins s'intéresser à leur *contenu*, qui forme un substitut tout à fait raisonnable.

Définition 8 (Contenu d'un polynôme)**.**
Soit P un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$. Il existe un entier n et un polynôme $Q \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P = Q/n$. Soit également d le plus grand diviseur commun aux coefficients de Q. Alors d/n est appelé le *contenu* du polynôme P, et on le note $c(P)$.

On constate aisément que la définition du contenu de P ne dépend pas de l'entier n choisi, de sorte que cette définition est bien cohérente. Le contenu des polynômes jouit en fait de la propriété remarquable suivante.

Théorème 9 (Multiplicativité des contenus)**.**
Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{Q}[X]$. Alors $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

Démonstration. Posons $\overline{P} = P/c(P)$ et $\overline{Q} = Q/c(Q)$. Alors $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ sont deux polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ de contenu $c(\overline{P}) = c(\overline{Q}) = 1$. En outre, on a $\overline{P}\,\overline{Q} = PQ/c(P)c(Q)$, de sorte que $c(\overline{P}\,\overline{Q}) = c(PQ)/c(P)c(Q)$, et il s'agit donc de montrer que $c(\overline{P}\,\overline{Q}) = 1$.

Tout d'abord, puisque $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ sont dans $\mathbb{Z}[X]$, c'est aussi le cas de $\overline{P}\,\overline{Q}$, ce qui montre que $c(\overline{P}\,\overline{Q})$ est un entier. D'autre part, soit p un nombre premier. Les polynômes $\overline{P}$ et $\overline{Q}$ sont non nuls modulo p, puisque leur contenu n'est pas divisible par p. Leur produit est donc également non nul modulo p, donc p ne divise pas $c(\overline{P}\,\overline{Q})$. Ceci étant vrai pour tout nombre premier p, on en déduit bien que $c(\overline{P}\,\overline{Q}) = 1$. □

À partir de cette propriété, on peut maintenant énoncer le critère de d'irréductibilité suivant.

Théorème 10 (Irréductibilité dans $\mathbb{Z}[X]$)**.**
Soit P un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$. Si l'on ne peut pas écrire P sous la forme $P = AB$, avec A et B deux polynômes non constants de $\mathbb{Z}[X]$, alors P est (à un facteur multiplicatif près) un polynôme irréductible de $\mathbb{Q}[X]$.

Démonstration. Supposons donc qu'il existe deux polynômes non constants $C, D \in \mathbb{D}[X]$ tels que $CD = P$, et posons $A = C/c(C)$ et $B = D \times c(C)$. Alors $AB = P$ et $c(A) = 1$, de sorte que $c(B) = c(P)/c(A) = c(P)$ soit un entier. Mais alors A et B sont deux polynômes non constants de $\mathbb{Z}[X]$. $\square$

Théorème 11 (Factorisation dans $\mathbb{Z}[X]$)**.**
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme. On dit que P est *irréductible* sur $\mathbb{Z}$ si P est un polynôme constant égal à un nombre premier, ou bien si $c(P) = 1$ et P est égal, à un facteur multiplicatif près, à un polynôme irréductible de $\mathbb{Z}[X]$. Dans ce cas, si P divise un produit AB de deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, alors P divise nécessairement A ou B. Enfin, tout polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ peut s'écrire de manière unique (à l'ordre des facteurs près) comme produit de polynômes irréductibles sur $\mathbb{Z}$.

De tous ces résultats, on peut déduire une myriade de nouveaux objets et propriétés : le critère d'Eisenstein, l'existence de polynômes minimaux sur $\mathbb{K}[X]$, ou encore les polynômes cyclotomiques, ... Nous mentionnons ici des trois exemples.

Théorème 12 (Critère d'Eisenstein)**.**
Soit $P(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} p_k X^k$ un polynôme à coefficients entiers, et de contenu $c(P) = 1$. On suppose qu'il existe un nombre premier q tel que q divise $p_0, \ldots, p_{d-1}$ mais pas p_d, et que q^2 ne divise pas p_0. Alors P est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Démonstration. Supposons que P ne soit pas irréductible sur $\mathbb{Z}$. Puisque $c(P) = 1$, il existe deux polynômes non constants $A, B \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $AB = P$. Réduisons tous ces polynômes modulo q (on note $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{P}$ les polynômes correspondants). Puisque $\overline{A}\,\overline{B} \equiv \overline{P} \equiv p_d X^d \pmod q$, et par unicité de la décomposition des polynômes de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}[X]$ en polynômes irréductibles, il existe un entier k et un élément α de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ tels que $\overline{A} \equiv \alpha X^k \pmod q$ et $\overline{B} \equiv p_d/\alpha X^{d-k} \pmod q$.

En particulier, les polynômes A et B sont en fait de degrés respectifs k et $d - k$. Puisque ces polynômes sont non constants, les coefficients de degré 0 de A et B sont donc tous deux divisibles par q, de sorte que q^2 divise p_0. $\square$

Théorème 13 (Polynôme minimal)**.**
Soit $\mathbb{K}$ et $\mathbb{L}$ deux corps, tels que $\mathbb{L} \subseteq \mathbb{K}$. Soit également r un élément de $\mathbb{L}$. Alors il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que, pour tout $Q \in \mathbb{K}[X]$, $Q(r) = 0$ si et seulement si P divise Q (dans $\mathbb{K}$). En outre, le polynôme P est soit nul, soit irréductible sur $\mathbb{K}$. On dit alors que P est le *polynôme minimal* de r sur $\mathbb{K}$.

Démonstration. Il suffit de constater que, si P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$ dont r est une racine, alors, en vertu de la relation de Bézout, leur plus grand diviseur commun annule également r. Le polynôme minimal de r est donc le plus grand diviseur commun de l'ensemble de tous les polynômes de $\mathbb{K}[X]$, que l'on notera D.

Enfin, si D est non nul et peut être factorisé comme un produit $D = A\,B$ de polynômes non constants, alors r est nécessairement racine de A ou de B, alors même que D ne divise ni l'un ni l'autre, au vu de son degré. $\square$

Théorème 14 (Polynômes cyclotomiques)**.**
Soit n un entier et ω_n le nombre complexe défini par $\omega_n = \exp(2\imath\pi/n)$. On note Ω_n l'ensemble des racines primitives $n^{\text{èmes}}$ de l'unité dans $\mathbb{C}$, c'est-à-dire des nombres complexes d'ordre n. Alors Ω_n est égal à l'ensemble $\{\omega_n^k \colon 0 \leqslant k \leqslant n-1 \text{ et } \mathrm{PGCD}(k,n) = 1\}$. En outre, le polynôme $\phi_n(X) = \prod_{z \in \Omega_n} (X - z)$ est un polynôme à coefficients entiers, et il est irréductible sur $\mathbb{Z}$.

Enfin, pour tout nombre premier p premier avec n, si q est une racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, alors $\phi_n(q) \equiv 0 \pmod p$.

Démonstration. Le fait que Ω_n soit égal à l'ensemble $\{\omega_n^k \colon 0 \leqslant k \leqslant n-1 \text{ et } \mathrm{PGCD}(k,n) = 1\}$ est immédiat. On montre en suite par récurrence sur n que ϕ_n appartient bien à $\mathbb{Q}[X]$ et que $c(\phi_n) = 1$, en s'appuyant sur l'identité

$$X^n - 1 = \prod_{d \mid n} \phi_d(X).$$

Puis, si q est une racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on sait que q n'est racine d'aucun polynôme ϕ_d pour $d \leqslant n-1$. Puisque q est racine de $X^n - 1$, c'est donc que $\phi_n(q) \equiv 0 \pmod p$. Enfin, nous laissons au lecteur intrépide le plaisir de découvrir sur Wikipédia une preuve de l'irréductibilité de ϕ_n sur $\mathbb{Z}$. $\square$

Théorème 15 (Élément générateur)**.**
Soit $\mathbb{K}$ un corps fini, de cardinal k. Alors il existe un élément d'ordre $k-1$, et dont tous les autres éléments inversibles sont donc des puissances.

Démonstration. Si x est un élément inversible donné, la fonction $y \mapsto xy$ est une bijection de l'ensemble des éléments inversibles dans lui-même. On en déduit une variante du petit théorème de Fermat, puisque

$$x^{k-1} \prod_{y \neq 0} y = \prod_{y \neq 0} (xy) = \prod_{y \neq 0} y,$$

et donc que $x^{k-1} = 1$. Le polynôme $X^{k-1} - 1 = \prod_{d \mid k-1} \phi_d(X)$ a donc au moins $k-1$ racines distinctes, de sorte que chaque polynôme ϕ_d tel que d divise $k-1$ a exactement $\varphi(d)$ racines qui lui sont propres. En particulier, les $\varphi(k-1)$ racines de ϕ_{k-1} sont des racines de $X^{k-1} - 1$ mais d'aucun polynôme ϕ_d, donc d'aucun polynôme $X^d - 1$, et leur ordre vaut donc $k-1$. $\square$

Exercices

Exercice 1
Démontrer que le polynôme $X^2 - 2$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2
Soit P un polynôme à coefficients entiers, et a, b, c, d quatre entiers distincts tels que $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$. Démontrer que $P(n)$ n'a aucune racine dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3
Alice pense à un polynôme P dont les coefficients sont des entiers *naturels* ; Bob a pour objectif de trouver $P(X)$. Voici ce qu'il peut faire : Bob doit choisir un entier a qu'il révèle à Alice, et en échange elle lui donne la valeur de $P(a)$. Puis Bob choisit un entier b qu'il révèle à Alice, et en échange elle lui donne la valeur de $P(b)$. Bob a alors gagné s'il est capable d'identifier $P(X)$: a-t-il une stratégie gagnante ?

Recommencer ensuite le problème en supposant seulement que les coefficients de P sont des entiers *relatifs*.

Exercice 4
Soit P un polynôme non constant à coefficients entiers. Déontrer qu'il existe un entier n tel que $P(n^2 + 2019)$ n'est pas un nombre premier.

Exercice 5
Est-il possible de construire 2019 dés à 20 faces (numérotées de 1 à 20), éventuellement biaisés, de sorte que, si on les lance tous et que l'on fait la somme des faces visibles, on ait la même probabilité d'obtenir chacun des entiers entre 2019 et 2019×20 ?

Exercice 6
Montrer qu'il existe une infinité d'entiers $a \geqslant 1$ tels que, pour tout entier $n \geqslant 1$, an n'admet pas *exactement* n diviseurs.

Exercice 7
Soit P et Q deux polynômes à coefficients entiers, de PGCD égal à 1. On suppose que, pour tout entier $n \geqslant 0$, les entiers $P(n)$ et $Q(n)$ sont positifs ou nuls, et que $2^{P(n)} - 1$ divise $3^{Q(n)} - 1$. Démontrer que P est un polynôme constant.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
Puisque $X^2 - 2 = (X - \sqrt{2})(X + \sqrt{2})$, il n'est pas irréductible sur $\mathbb{R}$. D'autre part, s'il était réductible sur $\mathbb{Q}$, alors il le serait aussi sur $\mathbb{Z}$. On pourrait l'écrire sous la forme $X^2 - 2 = AB$, avec A et B non constants, donc de degré 1. Mais alors $X - \sqrt{2}$ diviserait le produit AB, donc diviserait l'un des facteurs (disons A), de sorte que l'on aurait en fait $A = X - \sqrt{2}$: c'est impossible, puisque $1 < \sqrt{2} < 2$, et donc que $\sqrt{2}$ n'est pas entier.

Solution de l'exercice 2
Posons $Q(X) = P(X) - 5$. Alors a, b, c, d sont quatre racines distinctes de $Q(X)$. En particulier, $Q(X)$ est divisible par les quatre polynômes (premiers entre eux) $X - a, X - b, X - c, X - d$, de sorte que l'on peut écrire $Q(X) = (X - a)(X - b)(X - c)(X - d)R(X)$ avec $R(X) \in \mathbb{Z}[X]$.

Si n est un entier tel que $P(n) = 0$, alors $-5 = Q(n) = (n-a)(n-b)(n-c)(n-d)R(n)$. En particulier, $n-a, n-b, n-c, n-d$ sont donc les quatre diviseurs distincts de -5, de sorte que $-5 = Q(n) = 25R(n)$, ce qui n'est pas possible.

Solution de l'exercice 3

Bob peut gagner en choisissant d'abord l'entier $a = 1$, puis l'entier $b = P(a)+1$. En effet, si on écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{d} p_k X^k$, alors $\sum_{k=0}^{d} p_k = P(a)$. Alors $b > p_k$ quelque soit le coefficient p_k considéré, de sorte que $P(b) = \sum_{k=0}^{d} p_k b^d$ s'écrit $\overline{p_d p_{d-1} \ldots p_0}^b$ en base b : Bob peut donc identifier le polynôme $P(X)$.

Cependant, si on sait simplement que $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$, alors Bob n'a pas de stratégie gagnante. En effet, à la fin du jeu, Bob connaîtra simplement deux paires $(a, P(a))$ et $(b, P(b))$. Il sera donc incapable de distinguer les polynômes $P(X)$ et $P(X) + (X-b)(X-a)$, et a fortiori ne pourra pas identifier le polynôme $P(X)$.

Solution de l'exercice 4

En posant $Q(X) = P(X^2 + 2019)$, on se ramène en fait à montrer qu'il existe un entier n tel que $Q(n)$ n'est pas premier. Si $Q(0)$ n'est pas un nombre premier, alors $n = 0$ convient. On suppose donc que $Q(0)$ est un nombre premier, de sorte que $Q(0) \geqslant 2$.

Puisque Q est non constant, il existe un entier $\ell \geqslant 1$ tel que $Q(n) \neq Q(0)$ pour tout $n \geqslant \ell$. On choisit alors $n = \ell Q(0)$. En effet, on sait alors que $Q(n) \equiv Q(0) \equiv 0 \pmod{Q(0)}$. Ainsi, $Q(n)$ est divisible par le nombre premier $Q(0)$ mais ne lui est pas égal, et n'est donc pas premier.

Solution de l'exercice 5

La réponse est **négative**. En effet, supposons qu'il existe une telle famille de dés, que l'on numérotera de 1 à 2019. Si le $k^{\text{ème}}$ dé a une probabilité $p_{i,k}$ de tomber sur la valeur i, on lui associe le polynôme $P_k(X) = \sum_{i=1}^{20} p_{i,k} X^{i-1}$. Alors le produit

$$\prod_{k=1}^{2019} P_k(X),$$

est en fait égal, à un facteur constant près, au polynôme $Q(X) = \sum_{i=0}^{2019\times 19} X^i$. Chaque polynôme P_k est donc nécessairement de degré 19, donc admet une racine réelle. Cependant, le polynôme $(X-1)Q(X) = X^{2019\times 19+1} - 1$ n'a que des racines simples, toutes de module 1, et dont au plus deux sont donc réelles.

Solution de l'exercice 6

Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier et $a = p^{p-1}$: on va montrer que a est un des entiers recherchés.

En effet, supposons qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que que an admette n diviseurs, et soit $n = p^\alpha \prod_i p_i^{\beta_i}$ la décomposition de n en produit de facteurs premiers distints. Alors an admet exactement $(\alpha + p)\prod_i(\beta_i + 1)$ diviseurs, et on a donc

$$p^\alpha \prod_i p_i^{\beta_i} = n = (\alpha + p)\prod_i(\beta_i + 1).$$

Si $\alpha = 0$, alors seul le membre de droite est divisible par p. Ainsi, on sait que $\alpha \geqslant 1$. On introduit alors les fonctions $f_q : x \to q^x/(x+1)$ et $g_q : x \to q^x/(x+q)$, de sorte que l'égalité ci-dessus se réécrit comme

$$g_p(\alpha) \prod_i f_{p_i}(\beta_i) = 1.$$

Or, pour tout nombre premier $q \geqslant 2$, la fonction f_q est strictement croissante sur $\{1, 2, \ldots\}$. En effet, pour tout $x \geqslant 1$, on a

$$f_q(x+1)/f_q(x) = q(x+1)/(x+2) = q\,(1 - 1/(x+2)) \geqslant 2(1-1/3) \geqslant 4/3.$$

Puisque $f_q(1) = q/2 \geqslant 1$, on en déduit que $f_q(x) \geqslant 1$ pour tout $x \geqslant 1$, avec égalité si et seulement si $q = 2$ et $x = 1$; sinon, on a même $f_q(x) \geqslant 4/3$.

De même, pour tout $q \geqslant 5$, la fonction g_q est strictement croissante sur $\{1, 2, \ldots\}$ car, pour tout $x \geqslant 1$, on a

$$g_q(x+1)/g_q(x) = q(x+p)/(x+p+1) = f_q(x+p-1)/f_q(x+p) \geqslant 4/3.$$

Puisque $g_q(2) = q^2/(q+2) \geqslant 3q/(2q) \geqslant 3/2$, on en déduit que $g_q(x) \geqslant 3/2$ pour tout $x \geqslant 2$.

Par conséquent, si $\alpha \geqslant 2$, on sait que

$$g_p(\alpha) \prod_i f_{p_i}(\beta_i) \geqslant g_p(\alpha) \geqslant 3/2,$$

ce qui est impossible. Ainsi, on a $\alpha = 1$, et $g_p(\alpha) = q/(q+1)$. Mais alors au moins un des facteurs $f_{p_i}(\beta_i)$ doit être compris entre 1 et $(q+1)/q$. On a vu plus haut que $f_{p_i}(\beta_i)$ était soit égal à 1, soit supérieur ou égal à $4/3$. Puisque $(q+1)/q = 1 + 1/q \leqslant 6/5 < 4/3$, il y a là une contradiction.

Tout entier de la forme p^{p-1} figurant parmi l'ensemble des entiers a recherchés, il existe bien une infinité de tels entiers.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

Tout d'abord, si $Q = 0$, alors P divise à la fois P et Q, donc P est constant. Puis, si Q est constant et non nul, alors $2^{P(n)} - 1$ divise $3^{Q(n)} - 1 = 3^{Q(0)} - 1$, donc la fonction $n \to 2^{P(n)} - 1$ et bornée sur $\mathbb{N}$, et P aussi : dans ce cas, P est également constant.

On suppose donc Q non constant. Or, d'après le théorème de Bézout, il existe deux polynômes $A, B \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$. Quitte à les multiplier tous deux par un entier $c \geqslant 1$, on les suppose à coefficients entiers, et l'on a en fait $AP + BQ = c$. Puis, comme Q est non constant, il existe un entier α tel que $Q(k) > 0$ pour tout $k \geqslant \alpha$. Quitte à remplacer P et Q par $P(X - \alpha)$ et $Q(X - \alpha)$, on suppose $\alpha = 0$, de sorte que $Q(0) > 0$.

Puis, si $Q(X) = \sum_{k=0}^{d} q_k X^k$, on pose $N = 1 + \max\{|c|, d, q_0\}$, puis $L = N!\,Q(0)$. Alors on constate que $Q(n\,L) \equiv Q(0) \pmod{L}$ pour tout entier $n \geqslant 0$. Ainsi, pour tout nombre premier $p \leqslant N$, on sait que $v_p(L) > v_p(Q(0)) = v_p(Q(n\,L))$.

On note ensuite γ_n l'ordre de 3 modulo $2^{P(n\,L)} - 1$: c'est un diviseur de $Q(n\,L)$, donc $v_p(\gamma_n) < v_p(L)$ pour tout nombre premier $p \leqslant N$. D'autre part, si m est un entier tel que $P(n\,L)$ divise $P(m\,L)$, alors $2^{P(n\,L)} - 1$ divise également $2^{P(m\,L)} - 1$, qui divise lui-même $3^{Q(m\,L)} - 1$, de sorte que γ_n divise en fait $Q(m\,L)$.

Soit alors q un nombre premier tel que $q \geqslant N + 1$: démontrons que q ne divise pas γ_n. Pour ce faire, il suffit de trouver un entier m tel que q ne divise pas $Q(m\,L)$ mais tel que

$P(n\,L)$ divise $P(m\,L)$. Or, puisque $q > d$, il existe un entier α tel que $Q(\alpha) \not\equiv 0 \pmod q$, et $P(n\,L)$ divise nécessairement tous les entiers de la forme $P(n\,L + k\,P(n\,L)\,L)$.

Par conséquent, si q ne divise pas $Q(n\,L)$, il nous suffit de choisir $n = m$. Sinon, puisque $A(n\,L)P(n\,L) \equiv c - B(n\,L)Q(n\,L) \equiv c \not\equiv 0 \pmod q$, on sait que $P(n\,L)$ est inversible modulo q. C'est également le cas de L, dont tout facteur premier est inférieur ou égal à N. Ainsi, il existe un entier $\hat{k}$ tel que $n\,L + k\,P(n\,L)\,L \equiv \alpha \pmod q$. Mais alors, en posant $m = n + k\,P(n\,L)$, on a bien $Q(m\,L) \equiv Q(\alpha) \not\equiv 0 \pmod q$, tandis que $P(n\,L)$ divise $Q(m\,L)$.

On a donc démontré que γ_n n'avait aucun facteur premier supérieur ou égal à $N + 1$. Puisque $v_p(\gamma_n) < v_p(L)$ pour tout nombre premier $p \leqslant N$, on en déduit que γ_n divise L. Cela montre que $2^{P(n\,L)} - 1 \leqslant 3^{\gamma_n} - 1 \leqslant 3^L - 1$, donc que la suite $(P(n\,L))_{n \geqslant 0}$ est bornée. Le polynôme P est donc constant.

2 TD de géométrie : autour des milieux de segments (Martin Rakovsky)

Ce TD reprend celui donné au stage 2018 au groupe C sur les « milieux et parallélogramme » (http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/02/stage_ete_2018.pdf, page 235)

3 Tranformations géométriques (Pierre-Marie Esmenjaud)

Nous avons revu les similitudes et les propriétés du point de Miquel qui y sont rattachées, et avons introduit les inversions. Voir le cours de Thomas Budzinski pour un cours plus approfondi sur les transformations classiques.

L'inversion est une transformation non-classique du plan, définie par un centre et un rapport strictement positif.

L'inversion I_{O,r^2} de centre O et de rapport $r^2 > 0$ envoie un point $M \neq O$ sur l'unique point M' vérifiant la double condition $OM \cdot OM' = r^2$ et $M' \in [OM)$.

Les propriétés qui découlent immédiatement de cette définition sont que l'inversion est une involution (ie $I_{O,r^2} \circ I_{O,r^2} = Id$), que deux points et leurs images sont nécessairement cocycliques (puissance d'un point par rapport à un cercle), et que les cercles sont conservés par inversion (chasse aux angles).

En introduisant la convention que le point O est envoyé sur le "point à l'infini", noté ∞, et que toute droite est un cercle passant par ∞, on obtient les règles d'inversions suivantes :

- Un cercle ne passant pas par le centre de l'inversion a pour image un cercle ne passant pas par le centre de l'inversion
- Un cercle passant par le centre de l'inversion est envoyé sur une droite ne passant pas par le centre de l'inversion et réciproquement.
- Une droite passant par le centre de l'inversion est globalement invariante.

En remarquant que les points invariants par l'inversion de centre O et de rapport r^2 sont exactement ceux du cercle de centre O et de rayon r, on peut définir une inversion en évoquant simplement le cercle invariant de l'inversion : ainsi, dire qu'on considère l'inversion de cercle γ revient à considérer l'inversion de centre le centre de ce cercle et de rapport son rayon au carré.

Il peut être intéressant dans un exercice de faire une inversion de centre un point hors de la figure (équivalence du théorème de Clifford et du point de Miquel d'un quadrilatère), ou bien si l'un des points de la figure est sur de nombreux cercles, faire une inversion depuis ce point pour transformer ces cercles en droites, qui sont beaucoup plus sympathiques (voir exercice 1).

Les exercices d'échauffements sont tirés du polycopié de Dehornoy.

Exercice 1
Soit Γ un cercle et $[AC]$ et $[BD]$ deux cordes sécantes en X. Soient C_1, C_2, C_3, C_4 des cercles passant par X et respectivement par A, B, C, D, tels que C_1 et C_2 s'intersectent sur Γ, tout comme C_3 et C_4. Montrer que les intersections de C_1 et C_4 ainsi que C_2 et C_3 sont alignés avec X.

Exercice 2
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ. Une droite coupe respectivement $[AB], [BC], [CA]$ en X, D, Y. Le cercle circonscrit à ADX coupe Γ en Z. Notons $V = \Gamma \cap (ZD)$ et $W = \Gamma \cap (YZ)$. Montrer que $AB = VW$.

Exercice 3
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ. On note S le point de tangence de C_1, le A-cercle mixtilinéaire (i.e. le cercle tangent à $[AB], [AC]$ et Γ) avec Γ, et T celui de C_2, le cercle A-exinscrit avec $[BC]$. Montrer que $\widehat{BAS} = \widehat{TAC}$.

Exercice 4
Soit ABC un triangle. On note M le milieu de $[AB]$, E (resp. F) l'intersection de la hauteur issue de M sur (AC) avec la droite perpendiculaire à (AB) passant par A (resp. B). Soit $D = (EF) \cap (CM)$. Montrer $\widehat{ADB} = \widehat{EMF}$

Exercice 5
Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit de centre O. on pose H l'orthocentre et X, Y les pieds des hauteurs issues de B et C. Soient M le milieu de $[BC]$, $P = (AO) \cap (BC)$ et $Q = (XY) \cap (CH)$.

Montrer (PQ) parallèle à MH.

Exercice 6
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique, dont les diagonales se coupent en E et $F = (DA) \cap (BC)$. Soit H le symétrique de E par rapport à (AD), et G tel que $DECG$ parallélogramme. Montrer que $DGHF$ cocycliques.

Exercice 7
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ, et B_0, C_0 les milieux correspondants de ses côtés, D le pieds de la hauteur issue de A. Soit ω le cercle passant par B_0 et C_0, et tangent intérieurement à Γ en X. Montrer que X, D et le centre de gravité sont alignés.

Exercice 8
Soit $ABCD$ un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires en E. Montrer que les symétriques de E par rapport aux côtés du quadrilatère sont cocycliques.

Solution de l'exercice 1
En appliquant une inversion de centre X, on trouve le théorème de Pascal.

Solution de l'exercice 2
On reconnait une configuration de Miquel : Z est le point de Miquel du quadrilatère $(AB), (BC), (CD), (XY)$. Ainsi il existe une similitude directe de centre Z, notée S_Z, envoyant $[AB]$ sur $[YD]$. On constate aussi que le cercle circonscrit au triangle YDC passe aussi par Z, donc que C est le point de Miquel du quadrilatère $(VW), (ZD), (XY), (WZ)$, donc il existe une similitude directe de centre C, notée S_C, envoyant $[YD]$ sur $[VW]$. La composition de ces deux similitudes est une similitude de rapport $r = \frac{ZD}{ZB}\frac{CV}{CD}$ envoyant $[AB]$ sur $[VW]$.
Reste donc à montrer que cette similitude est de rapport 1. On montre aisément que $DZB \sim DCV$, ce qui nous permet de conclure.

Solution de l'exercice 3
Considérons $\mathfrak{T}$ la composition de l'inversion de centre A et de rapport $AB \cdot AC$ et de la symétrie d'axe la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$. La symétrie axiale étant une isométrie, cette composition aura sur les droites et les cercles l'effet d'une inversion, et de plus ce sera une involution. Elle échange $B \leftrightarrow C$, $(AB) \leftrightarrow (AB)$, $(AC) \leftrightarrow (AC)$, $(BC) \leftrightarrow \Gamma$, donc aussi $\mathbb{C}_1 \leftrightarrow C_2$ puis $S \leftrightarrow T$. Comme un point et son image par notre composition forme avec le centre de l'inversion un angle bissecté par l'axe de symétrie considéré, on en déduit le résultat.

Solution de l'exercice 4
Posons $X = (ME) \cap [AC]$ et $Y = (MF) \cap [BC]$. On a $MY \cdot MF = MB^2 = MA^2 = MX \cdot ME$ ainsi les points E, X, F, Y sont cocycliques. Les points M, X, C, Y sont sur le cercle de diamètre $[CM]$. Par chasse aux angles,

$$(CM, CY) = (XM, XY) = (XE, XY) = (FE, FY)$$

De la même façon, on démontre que $(CX, CM) = (EM, EF)$.
Ainsi $(CA, CB) = (FE, FM) + (EM, EF) = \pi - (MF, ME)$.

Solution de l'exercice 5
D'après les propriétés de l'orthocentre, $H' = (HM) \cap (AP) \in \Gamma$. Notre énoncé revient donc à montrer que $\frac{AQ}{AH} = \frac{AP}{AH'}$. Considérons S, la composition de la symétrie d'axe la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et de la similitude directe de rapport $\frac{AX}{AB}$. C'est ce qu'on appelle une similitude indirecte. Comme $AX \cdot AC = AY \cdot AB$ on a que S envoie B sur X, C sur Y donc Γ sur le cercle circonscrit à AXY noté γ, et (AH') sur (AH). Ainsi $H' = \Gamma \cap (AH')$ est envoyé sur $\gamma \cap (AH) = H$, et $P = (BC) \cap (AH')$ est envoyé sur $(XY) \cap (AH) = Q$. D'où l'égalité de rapports recherchée.

Solution de l'exercice 6
Par lemme d'isogonalité, $\widehat{EFB} = \widehat{DFG}$, et par cocyclicité $\widehat{FBE} = \widehat{EAF} = \widehat{GDF}$ donc $GDF \sim EBF$. Ainsi $\widehat{FEB} = \widehat{FGD}$. Mais comme (AD) est la médiatrice de $[EH]$ on a par symétrie que $\widehat{DHF} = \widehat{DEF} = 180 - \widehat{BEF} = 180 - \widehat{DGF}$, d'où D, H, F, G cocycliques.

Solution de l'exercice 7
On trace γ le cercle passant par A, B_0, C_0. Par homothétie, il est tangent à Γ en A. En considérant les axes radicaux des cercles Γ, γ et ω, on trouve que les tangentes à Γ en A et X ainsi que (B_0C_0) sont concourantes. Si l'on appelle B^* et C^* les intersections de (B_0C_0) avec Γ, on reconnait une condition de cocyclicité classique pour des points sur un cercle, donc A, X, B^*, C^* sont harmoniques.

Introduisons Z le milieu du segment $[B^*C^*]$. En réalisant une rapide chasse aux angles, on trouve que $\widehat{AZB^*} = \widehat{B^*X}$ (condition classique d'harmonicité, à retenir). De plus, Z est sur la médiatrice de $[BC]$, donc l'homothétie de rapport $-\frac{1}{2}$ et de centre G envoie D sur Z, d'où G, D, Z alignés. Puis (B_0, C_0) est la médiatrice de $[AD]$ donc $\widehat{AZB^*} = \widehat{B^*ZD}$. Ainsi, on obtient $\widehat{B^*ZD} = \widehat{B^*ZX}$ ce qui traduit l'alignement souhaité !

Solution de l'exercice 8
Quitte à faire une homothétie de rapport 2, l'exercice revient à montrer que les pieds E_1, E_2, E_3, E_4 des hauteurs issues de E sur les côtés $[AB], [BC], [CD], [DA]$ sont cocycliques. Il y a une multitudes de cercles cachés sur cette figure ! Traçons pas exemple les cercles de diamètres $[EA], [EC]$ qui sont tangents à (BD) en E et ceux de diamètre $[EB], [ED]$ qui sont tangents à (AC) en E.

En réalisant alors une inversion de centre E, l'énoncé devient : Soient $[A'C']$ et $[B'D']$ deux segments perpendiculaires en E.
On trace les parallèles à $(A'C')$ (resp. $(B'D')$) par B' et D' (resp. A' et C'), ces quatre droites définissent quatre points d'intersection E_1, E_2, E_3, E_4. Montrer qu'ils sont cocycliques. Ce qui est trivial.

4 TD d'arithmétique (Rémi Lesbats)

En vrac, une liste d'idées à tester quand on voit un exposant :

— Factoriser, et isoler les nombres premiers dans une équation, pour se ramener à quelque chose de la forme $p^n =$ produit de facteurs, avec p premier

— Considérer l'ordre de la quantité sous un exposant, utiliser Euler-Fermat

— Décomposer en facteurs premiers

— Considérer p premier divisant l'expression (soit p minimal pour avoir une contradiction, soit p quelconque pour montrer une propriété sur tous les diviseurs)

— Trouver un modulo n tel que $\varphi(n)$ soit multiple de l'exposant

— Si un exposant est pair, penser aux résidus quadratiques

Tous les exercices ci-dessous utilisent uniquement ces idées. Les exercices $6, 7, 9, 10$ et 13 n'ont pas été corrigés pendant la séance. Ils ne sont pas classés par ordre de difficulté.

Exercice 1
(Corée 2012) Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs (m, n, p) avec p premier, tels que $2^m p^2 + 1 = n^5$

Solution de l'exercice 1
On écrit $2^m p^2 = n^5 - 1 = (n-1)(n^4 + n^3 + n^2 + n + 1)$. Comme $n^4 + n^3 + n^2 + n + 1$ est impair, $2^m \mid n - 1$.
Ainsi, $p^2 = \frac{n-1}{2^m}(n^4+n^3+n^2+n+1)$. Or p^2 ne peut s'écrire comme produit de deux termes que sous la forme $p \times p$ ou $1 \times p^2$, et $\frac{n-1}{2^m} < n^4+n^3+n^2+n+1$, donc $\frac{n-1}{2^m} = 1$ et $p^2 = n^4+n^3+n^2+n+1$.
On a donc $n = 2^m + 1$ et $p^2 = (2^m + 1)^4 + (2^m + 1)^3 + (2^m + 1)^2 + (2^m + 1) + 1$. Si $m \geq 2$, alors $p^2 \equiv 5[8]$, mais 5 n'est pas un résidu quadratique modulo 8, absurde. Ainsi $m = 1$. La seule solution est donc $(1, 3, 11)$.

Exercice 2
Trouver tous les entiers positifs n tels que n^8+n^7+1 soit premier.

Solution de l'exercice 2
$x^8+x^7+1=(x^2+x+1)(x^6-x^4+x^3-x+1)$. On peut penser à cette factorisation en pensant aux racines de l'unité, notamment les racines cubiques ici.

Exercice 3
Soit $n>1$ un entier et p un diviseur premier de $2^{2^n}+1$. Montrer que $v_2(p-1)\geq n+2$

Solution de l'exercice 3
Soit p un diviseur premier de $2^{2^n}+1$. On a $2^{2^n}\equiv -1[p]$, donc $2^{2^{n+1}}\equiv 1[p]$, donc l'ordre de 2 modulo p est une puissance de 2 divisant 2^{n+1} mais pas 2^n, soit 2^{n+1}. D'après le petit thèoreme de Fermat, $2^{p-1}\equiv 1[p]$, donc par propriété de l'ordre, $2^{n+1}\mid p-1$. Il suffit donc de montrer que 2 est un résidu quadratique modulo p, puisque x vérifiant $x^2\equiv 2[p]$ sera d'ordre 2^{n+2}, donc $2^{n+2}\mid p-1$ comme précédemmemt. Mais comme $n+1\geq 3$, on sait que $p\equiv 1[8]$ par ce qui précède, donc 2 est bien résidu quadratique.

Exercice 4
Trouver tous les nombres premiers p tels que $2^p+p\mid 3^p+p$

Solution de l'exercice 4
Soit q un diviseur premier de 2^p+p. Alors on a $2^p\equiv 3^p[q]$. Ainsi $q\geq 5$. On en déduit que 3 est inversible modulo q, et que $(2\cdot 3^{-1})^p\equiv 1[q]$. Ainsi l'ordre de $2\cdot 3^{-1}$ modulo q divise p, donc est égal à p, car il ne peut pas valoir 1. D'après le petit théorème de Fermat et par propriété de l'ordre, on a donc $p\mid q-1$, ce qui se réécrit $q\equiv 1[p]$. Tous les diviseurs premiers de 2^p+p valent donc 1 modulo p, donc $2^p+p\equiv 1[p]$, ce qui est absurde car $2^p\equiv 2[p]$ par Fermat. Il n'y a donc pas de solutions.

Exercice 5
(N1 2002) Trouver le plus petit entier t tel qu'il existe des entiers strictement postifs $x_1,\dots,x_t$, vérifiant $x_1^3+\dots+x_t^3=2002^{2002}$.

Solution de l'exercice 5
Montrons que $t\geq 4$. On cherche un entier n pour lequel $3\mid\varphi(n)$, pour que les cubes ne prennent que peu de valeurs modulo n. C'est le cas de 9, pour lequel les cubes ne peuvent valoir que $0,1$ ou -1. Or on constate que $2002^{2002}\equiv 4[9]$, donc on a bien $t\geq 4$. Il suffit de trouver x_1,x_2,x_3,x_4 qui conviennent pour conclure. On a $2002=3\cdot 667+1$, donc $2002^{2002}=2002\cdot\left(2002^{667}\right)^3$. Il suffit donc de montrer que 2002 peut s'écrire comme somme de 4 cubes, or ceci est facile à remarquer : $2002=1000+1000+1+1$.

Exercice 6
(BxMO 2010, 4) Trouver tous les quadruplets (a,b,p,n) d'entiers strictement positifs avec p premier tels que $a^3+b^3=p^n$

Solution de l'exercice 6
On réécrit $(a+b)(a^2-ab+b^2)=p^n$. Comme $a+b\geq 2$, on sait que $p\mid a+b$. On a $a^2-ab+b^2=(a-b)^2+ab$, donc $a=b=1$ ou $a^2-ab+b^2\geq 2$ et donc $p\mid a^2-ab+b^2$. Plaçons nous dans le second cas. Alors p divise également $(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)=3ab$. On se rappelle que $p\mid a+b$, donc $p\mid a$ si et seulement si $p\mid b$. Ainsi, soit $p=3$, soit $p\mid a$ et

$p \mid b$. Dans ce cas, on réécrit $a = pa'$ et $b = pb'$, et on retrouve $a'^3 + b'^3 = p^{n-3}$, en constatant que $n - 3 > 0$ car $a' \geq 1$ et $b' \geq 1$. On poursuit ce processus jusqu'à une solution (a_0, b_0, p, n_0) pour laquelle p ne divise pas a_0. D'après ce qui se précède, on se retrouve dans un des cas particuliers $a_0 = b_0 = 1$, qui donne la solution $(1, 1, 2, 1)$, ou $p = 3$. Si $p = 3$, alors $3 \mid a_0 + b_0$, donc $9 \mid (a_0 + b_0)^2$. Si $9 \mid a_0^2 - a_0b_0 + b_0^2$, alors $9 \mid 3a_0b_0$, contradiction. Ainsi, $a_0^2 - a_0b_0 + b_0^2 = 3$, donc $(a_0 - b_0)^2 + a_0b_0 = 3$, d'où $a_0 = 1$ et $b_0 = 2$ ou inversement.
Ainsi on a 3 solutions possibles quand p ne divise pas a, qui sont $(1, 1, 2, 1), (1, 2, 3, 1), (2, 1, 3, 1)$. Finalement, il existe 3 familles de solutions à l'équation initiale : $(2^k, 2^k, 2, 3k+1)$, $(3^k, 2 \cdot 3^k, 3, 3k+2)$, et $(2 \cdot 3^k, 3^k, 3, 3k+2)$ avec $k \in \mathbb{N}$, dont on vérifie facilement qu'elles conviennent.

Exercice 7
(N5 2006) Trouver tous les entiers x, y tels que $\frac{x^7-1}{x-1} = y^5 - 1$.

Solution de l'exercice 7
Soit q un diviseur premier de $\frac{x^7-1}{x-1}$. Alors $x^7 \equiv 1[q]$, donc l'ordre ω de x modulo q vaut 1 ou 7. S'il vaut 1, alors $\frac{x^7-1}{x-1} \equiv x^6 + \ldots + 1 \equiv 7[q]$, donc $q \mid 7$ et $q = 7$. Sinon $\omega = 7$, donc $7 \mid q - 1$ d'après le petit théorème de Fermat.
On a $y^5 - 1 = (y-1)(y^4+y^3+y^2+y+1)$. Ainsi $y - 1$ est un diviseur de $\frac{x^7-1}{x-1}$, donc $y \equiv 1$ ou $2[7]$. Mais alors $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 \equiv 5$ ou $3[7]$, ce qui contredit ce qui précède. Il n'y a donc pas de solutions.

Exercice 8
(N2 2007) Soient $n, b > 1$ des entiers. On suppose que pout tout entier $k > 1$, il existe un entier a_k tel que $k \mid b - a_k^n$. Montrer qu'il existe un entier A tel que $b = A^n$.

Solution de l'exercice 8
On écrit la décomposition en facteurs premiers : $b = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$. On veut donc montrer que tous les α_i sont des multiples de n. On applique la propriété donnée pour $k = b^2$. On dispose de a tel que $b^2 \mid b - a^n$. Ainsi pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $p_i^{2\alpha_i} \mid b - a^n$. On en déduit que $a^n \equiv b \equiv 0[p_i^{\alpha_i}]$ mais que $a^n \equiv b \not\equiv 0[p_i^{\alpha_i+1}]$, et donc que $v_{p_i}(a^n) = \alpha_i$. Mais $n \mid v_{p_i}(a^n)$ donc $n \mid \alpha_i$, comme atendu.

Exercice 9
(N2 2010) Trouver tous les couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant $m^2 + 2 \cdot 3^n = m(2^{n+1} - 1)$.

Solution de l'exercice 9
On traite les petits cas pour n en remarquant que l'on se ramène à une équation du second degré en m. On trouve les solutions $(3, 6), (3, 9)$ et $(6, 9), (6, 54)$. Montrons que ce sont les seules. On suppose désormais $n \geq 6$.
On remarque que $m \mid 2 \cdot 3^n$. Ainsi, il existe un entier $p \leq n$ tel que $m = 3^p$ ou $m = 2 \cdot 3^p$. Posons $q = n - p$. Dans le premier cas, on obtient $2^{n+1} - 1 = m + \frac{2 \cdot 3^n}{m} = 3^p + 2 \cdot 3^q$, et dans le second $2^{n+1} - 1 = 2 \cdot 3^p + 3^q$. Ces deux équations sont donc équivalentes, quitte à changer p en $n - p$, inutile de traiter deux cas. On ne s'intéresse donc qu'à la première.
Cherchons à encadrer p. On a $3^p < 2^{n+1} = 8^{\frac{n+1}{3}} < 9^{\frac{n+1}{3}} = 3^{\frac{2(n+1)}{3}}$, et de même $2 \cdot 3^{n-p} < 2 \cdot 3^{\frac{2(n+1)}{3}}$. Donc $\frac{n-2}{3} < p, q < \frac{2(n+1)}{3}$. Soit $h = \min(p, q)$. Alors $9 \mid 3^h \mid 3^p + 2 \cdot 3^q$, donc $9 \mid 2^{n+1} - 1$. Comme l'ordre de 2 modulo 9 vaut 6, on a $6 \mid n + 1$, donc $n + 1 = 6r$. Mais alors on a $2^{n+1} - 1 = 4^{3r} - 1 = (4^{2r} + 4^r + 1)(2^r + 1)(2^r - 1)$. On constate que $4^{2r} + 4^r + 1$ est toujours

divisible par 3 mais jamais par 9, et $2^r - 1$ et $2^r + 1$ sont premiers entre eux, donc 3^{h-1} divise l'un des deux nombres $2^r - 1$ ou $2^r + 1$.
On revient alors à nos inégalités : $3^{h-1} \leq 2^r + 1 \leq 3^r$. Ainsi, $\frac{n-2}{3} - 1 < h - 1 \leq \frac{n+1}{6}$, soit $2(n-2) - 6 < n + 1$ ou encore $n < 11$, or on a supposé $n \geq 6$ et on a montré $n \equiv -1[6]$, donc $n \geq 11$, absurde. Il n'y a donc pas d'autres solutions que celles mentionnées au début.

Exercice 10
(USAMO 2017, 1) Montrer qu'il existe une infinité de couples d'entiers (a, b) strictement positifs premiers entre eux tels que $a + b \mid a^b + b^a$.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>
On remarque que $(2n - 1, 2n + 1)$ est toujours solution pour $n \in \mathbb{N}$. En effet $a + b = 4n$, et en regardant modulo $4n$ directement on a le résultat attendu.

Exercice 11
(Canada 2019, 2) Soient a et b des entiers strictement positifs tels que $a + b^3$ soit divisible par $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$. Montrer que $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$ est divisible par le cube d'un entier.

<u>*Solution de l'exercice 11*</u>
En multipliant par a et en ajoutant $a + 3b^3$, on obtient $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1 \mid (a + b)^3$. Ainsi pour tout nombre premier p divisant $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$, on a $p \mid a + b$. Ecrivons la décomposition en facteurs premiers $a^2 + 3ab + 3b^2 - 1 = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$. Il suffit de montrer que l'un des α_i est supérieur à 3. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors on remarque que $(a+b)^2 \geq p_1^2 \cdots p_n^2 \geq a^2 + 3ab + 3b^2 - 1$, car tous les p_i divisent $a + b$ et car tous les α_i sont inférieurs à 2. On en déduit $ab \leq 1$, donc $a = b = 1$, mais ceci est en contradiction avec l'énoncé, ce qui conclut.

Exercice 12
(Olympiade tchèque et slovaque 2019, 5) Montrer qu'il existe une infinité d'entiers qui ne peuvent pas s'écrire sous la forme $2^a + 3^b - 5^c$, avec $a, b, c \in \mathbb{N}$.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u>
Une première solution simple (mais très parachutée) consiste à remarquer que les nombres sous la forme donnée ne peuvent prendre que 105 valeurs modulo 120. Une autre solution est la suivante : pour écrire un nombre impair, on doit avoir $a = 0$. On constate alors que $3^3 = 26 + 1$ et $5^2 = 26 - 1$, donc en regardant modulo 13, on a seulement 3 résidus possibles pour les puissances de 3 et 4 pour les puissances de 5, soit un total de $3 \cdot 4 = 12$ résidus possibles. Un résidu ne peut pas être atteint, donc une infinité de nombres impairs ne peuvent pas être écrits sous la forme voulue.

Exercice 13
(Italie 2019) Soient p et q deux nombres premiers tels que $p + q^2$ soit un carré parfait. Montrer que $p^2 + q^n$ n'est un carré parfait pour aucun entier n.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u>
Soit a l'entier positif tel que $p + q^2 = a^2$. Alors $p = (a - q)(a + q)$. $a + q$ est positif, donc $a - q$ aussi, et $a - q < a + q$, donc $a - q = 1$ et $a + q = p$, d'où $p = 2q + 1$. Par l'absurde, soient b et n deux entiers positifs tels que $p^2 + q^n = b^2$. Alors $q^n = (b - p)(b + p)$, donc $\operatorname{pgcd}(b - p, b + p) \mid 2p = 4q + 2$, mais $b - p$ et $b + p$ sont des puissances de q, donc $q = 2$ ou $b - p = 1$. Si $b - p = 1$, alors $q^n = b + p = 2p + 1 = 4q + 3$. Ainsi q est impair donc $q \geq 3$, donc $q^n \geq 3^{n-1}q > 4q + 3$ si $n \geq 3$. Si $n = 2$, $q^2 = 4q + 3$ ne donne pas de solution entière et si $n = 1$,

$q = 4q + 3$ est également absurde. Ainsi $q = 2$, donc $p = 5$, et $2^n = (b-5)(b+5)$, mais deux puissances de 2 ne sont jamais à distance 10, ce qui conclut.

5 Entiers de Gauss (Raphaël Ducatez)

Ce cours est inspiré du cours de Raphael D en 2017 à Valbonne, disponible page 94 à l'adresse : `http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/10/stage_ete_2017.pdf`

6 Géométrie projective (Pierre-Marie Esmenjaud)

Nous avons introduit les notions primordiales de géométrie projective (à savoir le birapport de 4 points sur une droite, de 4 points sur un cercle, et de quatre droites par un point), puis nous avons démontré les principaux lemmes de projection (sur une droite, sur un cercle...). Nous avons défini la notion de points/droites harmoniques, et vu les lemmes 2 parmi 3 et 2 parmi 4 reliant des conditions métriques ou angulaires à l'harmonicité de points/droites. Enfin nous avons recherché des points harmoniques dans la configuration du quadrilatère complet.

Nous avons enfin abordé la notion de pôle/polaire relativement à un cercle, en répondant à cette question géométrie : Soit Γ un cercle de centre O et P un point hors de ce cercle. en traçant une droite variable d passant par P et coupant Γ en A, B, trouver le lieu des points P' tels que A, B, P, P' soient harmoniques. Cet ensemble est une droite perpendiculaire à la droite de symétrie (PO).

Nous avons alors établi plusieurs façons de déterminer la polaire d'un point, en utilisant des quadrilatères complets, des tangences, ou encore la dualité pôle/polaire (si l'on prend un point Q sur la polaire de P, alors sa polaire passe par P).

Nous avons fini par la correction des exercies de la veille.

2 Entraînement de mi-parcours

– Énoncés –

Exercice 1
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ. Soit N le milieu de l'arc BC contenant A et $\mathcal{C}$ un cercle passant par A et N, qui coupe $[AB]$ (resp. $[AC]$) en X (resp. Y). Montrer que $BX = CY$.

Exercice 2
Soit P un polynôme non constant, à coefficients entiers. On suppose que, pour tout entier n, les facteurs premiers de $P(n)$ sont aussi des facteurs premiers de n. Démontrer que la réciproque est vraie : pour tout entier n, les facteurs premiers de n sont aussi des facteurs premiers de $P(n)$.

Exercice 3
Trouver tous les triplets d'entiers positifs (x, y, z) vérifiant $x \leq y \leq z$ et tels que $x^3(y^3 + z^3) = 2012(xyz + 2)$.

Exercice 4
Soit ABC un triangle tel que $AB \neq AC$ et soit O le centre de son cercle circonscrit. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en D. Soit E le symétrique de D par rapport au milieu de $[BC]$. La perpendiculaire à (BC) passant par D coupe $[AO]$ en X et la perpendiculaire à (BC) passant par E coupe (AD) en Y. Montrer que les points B, X, C et Y sont cocycliques.

– Solutions –

Solution de l'exercice 1
On reconnaît une configuration de Miquel : N est le centre de la similitude directe qui envoie $[BX]$ sur $[CY]$. Comme cette similitude envoie B sur C, son rapport est $\frac{NC}{NB}$, mais comme N est sur la médiatrice de $[BC]$, ce rapport vaut 1. Ainsi notre similitude est une rotation, d'où $BX = CY$.

Solution de l'exercice 2
La décomposition en facteurs premiers de 2012 est $2012 = 2^2 \cdot 503$. Comme $\operatorname{pgcd}(x, xyz+2) \mid 2$, on sait que $x \mid 2012 \cdot 2$. Si $503 \mid x$, alors $503^3 \mid 2012(xyz+2)$, donc $503^2 \mid xyz+2$, mais ce nombre est premier avec 503, absurde. Donc x est une puissance de 2^m, avec $m \leq 3$. Si $m \geq 2$, alors $2^6 \mid 2012(xyz + 2)$, mais $xyz + 2 \equiv 2[4]$, absurde. Ainsi $x = 1$ ou $x = 2$. Ainsi, l'équation se réécrit $y^3 + z^3 = 2012(yz + 2)$ ou $y^3 + z^3 = 503(yz + 1)$.
Dans les deux cas, $503 \mid y^3 + z^3$. Montrons que $503 \mid y + z$. Ceci est clair si $503 \mid y$, donc supposons que 503 est premier avec y et z. On observe que $503 = 3 \cdot 167 + 2$. On a d'une part $y^{502} \equiv z^{502}[503]$ d'après le petit théorème de Fermat, mais d'autre part $y^3 \equiv -z^3[503]$, donc $y^{501} \equiv (y^3)^{167} \equiv (-z^3)^{167} \equiv -z^{501}[503]$. On en tire finalement $y \equiv -z[503]$, comme attendu. On pose donc $y + z = 503k$, avec $k \geq 1$.
On revient à l'équation initiale. On fait apparaître un carré parfait : $y^3 + z^3 = (y+z)((y-z)^2 +$

yz), ce qui permet de regrouper les yz. Les deux équations deviennent $k(y-z)^2+(k-4)yz=8$ et $k(y-z)^2+(k-1)yz=1$. Dans le premier cas, on remarque que $(k-4)yz \leq 8$, donc $k \leq 4$ sinon $yz \leq 8$, ce qui est impossible car $y+z \geq 503$ et $y, z > 0$. De plus y^3+z^3 est pair donc k aussi, mais si $k=4$, $(y-z)^2=2$ ne donne pas de solutions, et si $k=2$, $(y-z)^2-yz=4$ se réécrit $(y+z)^2-5yz=4$, mais $(y+z)^2 \equiv 1006^2 \equiv 1 \not\equiv 4[5]$, d'où la contradiction.
Dans le second cas, on se rappelle que $x=2$, donc $yz \geq 4$ car $x \leq y \leq z$. Ainsi, $(k-1)yz \leq 1$ impose $k=1$. On a donc $(y-z)^2=1$ et $y+z=503$, et on trouve la solution $(2, 251, 252)$, qui est donc la seule.

Solution de l'exercice 3

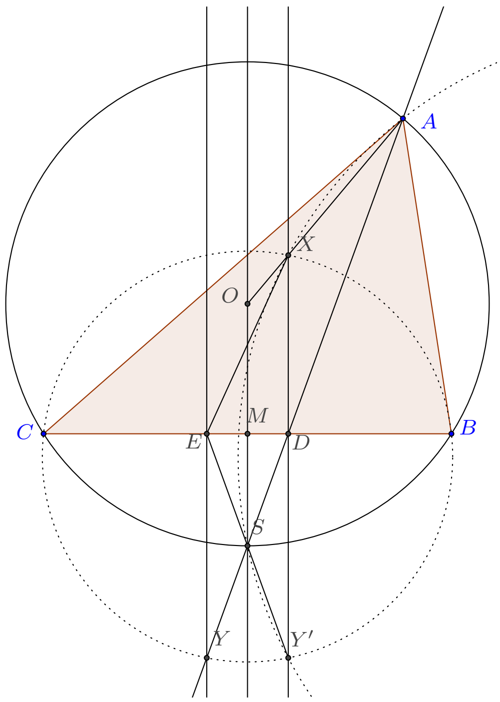
Solution de l'exercice 4
On note que les droites (EY) et (DX) sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[BC]$ qu'on note l. Il est donc judicieux de considérer les symétriques de X et Y par rapport à l. Soit donc Y' le symétrique de Y par rapport à l. Soit M le milieu de $[BC]$ et S le point d'intersection de (AD) avec le cercle circonscrit à ABC (il s'agit du pôle Sud de A). La syémtrie envoye (EY') sur (DY) donc (DY) et (EY') se coupent sur l'intersection de (DY) avec l, donc en S.

De la symétrie on obtient que $CYY'B$ est un trapèze isocèle donc les points C, Y, Y' et B sont cocycliques.

On a également que $EDY'Y$ est un rectangle. Comme l et (EY) sont parallèles on a

$$\widehat{SY'X} = \widehat{EY'D} = \widehat{EYD} = \widehat{MSA} = \widehat{OSA} = \widehat{OAS} = \widehat{XAS}$$

donc les points A, X, S et Y' sont cocycliques. (AS) est l'axe radical des cercles circonscrits à ABC et AXS. D est sur cet axe donc $DX \cdot DY' = AD \cdot DS = DB \cdot DC$ donc par la réciproque de la puissance d'un point, les points X, B, Y', C sont cocycliques donc Y, Y', B, X et C sont cocycliques.



3 Deuxième partie : Algèbre et combinatoire

1 Polynômes (Éva Philippe)

Un cours complet sur les polynômes est disponible sur la page de la POFM, à l'adresse http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/polynomes.pdf. En particulier vous y trouverez ce qui concerne l'interpolation de Lagrange p8 et la caractériqation des polynômes à valeurs entières sur tous les entiers dans l'exercices 10.

Quelques points auxquels penser face à un exercice de polynômes :

— De manière générale, penser à regarder le degré, les racines, le coefficient dominant, le coefficient constant. Selon les problèmes évaluer le polynôme en des valeurs bien choisies.

— Un polynôme non nul de degré n a au plus $n+1$ racines. Un polynôme avec une infinité de racines est le polynôme constant. On peut donc identifier les coefficients des polynômes égaux sur infinité de valeurs.

— P de degré n est uniquement déterminé par ses coefficients mais aussi par ses valeurs en $n+1$ points distincts (interpolation, relations coefficients-racines).

— α est racine de P si et seulement si il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X-\alpha)Q(X)$.

— Si α est racine double de P, alors α est racine de P', où P' est le polynôme dérivé de P.

Exercices corrigés en cours

Exercice 1
Trouver tous les réels a, b tels que $(X-1)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$.

Exercice 2
Soit P un polynôme réel de degré n tel que $P(j^2)$ sont entiers pour tout j entre 0 et n. Montrer que pour tout entier k, $P(k^2)$ est entier.

Exercice 3
Trouver tous les polynômes P tels que $(X+2019)P(X) = XP(X+1)$.

Exercice 4
Soit $n > 2$. Montrer que le polynôme $P(X) = X^n + X^{n-1} + 2$ ne peut pas avoir toutes ses racines réelles.

Exercice 5
Soit $n \in \mathbb{N}$. Trouver un polynôme unitaire P de degré n tel que $\max(|P(0)|, \dots |P(n)|)$ soit minimal.

Exercice 6
On choisit des réels $a_1, \dots a_n$ distincts et $b_1, \dots, b_n$ également des réels distincts. On construit un tableau de taille $n \times n$ en inscrivant pour chaque case le réel $a_i + b_j$, où i est le numéro de ligne et j le numéro de colonne. Montrer que si le produit des éléments d'une ligne du tableau est indépendant de la ligne choisie, alors le produit des éléments d'une colonne est indépendant de la colonne choisie.

Éléments de correction

Solution de l'exercice 1
$(X-1)^2$ divise $P(X)$ si et seulement si 1 est racine de $P(X)$ et de $P'(X)$.

Solution de l'exercice 2
Introduire $Q(X) = P(X^2)$ et l'exprimer comme polynôme d'interpolation de Newton ou de Lagrange (même principe que les polynômes de Hermite, exercice 10 du cours complet mentionné au début de cette section).

Solution de l'exercice 3
0 est racine de $P(X)$ et -2019 est racine de $P(X+1)$, ie -2018 est racine de $P(X)$. On peut donc factoriser P : $P(X) = X(X+2018)$ pour un certain polynôme Q, et l'équation nous donne après simplification $(X+2018)Q(X) = (X+1)Q(X+1)$. En suivant cette idée, on peut montrer que $(X+k)(X+2018-k)$ divise $P(X)$ pour tout k entre 0 et 2018. On peut donc écrire $P(X) = \Pi_{k=0}^{2}018(X+k) \times Q(X)$ et l'équation donne $Q(X) = Q(X+1)$, ce qui implique que Q est constant (il prend une infinité de fois la valeur $Q(0)$).

Solution de l'exercice 4
Notons $a_i, 1 \leqq i \leqslant n$ les racines de P. Les relations de Viète (ou relations coefficients-racines) imposent $\Sigma a_i = 1$, $\Pi a_i = \pm 2$ and $\Sigma_{i<j} a_i a_j = 0$. On en déduit $\Sigma a_i^2 = (\Sigma a_i)^2 - 2\Sigma a_i a_j = 1$. Cela implique que si tous les a_i étaient réels ils seraient de valeur absolue inférieure à 1, ce qui contredit $\Pi|a_i| = |2|$.

D'autres méthodes sont possibles, notamment en regardant la dérivée de P.

Solution de l'exercice 5
Exprimer P comme polynôme d'interpolation de Lagrange. P unitaire impliqe $\sum_{j=0}^{n} P(j)\frac{(-1)^{(n-j)}}{j!(n-j)!} = 1$. En posant $\delta = \max(|P(0)|, \ldots |P(n)|)$ on déduit $\delta \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!(n-j)!} \geqslant 1$, d'où $\delta \geqslant \frac{n!}{2^n}$. Cette valeur est atteinte uniquement pour le polynôme unitaire tel que $P(j) = (-1)^j \frac{n!}{2^n}$ pour tout $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

Solution de l'exercice 6
On considère le polynôme $Q(X) = \Pi(X+b_j)$. Q prend la même valeur en $a_1, \ldots a_n$. Donc les a_i sont racines de $Q(X) - Q(a_1)$, et $Q(X) - Q(a_1) = c\Pi_{i=1}^{n}(X - a_i)$. Alors pour tout b_j, $\Pi_{i=1}^{n}(a_i + b_j) = (-1)^n \Pi_{i=1}^{n}(-a_i - b_j) = \frac{(-1)^n}{c}(Q(-b_j) - Q(a_1))$, qui ne dépend pas de j car $Q(-b_j) = 0$.

Exercices tirés de l'IMO, non corrigés en cours

Exercice 7 (Shortlist IMO 2017, A1)
Soient $a_1, \ldots, a_n, k, M$ des entiers strictement positifs tels que $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = k$ et $\Pi_{i=1}^{n} a_i = M$. Si $M > 1$, montrer que le polynôme $P(x) = M(x+1)^k - (x+a_1)\ldots(x+a_n)$ n'a pas de racine strictement positive.

Solution de l'exercice 7
Indication : prouver d'abord l'inégalité $a_j(x+1)^{\frac{1}{a_j}} \leqslant x + a_j$.

Exercice 8 (IMO 2016, pb5)
On écrit l'égalité suivante : $(x-1)\ldots(x-2020) = (x-1)\ldots(x-2020)$. Quel est le nombre minimal de facteurs à effacer pour qu'il n'y ait pas de solutions réelles.

Exercice 9 (Shortlist IMO 2016 , N1)
On note S la fonction qui a un entier n associe la somme de ses chiffres. Trouver les polynômes P à coefficients entiers tels que pour tout $n \geqslant 2019$, $P(n) > 0$ et $S(P(n)) = P(S(n))$.

Solution de l'exercice 8
Indications : deux solutions, regarder le degré ou regarder des n pertinents.

Exercice 10 (IMO 2006, pb 5)
Soit P un polynôme de degré $n > 1$ et k un entier non nul. Posons $Q(x) = P(\dots(P(x))\dots)$, où P apparaît k fois. Montrer qu'il y a au plus n solutions entières à l'équation $Q(x) = x$.

2 Monovariants, théorie des jeux (Raphaël Ducatez)

Ce cours de combinatoire a été l'occasion de travailler sur des exos divers de combinatoire, à savoir :

- Les exercices de combinatoire posés à l'entrainement olympique du 23 août au groupe B et C.
- Les 4 premiers exos du TD de Guillaume CK du poly de Montpellier 2014.
- Une petite parenthèse sur les nombres de Catalan

3 Double comptage sur des graphes (Colin Davalo)

Nombre chromatique

Dans ce qui suit nous allons travailler sur des graphes simples, non-orientés.

Définition 1.
Un coloriage propre de $G = (S, A)$ est un coloriage c tel que si $(a, b) \in A$, alors $c(a) \neq c(b)$. Autrement dit deux voisins sont de couleurs différentes.

Soit G un graphe. Le nombre chromatique de G est le nombre minimal k de couleurs nécessaires pour effectuer un coloriage propre de G avec k couleurs. Ce nombre s'écrit $\chi(G)$.

Exercice 1
Soit G un graphe de degré maximal D. Monter que :

$$\chi(G) \leqslant D + 1$$

Solution de l'exercice 1
Il suffit de montrer l'existence d'un coloriage propre de G en $D + 1$ couleurs. Pour cela il suffit de colorier les sommets un par un. Si à un moment on manque de couleurs, cela signifie qu'un sommet a au moins $D + 1$ voisins ce qui est impossible

Pour rappel, un sous-graphe est un graphe obtenu en supprimant des arrêtes et des sommets.

Exercice 2
Soit G un graphe dont le degré moyen des sommets est D, alors il contient un sous-graphe $H \subset G$ tel que le degré minimal $d_{\min}$ de H satisfait $d_{\min} \geqslant \frac{D}{2}$.

Solution de l'exercice 2
On procède de manière gloutonne, et par récurrence sur $n \geqslant 1$. Si $n = 1$ le résultat est vrai : le degré moyen est égal au degré maximal et minimal.

Supposons le résultat vrai pour $n-1$ sommets. Soient $d_1 \leqslant d_2 \leqslant d_3 \leqslant \cdots \leqslant d_n$ les degrés des sommets de G. Si $d_1 \geqslant \frac{D}{2}$, alors le résultat est déjà vrai. Sinon on va supprimer le sommet de degré minimal. Après avoir supprimé le sommet d_1, alors exactement d_1 autres sommets perdent un voisin et le degré moyen vaut :

$$\frac{d_2 + d_3 + \cdots + d_n - d_1}{n-1} = \frac{nD - 2d_1}{n-1} = D + \frac{D - 2d_1}{n-1}$$

Or $d_1 \leqslant \frac{D}{2}$, donc le sous-graphe obtenu à un degré moyen qui vaut au moins D. Par hypothèse de récurrence, on peut trouver un sous graphe de degré minimal au moins $\frac{D}{2}$, qui est également un sous graphe du graphe initial, d'où le résultat.

Exercice 3
Soit G un graphe avec m arrêtes. Montrer que :

$$\chi(G) \leqslant \sqrt{2m} + 1$$

Solution de l'exercice 3
On considère un coloriage propre de G à $\chi(G)$ couleurs les sommets de G sont ainsi partitionnés selon leur couler en des ensembles $A_1, \cdots, A_{\chi(G)}$. Soient A_i et A_j deux de ces ensembles, alors il existe une arrête entre un sommet de A_i et un sommet de A_j puisque sinon on pourrait colorier A_i et A_j de la même couleur, et avoir un coloriage propre de G en moins de $\chi(G)$ couleurs. Ainsi $m \geqslant \binom{\chi(G)}{2}$, c'est à dire que $\chi(G)^2 - \chi(G) + 2m$ est positif. C'est un polynôme de degré 2 en $\chi(G)$ de coefficient dominant strictement positif, dont les racines sont $\frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$ et $\frac{1}{2} - \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$. Puisque la seconde racine est négative, il faut que $\chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$.

En réalité on a montré le résultat suivant, très légèrement plus fort :

$$\chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$$

Exercice 4
Un Physicien fou a découvert une particule appelée imon. Certaines paires de ses particules sont intriquées. Le Physicien parvient à faire les deux opérations suivantes, une seule à la fois :

(i) Si un imon est intriqué avec un nombre impair d'autres imons, alors il peut le supprimer.

(ii) Il peut doubler l'ensemble des imons qu'il possède, en copiant chaque imon. Les copies de deux imons intriqués sont eux mêmes intriqués, et chaque imon est intriqué avec sa copie. Aucune autre intrication d'apparaît.

Montrer que quelque soit la configuration initiale, le physicien peut s'assurer de n'avoir après un certain nombre d'opérations, aucune paire d'imons intriqués.

Solution de l'exercice 4

On identifie les imons du physicien à un graphe G, dont les arrêtes représentent les paires intriquées. L'idée ici est de montrer que le physicien peut faire décroitre le nombre chromatique du graphe jusqu'à valoir 1. En effet considérons un coloriage propre du graphe en $\chi(G) = k > 1$ couleurs. On peut enlever des sommets du graphe jusqu'à ce que tous les sommets soient de degré pair (notre coloriage reste alors propre).

Ensuite on applique la seconde opération, et on décide que si les couleurs son $c_1, \cdots, c_k$, alors on colorie la copie d'un sommet de couleur c_i de la couleur c_{i+1} (en supposant $c_{k+1} = c_1$). Ainsi on a toujours un coloriage propre à k couleurs.

Enfin tous les sommets sont de degré impair, et on peut donc enlever tous les sommets de la couleur c_k. En effet enlever un sommet de couleur c_k n'influe pas sur la parité du degré des autres sommets de couleur c_k. Ainsi On a un graphe qui admet un coloriage propre en $k-1$ couleurs.

Lorsque $\chi(G) = 1$, on a atteint un graphe sans aucune arête, ce qui était l'objectif désiré.

Lemme des mariages de Hall

Voici le lemme des mariages de Hall.

Lemme 2.

Considérons un ensemble X de n filles et un ensemble Y de n garçons. Chaque fille x apprécie un ensemble $A(x)$ de garçons.

On suppose qu'il n'y a pas de groupes de filles trop exigentes, c'est à dire que pour tout ensemble $X_0 \subset X$ de filles alors $|X_0| \leqslant |\cup_{x \in X_0} A(x)|$. Alors il est possible de marier chaque fille avec un garçon de façon bijective, et de sorte que toutes les paires fille/garçon s'apprécient.

Exercice 5

Le petit Nicolas découpe deux feuilles carrées de côté 2019 en 2019^2 polygones d'aire 1 de deux facons différentes. Ensuite il remet les morceaux ensemble et superpose les deux feuilles. Montrer qu'il peut planter 2019^2 punaises à travers les deux feuilles de façon à ce tous les polygones soient percés.

Solution de l'exercice 5

On applique le lemme des mariages de Hall avec les polygones de la première feuille à la place des filles, les polygones de la seconde feuille à la place des garçons et deux polygones sont compatibles si lorsque l'on superpose les feuilles il ont un point d'intersection. Pour un ensemble X_0 de polygones, l'union des polygones compatibles avec ceux-ci englobe l'union des polygones de X_0, et par conséquent leur aire vaut au moins le cardinal de X_0 Par conséquent le lemme peut être appliqué, et on en déduit l'existence d'une bijection entre les 2019^2 polygones de chaque côté.

Il reste à prendre pour chaque paire un point où elles se chevauchent, et à planter une punaise à cet endroit.

Exercice 6

Dans une grille 8×8 des cailloux sont posés sur certaines cases de sorte que sur chaque ligne et chaque colonne il y a exactement 3 pierres. Montrer qu'il existe un ensemble de n pierres telles que deux d'entre elles ne sont jamais sur la même ligne ou colonne.

Solution de l'exercice 6
On applique encore le lemme des mariages de Hall. Les colonnes ici jouent le rôle des filles, et les lignes jouent celui des garçons. Une ligne et une colonne sont compatibles si il y a un cailloux à leur interection.

Si on considère k lignes, elles contiennent $3k$ pierres réparties sur ℓ colonnes. Or chaque colonne contient au plus 3 pierres parmis les $3k$ pierres, donc $\ell \geqslant k$.

Ainsi le lemme des mariage de Hall nous donne$n$ paires de lignes et colonnes dont les points d'intersections contiennent des pierres : ces n pierres conviennent.

Théorie des graphe extrémale

Voici deux théorèmes de théorie des graphes extrémale.

Théorème 3 (Théorème de Mantel)**.**
oit G un graphe à n sommets et m arrêtes qui ne contient aucun triangle. Alors :

$$m \leqslant \frac{n^2}{4}$$

Théorème 4 (Théorème de Turàn)**.**
oit G un graph à n sommets et m arrêtes qui ne contient aucune k-clique pour un certain $k \geqslant 3$. Alors :

$$m \leqslant \frac{n^2(k-2)}{2(k-1)}$$

Leurs démonstrations peuvent se trouver dans le polycopié sur la théorie des graphes d'Animaths par exemple. De plus en un certain sens ces théorèmes sont optimaux (les bornes ne peuvent être améliorées qu'en prenant la partie entière, mais pas plus).

Exercice 7
(OIM, Problème 4). Soit $S = \{1, 2, \cdots, 1000000\}$, soit $A \subset S$ un ensemble de 101 éléments. Montrer qu'il existe des entiers $t_1, \cdots, t_{100}$ dans S tels que les ensembles :

$$A_j = \{t_j + a | a \in A\}$$

Soient disjoints deux à deux.

Solution de l'exercice 7
On considère le graphe contenant 1000000 sommets, et on relie les entiers x et y si $\{x+a|a \in A\}$ et $\{y + a|a \in A\}$ sont disjoints, ce qui revient à dire que $x - y \notin \{a - b|a, b \in A\}$.

Pour appliquer le théorème de Mantel, il faut montrer que ce graphe a au moins $\frac{98 \times 1000000^2}{2 \times 99}$ arrêtes. Cependant il y a au plus 101^2 éléments dans $\{a - b|a, b \in A\}$, ainsi chaque sommet a au plus 101^2 voisins, donc il y a au plus $\frac{1000000 \times 101^2}{2}$ arrêtes.

Or $98 \times 10^{12} \geqslant 10^{13} \geqslant 99 \times 1000000 \times 101^2$, donc il existe bien une 100-clique qui convient.

Exercice 8
Soit G un graphe à n sommets et m arrêtes sans 3-cycles ni 4-cycles. Montrer que $m \leqslant \frac{n\sqrt{n-1}}{2}$.

Solution de l'exercice 8

Exercice 9
Soit g un graphe à n sommets et m arrêtes qui ne contient aucun 4-cycle. Montrer que :

$$m \leqslant \frac{n}{4}(1 + \sqrt{4n-3})$$

Solution de l'exercice 9
On compte le nombre de triplets de sommets distincts $\{x, y, z\}$ avec $\{x, y\}$ ainsi que $\{y, r\}$ reliés par un arrête dans le graphe G. On note ces triplets des "V".

Soient $d_1, d_2, \cdots, d_n$ sont les degrés des sommets de G. Si on compte les "V" en fixant tout d'abord le somme y puis en cherchant x et z on trouve que le nombre de "V" est $N = \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$.

Or si on fixe $\{x, y\}$ une paire de sommets son reliés, il y a au plus une manière de compléter cette paire en un triplet formant un "V". Ainsi $N \leqslant \binom{n}{2} - m$.

Il ne reste plus qu'à utiliser ces inégalités, sachant que la somme des degrés vaut $2m$. La somme des carrés apparaît à un moment ou un autre, et on s'en débarasse en utilisant l'inégalité de Jensen ou Cauchy-Schwarz, ou encore quadratico-arithmétique.

$$\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \leqslant \binom{n}{2} - m$$

$$\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - 2m \leqslant n(n-1) - 2m$$

$$(\sum_{i=1}^{n} d_i)^2 \leqslant n(n-1)$$

$$4m^2 \leqslant n^2(n-1)$$

$$m \leqslant \frac{n\sqrt{n-1}}{2}$$

D'où le résultat.

Exercice 10
(APMO 1989) Soit G un graphe à n sommets et m arrêtes. Soit T le nombre de triangles de ce graphe, montrer que :

$$T \geqslant \frac{m(4m-n^2)}{3n}$$

Solution de l'exercice 10
On va dénombrer de deux manières différentes le nombre N de triplet en ordonné (x, y, z) tel que $\{x, y\}$ et $\{y, z\}$ sont reliés. Soient $d_1, d_2, \cdots, d_n$ sont les degrés des sommets de G.

Chaque triplet non ordonné de points formant un triangle correspond à 6 triplets considérés, donc $6T \leqslant N$.

Si on choisit le point y, puis la paire $\{x, z\}$, le nombre de tels triplets obtenus est $\sum_{i=1}^{n} d_i(d_i - 1)$.

Il ne reste plus qu'à calculer ce que cela nous donne :

$$T \geqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} d_i^2 - d_i}{6}$$

De même que pour l'exercice précédent, on minore la somme des carrés des degrés.

$$T \geqslant \frac{8\frac{m^2}{n} - 2m}{6}$$

$$T \geqslant \frac{4m^2 - mn^2}{3}$$

D'où le résultat.

Exercice 11
Soit G un graphe à $2n$ sommets et m arrêtes qui n'admet pas comme sous graphe deux triangles ayant une arrête en commun (ou un K_4 diminué d'une arrête). Montrer que $m \leqslant n^2+1$.

Solution de l'exercice 11
On raisonne par récurrence sur n. Pour $n = 2$, c'est clair. Supposons que c'est vrai pour n, et considérons un graphe G avec $2(n+1) = 2n+2$ sommets et $(n+1)^2+1 = n^2+2n+2$ arêtes. D'après le théorème de Mantel, il contient un triangle formé de trois sommets u, v, w. Parmi les sommets du triangle, il y en a deux, disons u et v, dont les degrés ont la même parité. Considérons le sous-graphe de G obtenu en supprimant u et v ainsi que les arêtes qui en partent. Si le sous-graphe en question a au moins n^2+1 arêtes, on a fini par hypothèse de récurrence. Sinon, cela veut dire qu'au moins $2n+2$ arêtes de G ont au moins une extrémité appartenant à l'ensemble $\{u, v\}$. Puisque u et v sont reliés par une arête, le nombre de telles arêtes est également donné par la quantité $d(u)+d(v)-1$, qui est impaire car $d(u)$ et $d(v)$ sont de même parité. Ainsi,

$$d(u) + d(v) - 1 \geqslant 2n + 2.$$

Le nombre d'arêtes partant de u ou de v et différentes de uv, uw, vw est donc supérieur ou égal à $2n$. Puisqu'il n'y a que $2n-1$ sommets différents de u, v, w, par le principe des tiroirs il y en a au moins relié relié aussi bien à u qu'à v, ce qui conclut.

Exercice 12
Dans un pays il y a $n \geqslant 5$ villes. Desservies par deux compagnies aériennes. Toute paire de ville est reliée éventuellement par une de ces compagnies. Cependant chaque compagnie a interdiction de proposer un cycle de longueur inférieur strictement à 6. Montrer que les deux compagnies ont à elles deux moins de $\left[\frac{n^2}{3}\right]$ vols.

Solution de l'exercice 12
On considère le graphe G dont les sommets sont les n villes, deux villes étant reliées par une arête rouge ou bleue si l'une ou l'autre des deux compagnies propose un vol direct entre ces villes. L'hypothèse de l'énoncé signifie qu'il n'y a pas de 3-, 4- ou 5- cycles monochromes.

Raisonnons par l'absurde et supposons que le nombre d'arêtes est strictement plus grand que $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$. Alors d'après le théorème de Turán, G contient K_4. Avec la condition sur les 3- et 4-cycles, on vérifie facilement que si on appelle A_1, A_2, A_3, A_4 les sommets de cette copie H de K_4 à l'intérieur de G, quitte à les renommer, les arêtes A_1A_2, A_2A_3 et A_3A_4 sont rouges et les autres sont bleues.

Regardons alors les $n-4$ autres sommets. Chacun de ces sommets ne peut être relié par plus de deux arêtes à des sommets de H. En effet, s'il y en a 3, il y en a deux de la même couleur, qui avec celles de H forment soit un 3-cycle, soit un 4-cycle, ce qui contredit l'énoncé.

Cette remarque nous permet d'éliminer les cas $5 \leqslant n \leqslant 8$. En effet, le nombre d'arêtes de notre graphe est au plus

$$\underbrace{6}_{\text{arêtes de } H} + \underbrace{2(n-4)}_{\text{arêtes entre } H \text{ et } G\backslash H} + \underbrace{\binom{n-4}{2}}_{\text{arêtes de } G\backslash H}.$$

On vérifie que c'est inférieur à $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ pour $5 \leqslant n \leqslant 8$. La conclusion de l'énoncé est donc vraie pour ces valeurs de n.

Supposons donc maintenant que $n \geqslant 9$, et faisons une récurrence, initialisée par ce que nous venons de montrer : par hypothèse de récurrence, le résultat est vrai pour $G\backslash H$, graphe à $n-4 \geqslant 5$ sommets. Le nombre d'arêtes de $G\backslash K$ est donc inférieur ou égal à $\frac{(n-4)^2}{3}$. Alors le nombre d'arêtes de G est inférieur ou égal à

$$6 + 2(n-4) + \frac{(n-4)^2}{3}.$$

Nous avons donc $6 + 2(n-4) + \frac{(n-4)^2}{3} \geqslant \frac{n^2}{3}$, ce qui donne $n \leqslant 5$, contradiction.

Exercice 13

Soit G un graphe sans 5-clique et tel que toute paire de triangle partage un sommet commun. Montrer que l'on peut retire deux sommets afin d'enlever tous les triangles du graphe.

Solution de l'exercice 13

Nous allons distinguer plusieurs cas.

1. Le graphe contient une copie de K_4, dont nous appellerons les sommets A, B, C, D. Tout triangle contient alors au moins deux sommets parmi A, B, C, D. Supposons qu'il existe deux triangles contenant deux paires de sommets disjointes parmi A, B, C, D : sans perte de généralité, nous pouvons les appeler EAB et FCD. Ces deux triangles ont un sommet en commun, donc $E = F$. Nous aboutissons alors à une contradiction car $EABCD$ est dans ce cas un graphe complet à 5 sommets. Soit maintenant un triangle, que nous pouvons sans perte de généralité noter EAB. Alors d'après ce qui précède tout autre triangle doit nécessairement contenir A ou B. Ainsi, il suffit de supprimer les points A et B pour ne plus avoir de triangle.
2. Le graphe ne contient pas K_4, mais contient K_4 privé d'une arête, c'est-à-dire deux triangles partageant un côté. Notons A, B, C, D ces sommets, avec A et D non reliés. Un triangle qui ne contient ni B, ni C, doit, pour avoir un sommet en commun avec ABC et BCD, contenir A et D, ce qui est impossible car A et D ne sont pas reliés. Donc tout triangle contient B ou C. Il suffit donc de supprimer B et C.

3. Deux triangles quelconques ont exactement un sommet en commun. Soient ABC et ADE des triangles, avec B, C, D, E nécessairement tous distincts. Soit un autre triangle, et supposons qu'il ne contient pas A. Alors sans perte de généralité, nous pouvons supposer qu'il contient B et D. Cela veut dire que B et D sont reliés, ce qui fait apparaître un triangle ABD ayant deux sommets en commun avec ABC, contradiction. Ainsi, tout triangle contient A et il suffit de supprimer A.

Exercice 14

(Shortlist 2012) On se donne 2^{500} points sur un cercle, numérotés de 1 à 2^{500} dans un certain ordre. Montrer qu'il existe 100 cordes disjointes deux à deux reliant certains de ces points, telles que la somme des nombres aux extrémités de chaque corde sont égales.

Solution de l'exercice 14

Dans toute la suite pour simplifier nous noterons $n = 2^{499}$, de sorte qu'il y a $2n$ points numérotés $1, \dots, 2n$ et que les sommes différentes possibles aux extrémités d'une corde sont $3, 4, \dots, 4n-1$. On considère des couleurs que l'on appelle $c_3, c_4, \dots, c_{4n-1}$ et on colorie une corde avec la couleur c_i si la somme des nombres à ses extrémités est i. Ainsi, deux cordes ayant exactement une extrémité en commun auront des couleurs différentes.

Pour chaque couleur c, on considère le graphe G_c dont les sommets sont les cordes de couleur c, et dont deux sommets sont reliés par une arête s'ils correspondent à des cordes qui ne sont pas disjointes. Le but est de montrer qu'il existe une couleur c telle que G_c contienne un ensemble de 100 sommets indépendants. Pour cela, nous allons utiliser le résultat de l'exercice 12, en montrant que la moyenne des quantités $f(G_c) = \sum_{v \in G_c} \frac{1}{1+d(v)}$ sur tous les graphes G_c est strictement supérieure à 100.

Chaque corde ℓ divise le cercle en deux arcs, et par le principe des tiroirs l'un des deux arcs contient un nombre $m(\ell)$ de points inférieur ou égal à $n-1$ en son intérieur. Pour tout $i = 0, 1 \dots, n-2$, il y $2n$ cordes ℓ avec $m(\ell) = i$. Une telle corde a un degré inférieur ou égal à i dans le graphe G_c correspondant à sa couleur c : en effet, les cordes de couleur c qu'elle intersecte doivent nécessairement avoir une extrémité parmi les i points du « petit »arc qu'elle intercepte, et deux cordes de même couleur ont des extrémités distinctes.

D'après ce que nous venons de voir, pour tout $i \in \{0, \dots, n-2\}$, les $2n$ cordes ℓ telles que $m(\ell) = i$ contribuent au moins avec un terme $\frac{2n}{1+i}$ à la somme $\sum_c f(G_c)$. Il y a $4n-3$ couleurs en tout, donc en prenant la moyenne sur toutes les couleurs, cela donne qu'il existe une couleur c telle que

$$f(G_c) \geqslant \frac{2n}{4n-3} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} > \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i}.$$

Il reste donc à montrer que $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} > 200$ pour $n = 499$. Or

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i} &= 1 + \sum_{k=1}^{499} \sum_{i=2^{k-1}+1}^{2^k} \frac{1}{i} \\
&> 1 + \sum_{k=1}^{499} \frac{2^{k-1}}{2^k} \\
&= 1 + \frac{499}{2} > 200,
\end{aligned}$$

ce qui conclut.

Exercice 15
Soit G un graphe avec n sommets, de degrés respectifs $d_1, \cdots, d_n$. Montrer qu'il existe un ensemble indépendant contenant au moins :

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{d_i + 1}$$

sommets.

Solution de l'exercice 15
Il existe une preuve probabiliste de ce résultat, qui peut être trouvée sur le site internet de la POFM (Exercice 5 page 328 du poly du stage d'été 2014)

http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/stage_ete_2014.pdf

Il se trouve que ce résultat est plus fort que le théorème de Turàn : trouver un ensemble indépendant revient à trouver une k-clique si on relie uniquement les paires non reliées par un segment. En appliquant Jensen pour se ramener au cas où tous les degrés sont égaux, après quelques calculs, on tombe exactement sur le théorème de Turàn.

4 Équations fonctionnelles (Théodore Fougereux)

Exercice 1
Soit f une bijection de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$. Existe-t-il nécessairement un n tel que $\{1, 2, ..., n\}$ soit une permutation de $\{f(1), f(2), ..., f(n)\}$?

Solution de l'exercice 1
On peut prendre la fonction définie par $f(3n+1) = 4n+2$, $f(3n+2) = 4n+4$ $f(3n) = 2n+1$, qui est un exemple parmi beaucoup d'autres...

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telles que :

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

Pour tout $m, n > 0$

Solution de l'exercice 2
Posons $m = f(n)$:

$$f(n) \mid f(n)^2 + f(n) \mid f(n)f(f(n)) + n \implies f(n) \mid n$$

On a donc $f(n) \leq n$ (et $f(1) = 1$ en particulier). Posons $m = n$ pour obtenir :

$$n^2+f(n) \mid nf(n)+n \implies n^2+f(n) \leq nf(n)+n \implies n(n-1) \leq (n-1)f(n) \implies n \leq f(n) \quad \text{Pour } n > 1$$

Donc $f(n) = n$ pour tout n. **Idées importantes :** Essayer de déduire des inégalités des divisibilités.

Exercice 3
Trouver toutes toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que :

$$n + f(m) \mid f(n) + nf(m)$$

Solution de l'exercice 3
On commence par remarquer que $f(m) \equiv -n \pmod{n + f(m)}$, on a donc :

$$n + f(m) \,|f(n) + n \cdot (-n) = f(n) - n^2$$

Si $f(m)$ prend une infinité de valeurs, $f(n) - n^2$ a une infinité de diviseurs et vaut 0. Donc $f(n) = n^2$ dans ce cas. Sinon $f(n) \leq M$ pour un certain M. On a également pour tout m fixé :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{nf(m) + f(n)}{n + f(m)} = f(m)$$

Donc on en déduit, pour tout m fixé et pour n grand :

$$\frac{nf(m) + f(n)}{n + f(m)} = f(m) \iff nf(m) + f(n) = nf(m) + f(m)^2 \iff f(n) = f(m)^2$$

Donc $f(n)$ est constante et vaut 1.

Exercice 4
Trouver le plus petit entier n tel qu'il existe des polynômes $f_1, f_2, ..., f_n$ tels que :

$$f_1(x)^2 + f_2(x)^2 + ... + f_n(x)^2 = x^2 + 7$$

Solution de l'exercice 4
On montre que l'équation $a^2 + b^2 + c^2 = 7d^2$ n'a pas de solutions non toutes nulles, ce qui finit $n = 1, 2, 3$ en regardant le coefficient constant. De plus les f_i sont affines puisque sinon le degré est trop grand, donc il existe un i et un t tel que $f_i(t) = \pm t$ pour $n = 4$, on se ramène au cas $n = 3$ étudié. Donc $n \geq 5$ et $(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = (1, 1, 1, 2, x)$ conviennent.

Idées importantes : Regarder le degré lorsqu'on a affaire à des polynômes, essayer de fixer des valeur particulière quand on a beaucoup de liberté. :

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ telles que $f(p) > 0$ pour tout p premier et telles que pour tout p premier et pout tout x :

$$p|(f(x) + f(p))^{f(p)} - x$$

Solution de l'exercice 5
On prend $x = p$ premier impair, qui donne $p|f(p)$ pour tout p premier impair. En particulier, $x = 0$ donne $p|f(0)$ pour tout p premier impair, donc $f(0) = 0$. Avec $x = 0$ et $p = 2$, on obtient $2|f(2)$.
Montrons maintenant que $f(q)$ n'a que q comme facteur premier. Soit p un facteur de $f(q)$, prenons $x = q$, cela donne :

$$p|(f(p) + f(q))^{f(p)} - q \implies p|q$$

Ce qui est évidemment impossible. Donc $f(q) = q^{\alpha}$. On a donc en particulier $f(p) \equiv 0 \pmod p$ et $f(x)^{f(p)} \equiv f(x) \pmod p$ par petit fermat, donc :

$$p|(f(x) + f(p))^{f(p)} - x \implies p|f(x)^{f(p)} - x \implies p|f(x) - x$$

Donc $f(x) - x$ a une infinité de diviseurs et vaut 0.

Idées importantes : Quand on soupçonne que seule les puissances de l'identité sont solutions, essayer de montrer que $f(n)$ a les mêmes facteurs premiers que n. Trouver une infinité de diviseurs premiers aux valeurs qu'on pense nulle.

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ qui vérifient :

$$f^{abc-a}(abc) + f^{abc-b}(abc) + f^{abc-c}(abc) = a + b + c$$

Pour tout $a, b, c \geq 2$ Où $f^k(n)$ désigne la composée k-ème de f.

Solution de l'exercice 6
La solution est $f(n) = n-1$ pour tout $n \geq 3$ avec $f(1)$ et $f(2)$ arbitraire ; et on vérifie facilement qu'elle marche. .

lemme On a $f^{t^2-t}(t^2) = t$ pour tout $t \geq 2$
Preuve On dit que $1 \leq k \leq 7$ est bon si $f^{t^9-t^k}(t^9) = t^k$. On remarque d'abord que :

$$f^{t^9-t^3}(t^9) = t^3$$
$$f^{t^3-t}(t^3) = t \implies f^{t^9-t}(t^9) = t$$

Donc $k = 1$ et $k = 3$ sont bons. En prenant $(a, b, c) = (t, t^4, t^4)$, $(a, b, c) = (t, t^3, t^5)$, $(a, b, c) = (t^2, t^2, t^5)$, on obtient que 4, 5, 2 sont bons aussi. On a donc :

$$f^{t^2-t}(t^2) = f^{t^2-t}(f^{t^9-t^2}(t^9)) = f^{t^9-t}(t^9) = t$$

■

Soit $t = abc$ on combine :

$$f^{t-a}(a) + f^{t-b}(b) + f^{t-c}(c) = a + b + c$$
$$f^{t^2-ab}(t^2) + f^{t^2-t}(t^2) + f^{t^2-c}(t^2) = ab + t + c$$
$$\implies \left[f^{t-a}(t) - a\right] + \left[f^{t-b}(t) - b\right] = \left[f^{t-ab}(t) - ab\right]$$

En soustrayant et en appliquant le lemme précédent. Donc si $p > q > \max\{a, b\}$ sont premiers, en posant $s = a^p b^q$ et $t = s^2$ on obtient :

$$p\left[f^{t-a}(t) - a\right] + q\left[f^{t-b}(t) - b\right] = \left[f^{t-s}(s) - s\right] = 0.$$

Comme $q \mid f^{t-a}(t) - a$, $p \mid f^{t-b}(t) - b$, on peut conclure que $f^{t-a}(t) = a$ et $f^{t-b}(t) = b$ pour tout $a, b \geq 2$, avec $t = a^p b^q$. En particulier si $a = n$ et $b = n + 1$ on déduit $f(n + 1) = n$.

– Algèbre –

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$ telles que :

$$f(2a) + 2f(b) = f(f(a+b))$$

Bonus : Remplacer $\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Q}$

Solution de l'exercice 7
On note $P(a,b)$ la propriété de l'énoncé. On a :

$$P(0,b) \iff f(f(b)) = 2f(b) + f(0) \quad (1)$$

$$P(a,0) \iff f(2a) = f(f(a)) - 2f(0) = 2f(a) + f(0) - 2f(0) = 2f(a) - f(0) \quad (2)$$

En substituant (1) et (2) dans l'inégalité de départ, on trouve :

$$2f(a) - f(0) + 2f(b) = 2f(a+b) + f(0)$$

$$\iff f(a) + f(b) = f(0) + f(a+b) \quad (\star)$$

Avec $b = 1$, on trouve que $f(a+1) - f(a) = f(1) - f(0)$, donc f est affine, et une vérification rapide donne $f(x) = 2x$ ou $f(x) = 0$.
Pour résoudre l'équation dans $\mathbb{Q}$, on pose $g(x) = f(x) - f(0)$. Par $\star$, l'équation devient :

$$g(a+b) = g(a) + g(b)$$

On reconnait l'équation de Cauchy, donc g est linéaire et f affine, en vérifiant à la main on trouve $f \equiv 0$ ou $f \equiv 2x$.

Exercice 8
Trouver tous les polynômes unitaires P, Q de $\mathbb{Q}[X]$ tels que :

$$P(x)^3 + Q(x)^3 = x^{12} + 1$$

Solution de l'exercice 8
On commence par factoriser, ce qui donne :

$$(P(x) + Q(x))(P^2(x) - P(x)Q(x) + Q^2(x)) = (x^8 - x^4 + 1)(x^4 + 1)$$

On reconnaît des polynômes cyclotomiques, qui sont irréductibles. Comme P, Q sont unitaires, $P + Q$ a un degré plus grand que 1, de plus le degré de $P^2 - PQ + Q^2$ est au moins $2 \cdot \max(deg(P), deg(Q))$, donc le degré du deuxième facteur est plus grand que le premier. De plus, on reconnaît deux polynômes cyclotomiques, qui sont donc irréductibles dans $\mathbb{Q}[x]$. Donc la seule possibilité pour respecter les conditions de degré est :

$$\begin{cases} P + Q = \dfrac{1}{C}(x^4 + 1) \\ P^2 - PQ + Q^2 = C(x^8 - x^4 + 1) \end{cases}$$

Le coefficient dominant de $P^2 - PQ + Q^2$ est toujours 1, donc $C = 1$. On a alors :

$$3PQ = (P+Q)^2 - (P^2 - PQ + Q^2) = (x^4+1)^2 - (x^8 - x^4 + 1) = 3x^4$$

Si $x|P,Q$, on a $x|x^{12}+1$, absurde. Donc $P=1$ et $Q=x^4$ ou l'inverse.
Idée importantes : Toujours penser à factoriser un polynôme quand on le peut. Regarder les coefficient de plus haut et plus bas degré.

Exercice 9
Trouver les fonctions $f:\mathbb{R}\leftarrow\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x+y)+y\leq f(f(f(x)))$$

Solution de l'exercice 9
Soit $y=f(f(x))-x$. On a alors :

$$f(f(f(x)))+f(f(x))-x\leq 0 \implies f(f(x))\leq x$$

Soit $z=x+y$. Il vient :

$$f(z)+z-x\leq f(f(f(x)))$$

Par ce qui précède :

$$f(z)+z-x\leq f(x) \iff f(z)+z\leq f(x)+x$$

Or ceci est valable pour tout x,z donc $f(x)+x$ est constant. Soit $f(x)=-x+C$, réciproquement on vérifie facilement que ces fonctions sont solutions.

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}_{>0}$ dans $\mathbb{R}_{>0}$ telles que :

$$f(x)f(y)=2f(x+yf(x))$$

Solution de l'exercice 10
Si c'est possible, on peut essayer :

$$y=x+yf(x) \iff y=\frac{x}{1-f(x)}$$

Donc si $f(x)\leq 1$, on peut peut choisir x,y tels que $y=x+yf(x)$, et donc $f(x)=2$, absurde! Donc $f(x)>1$ pour tout x. Prenons $x=y$. Cela donne :

$$f(x)^2=2f(x+xf(x))$$

Comme $f(x+xf(x))$ est plus grand que 1, $f(x)$ est plus grand que $\sqrt{2}$, donc $f(x+xf(x)$ est plus grand que $\sqrt{2}$, puis $f(x)$ est plus grand que $\sqrt{2\sqrt{2}}$. En poursuivant ainsi $f(x)\geq 2^{1/2+1/4+1/8+\cdots}=2$ pour tout x. Quand y parcourt $\mathbb{R}$, $x+yf(x)$ parcourt les réels plus grand que x. De plus $f(y)\geq 2$, donc pour tout y :

$$\frac{f(x+yf(x))}{f(x)}\geq 1$$

Autrement dit, f est croissante.
Supposons qu'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) = 2$. Dans ce cas on remarque qu'avec $x = y = x_0$ on a :

$$f(x_0)^2 = 2f(x_0 + x_0 f(x_0)) \implies f(x_0 + x_0 f(x_0)) = 2$$

On définit la suite a_n par $a_0 = x_0$ et $a_{n+1} = a_n + a_n f(a_n)$. D'après ce qui précède, on a $f(a_n) = 2$ pour tout n, et comme $f(a_n) \geq 2$, (a_n) diverge, ce qui implique $f(a_n) = 2$ pour tout n, ce qui implique que $f(x) = 2$ pour tout x par croissance de f.
On note $f(1) = 2\alpha$ avec $\alpha > 1$. On remarque alors que :

$$P(1,1) \iff f(1)^2 = 2f(1 + f(1)) \implies 2f(1+2\alpha) = 4\alpha^2 \implies f(1+2\alpha) = 2\alpha^2$$

$$P(1+2\alpha, 1) \iff 2\alpha \cdot 2\alpha^2 = 2f(1 + 2\alpha + 2\alpha^2) \implies f(1+2\alpha+2\alpha^2) = 2\alpha^3$$

$$P(1+2\alpha+2\alpha^2, 1) \iff 2\alpha \cdot 2\alpha^3 = 2f(1+2\alpha+2\alpha^2+2\alpha^3) \implies f(1+2\alpha+2\alpha^2+2\alpha^3) = 2\alpha^4$$

Par une récurrence immédiate on peut déduire que $f(1 + 2\alpha + 2\alpha^2 + ... + 2\alpha^n) = 2\alpha^{n+1}$. En particulier :

$$\begin{aligned} &P(1+2\alpha+2\alpha^2+...+2\alpha^n, 1+2\alpha+2\alpha^2+...+2\alpha^n) \\ \iff &4\alpha^{n+2} = 2f((1+2\alpha+2\alpha^2+...+2\alpha^n)(1+2\alpha^{n+1})) \\ &\implies 2\alpha^{n+2} = f(4\alpha^{2n+1}+...+1) \end{aligned}$$

Or pour n grand $4\alpha^{2n+1} + ... + 1 > 2\alpha^{2n+1} + 2\alpha^{2n} + ... + 1$, donc :

$$2\alpha^{2n+2} = f(4\alpha^{2n+1}+...+1) > f(2\alpha^{2n+1}+2\alpha^{2n}+...+1) = 2\alpha^{2n+2}$$

Absurde !

Idées importantes : Utiliser les bornes du domaine et les améliorer.

Exercice 11
Trouver les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui vérifient :

$$f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1$$

Solution de l'exercice 11
Soit $P(x,y)$ la proposition $f(x+y) + f(x)f(y) = f(xy) + 2xy + 1$
Soit :

$$f(0) = a \quad f(1) = b \quad f(-1) = c$$

On a :

$$P(x,-1) \implies f(x-1) + cf(x) = f(-x) - 2x + 1 \quad (\star)$$

$$P(x-1,1) \implies f(x) + (b-1)f(x-1) = 2x - 1 \quad (\star\star)$$

$$(1-b)(\star) + (\star\star) \implies (1+c-bc)f(x) + (b-1)f(-x) = -2bx - b$$

En remplaçant x par $-x$, on obitent :

$$(1+c-bc)f(-x) + (b-1)f(x) = 2bx - b$$

Et donc le système suivant :

$$\begin{cases}(1+c-bc)f(x)+(b-1)f(-x)=-2bx-b\\(b-1)f(x)+(1+c-bc)f(-x)=2bx-b\end{cases}$$

Si le determinant est non nul, on trouve des fonctions affines, et on vérifie à la main lesquelles fonctionnent. On obtient $f(x)=-x-1$ et $f(x)=2x-1$. Si le déterminant est nul, cela donne : $1+c-bc=\pm(b-1)$. En remplacant dans la première ou la deuxième équation, il vient $b=0$. Et donc :

$$P(0,1) \implies b+ab=a+1 \implies a=-1$$
$$P(-1,1) \implies a+bc=c-1 \implies c=0$$

Le système précendent donne alors $f(x)=f(-x)$. On peut alors prendre :

$$P(\frac{x}{2},\frac{x}{2}) \implies f(x)+f(\frac{x}{2})^2=f(\frac{x^2}{4})+\frac{x^2}{2}+1$$

$$P(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}) \implies -1+f(\frac{x}{2})^2=f(\frac{x^2}{4})-\frac{x^2}{2}+1$$

Ces deux équations impliquent $f(x)=x^2-1$ qui est bien solution.
Idées importantes : Exploiter la symétrie, mettre en parallèle plusieurs équations.

Exercice 12
Trouver les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x+f(x+y))+f(xy)=x+f(x+y)+yf(x)$$

Solution de l'exercice 12
On pose $P(x,y)$ la propriété de l'énoncé.

$$P(x,0) \iff f(x+f(x))+f(0)=x+f(x) \quad (1)$$
$$P(0,y) \iff f(f(y))+f(0)=f(y)+yf(0) \quad (2)$$

$$P(x,1) \iff f(x+f(x+1))+f(x)=x+f(x+1)+f(x) \iff x+f(x+1) \text{ Point fixe} \quad (3)$$

Soit y un point fixe, d'après (2) on a $f(0)=yf(0)$, donc soit $f(0)=0$, soit le seul point fixe est 1.
Dans ce second cas, (3) implique $x+f(x+1)=1$, soit $f(x+1)=1-x$ et donc $f(x)=2-x$ pour tout x, qui convient.
Prenons maintenant $f(0)=0$, en réinjectant dans (1), il vient :

$$f(f(y))=f(y) \implies f(y) \text{ Point fixe} \quad (4)$$

$$\begin{cases}P(x,-x) \iff f(x)+f(-x^2)=x-xf(x)\\P(-x,x) \iff f(-x)+f(-x^2)=-x+xf(-x)\end{cases}$$

$$\implies f(x)-f(-x)=x(2-f(x)-f(-x)) \quad (P(x,-x)-P(-x,x)) \quad (5)$$

$$\implies (x \text{ Point fixe} \implies -x \text{ Point fixe}) \quad (5')$$

On ne peut pas conclure pour $x = 1$, mais on sait que -1 est point fixe car $(-1) + f(-1+1) = -1$ est point fixe d'après (3) et $P(-1, 1)$ donne $f(1) = 1$.
En injectant $f(0) = 0$ dans (1), on a aussi :

$$f(x + f(x)) = x + f(x) \implies x + f(x) \text{ Point fixe} \quad (6)$$

On aimerait pouvoir trouver x et y tels que $x + y$ et $2x + y$ soit des points fixes, de sorte à éliminer deux termes dans l'équation. Or on sait que $f(z)$ et $z + f(z)$ sont points fixes d'après (4) et (6), on peut donc naturellement essayer $x + y = f(z)$ et $2x + y = z + f(z)$, soit $x = z$ et $y = f(z) - z$. Cela donne :

$$z + f(z) + f(z(f(z) - z)) = z + f(z) + (f(z) - z)f(z)$$

$$\implies f(z(f(z) - z)) = (f(z) - z)f(z) \quad (7)$$

Le terme en xy est symétrique, mais pas celui en $yf(x)$, on a donc tout intérêt a faire la même chose dans l'autre sens ($y = z$ et $x = f(z) - z$). Cela donne :

$$f(z(f(z) - z) = zf(f(z) - z) \quad (8)$$

Utilisons tout ce qu'on a a notre disposition, on sait aussi que $-f(z)$ et $-z - f(z)$ sont points fixes, donc on peut remplacer x par $-x$ et y par $-y$ dans ce qu'on a fait précédement. Cela donne de façon similaire :

$$f(z(f(z) - z) = -zf(z - f(z)) \quad (9)$$

$$f(z(f(z) - z)) = -(f(z) - z)f(-z) \quad (10)$$

On obtient en autres en combinant 8 et 10 par exemple que f est impaire sur les non points fixes, et aussi sur les points fixes d'après ce qu'on a montré. On peut maintenant utiliser (5) qui nous donne :

$$2f(x) = 2x \implies f(x) = x$$

Ce qui conclut.

5 Fonctions génératrices (Timothée Rocquet)

Le cours était principalement inspiré de http://www.math.ens.fr/~budzinski/polys/Combinatoire/Avanc%C3%A9/2013_courstd.pdf

Exercice 1
Déterminer le nombre de manières d'acheter des fruits sachant que pommes sont vendues par 2, les bananes sont vendues par 5 et il ne reste plus que 4 oranges et 1 poire.

Solution de l'exercice 1
On appelle a_n le nombre de manières d'acheter n fruits de cette manière et $A(X)$ la série génératrice associée.

La série associée au nombre de pommes est $1 + X^2 + X^4 + X^6 + ... = \frac{1}{1-X^2}$ La série associée au nombre de bananes est $1 + X^5 + X^10 + X^15 + ... = \frac{1}{1-X^5}$ La série associée au nombre d'oranges est $1 + X + X^2 + X^3 + X^4 = \frac{1-X^5}{1-X}$ La série associée au nombre de poires est $1 + X$

On a donc $A(X) = \frac{1}{1-X^2}\frac{1}{1-X^5}\frac{1-X^5}{1-X}(1+X) = \frac{1}{(1-X)^2}$ donc le nombre cherché est $(-1)^n\binom{-2}{n} = (-1)^n\frac{(-2)(-3)\dots(-2-n+1)}{n!} = n+1$.

Exercice 2
Trouver le nombre de manières de choisir 2005 balles rouges, vertes et jaunes de sorte que le nombre de balles rouges est pair ou le nombre de balles vertes est impair.

Solution de l'exercice 2
On appelle a_n le nombre de manières de choisir n balles de cette manière et $A(X)$ la série génératrice associée. On a alors :

$$\begin{aligned}
A(X) &= \underbrace{(1+X^2+X^4+\dots)}_{rouge\ pair}\underbrace{(1+X+X^2+\dots)}_{vert}\underbrace{(1+X+X^2+\dots)}_{jaune} \\
&+\underbrace{(1+X+X^2+\dots)}_{rouge}\underbrace{(X+X^3+X^5+\dots)}_{vert\ impair}\underbrace{(1+X+X^2+\dots)}_{jaune} \\
&+\underbrace{(1+X^2+X^4+\dots)}_{rouge\ pair}\underbrace{(X+X^3+X^5+\dots)}_{vert\ impair}\underbrace{(1+X+X^2+\dots)}_{jaune} \\
&= \frac{1}{1-X^2}\frac{1}{1-X}\frac{1}{1-X}+\frac{1}{1-X}\frac{X}{1-X^2}\frac{1}{1-X}-\frac{1}{1-X^2}\frac{X}{1-X^2}\frac{1}{1-X}+ \\
&= (1+X)\frac{1}{(1-X^2)(1-X)^2}-\frac{1}{(1-X^2)^2}\frac{1}{1-X} \\
&= \frac{1}{(1-X)^3}-\frac{X^2+X}{(1-X^2)^3} = \frac{1}{(1-X)^3}-\frac{X^2}{(1-X^2)^3}-\frac{X}{(1-X^2)^3}
\end{aligned}$$

On cherche le cofficient devant X^{2005} de cette série génératrice.

Pour $\frac{1}{(1-X)^3}$ il vaut $(-1)^{2005}\binom{-3}{2005} = (-1)^{1002}\frac{(-3)(-4)\dots(-2007)}{2005!} = \binom{2007}{2}$

Pour $\frac{X^2}{(1-X^2)^3}$, il vaut 0 (car cette série vaut $\frac{1}{(1-X)^3}\circ X^2$ donc tous les coefficients d'indice impair sont nuls).

Pour $\frac{X}{(1-X^2)^3}$, cela revient à calculer le cofficient devant X^{2004} de $\frac{1}{(1-X^2)^3}$ donc le cofficient devant X^{1002} de $\frac{1}{(1-X)^3}$, c'est-à-dire $(-1)^{1002}\binom{-3}{1002} = (-1)^{1002}\frac{(-3)(-4)\dots(-1004)}{1002!} = \binom{1004}{2}$

La réponse est donc $\binom{2007}{2}-\binom{1004}{2}$.

Exercice 3
Trouver le nombre de suites $a_1, a_2, \dots$ croissantes ne contenant que des entiers entre 1 et 20 et telles que $a_i \equiv i[2]$ pour tout i.

Solution de l'exercice 3
On pose u_k le nombre de suites avec des termes compris entre 1 et k vérifiant la condition de l'énoncé et $U(X)$ la série génératrice associée. On pose $a_0 = 0$ et $b_i = a_i - a_{i-1}$ pour tout $i \geqslant 1$. Une suite de longueur n correspond alors à n nombres b_i impairs dont la somme est inférieure ou égale à k. On peut donc rajouter un dernier terme $c \geqslant 0$ tel que la somme totale des b_i et de c soit exactement k.

La série associée aux nombres impairs b_i est $X + X^3 + X^5 + \dots = \frac{X}{1-X^2}$ et la série associée au choix de c est $1 + X + X^2 + \dots = \frac{1}{1-X}$ donc :

$$U(X) = \underbrace{\frac{1}{1-x}}_{choix\ de\ c} (\underbrace{\frac{X}{1-X^2}}_{choix\ de\ b_1} + \underbrace{(\frac{X}{1-X^2})^2}_{choix\ de\ b_1,b_2} + \underbrace{(\frac{X}{1-X^2})^3}_{choix\ de\ b_1,b_2,b_3} + ...)$$
$$= \frac{1}{1-x} \frac{1}{1-\frac{X}{1-X^2}} = \frac{1}{1-x} \frac{1-X^2}{1-X-X^2} = \frac{1+X}{1-X-X^2}$$

Or la série $\frac{1}{1-X-X^2}$ est celle des nombres de Fibonacci (avec $F_0 = F_1 = 1$) donc le nombre cherché est $F_{20} + F_{19} = F_{21}$.

Exercice 4
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que le nombre de manière d'exprimer n comme somme d'entiers strictement positifs deux à deux distincts est égal au nombre de manière d'exprimer n comme somme d'entiers strictement positifs impairs (sans tenir compte de l'ordre des termes).

Solution de l'exercice 4
Comme l'ordre des termes ne compte pas, il suffit de regarder combien de fois on prend chaque entier dans notre somme.

Soit $A(X)$ la série génératrice associée au nombre de manière d'exprimer n comme somme d'entiers strictement positifs deux à deux distincts. Chaque entier est pris au plus une fois donc :

$$A(X) = \underbrace{(1+X)}_{choix\ du\ nombre\ de\ 1} \underbrace{(1+X^2)}_{choix\ du\ nombre\ de\ 2} \underbrace{(1+X^3)}_{choix\ du\ nombre\ de\ 3} \underbrace{(1+X^4)}_{choix\ du\ nombre\ de\ 4}$$
$$= \frac{1-X^2}{1-X} \frac{1-X^4}{1-X^2} \frac{1-X^6}{1-X^3} \frac{1-X^8}{1-X^4} ...$$
$$= \frac{1}{1-X} \frac{1}{1-X^3} \frac{1}{1-X^5} \frac{1}{1-X^7} ...$$

Soit $B(X)$ la série génératrice associée au nombre de manière d'exprimer n comme somme d'entiers strictement positifs impairs. Chaque entier impair peut être pris autant de fois qu'on veut donc :

$$B(X) = \underbrace{(1+X+X^2+X^3+...)}_{choix\ du\ nombre\ de\ 1} \underbrace{(1+X^3+X^6+X^9+...)}_{choix\ du\ nombre\ de\ 3} \underbrace{(1+X^5+X^{10}+X^{15}+...)}_{choix\ du\ nombre\ de\ 5} \underbrace{(1+X^7+X^{14}+X^{2}}_{choix\ du\ nombre\ de\ 7}$$
$$= \frac{1}{1-X} \frac{1}{1-X^3} \frac{1}{1-X^5} \frac{1}{1-X^7} ...$$

On voit que $A(X) = B(X)$ donc leurs coefficients sont également égaux.

6 TD d'algèbre (Félix Breton)

TD d'équations fonctionelles

– Le TD –

Exercice 1
Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une fonction vérifiant pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*$, $f(m+n) \geqslant f(m) + f(f(n)) - 1$. Quelles valeurs peut prendre $f(2019)$?

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to -1, 1$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$ distincts et vérifiant $xy = 1$ ou $x + y \in 0, 1$, on ait $f(x)f(y) = -1$.

Question intermédiaire : Soit f une fonction ayant la propriété ci-dessus et telle que $f(0) = 1$. Que vaut $f(\frac{42}{17})$?

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$.

Exercice 4
Trouver tous les couples de fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $g(f(x+y)) = f(x) + (2x+y)g(y)$

– Bonus –

Exercice 5
Trouver tous les couples de fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $g(f(x+y)) = f(x) + 2(x+y)g(y)$

Exercice 6
Trouver tous les couples de fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on ait $g(f(x+y)) = f(x) + 2x + y \cdot g(y)$

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction vérifiant pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $f(m+n) \geqslant f(m) + f(f(n)) - 1$. Quelles valeurs peut prendre $f(2019)$?

– Solutions des exercices –

Ces exercices sont issus de shortlists des IMOs. Les solutions sont trouvables sur le site des IMOs, et sur le forum d'AOPS.

Solution de l'exercice 1
Ce problème est le A2 de 2007.

Solution de l'exercice 2
Celui ci est le A3 de 2004.

Solution de l'exercice 3
Celui là est le P1 de 2010.

Solution de l'exercice 4
Quant à lui, il s'agit du A3 de 2011

Solution de l'exercice 5
En prenant $y = -x$, on a $g(f(0)) = f(x)$ pour tout x. Par conséquent f est constante de la forme $f(x) = c$ pour tout x. La condition devient alors $g(c) = c + 2(x+y)g(y)$, donc $g(c) - c = 2(x+y)g(y)$. Le terme de gauche est constant, donc celui de droite aussi, ce qui n'est possible que pour g constante égale à 0. L'équation devient alors $0 = f(x)$, donc la seule solution est $f(x) = g(x) = 0$.

Solution de l'exercice 6
(trouvée par Elias Caeiro)

En prenant $y = 0$, on obtient $g(f(x)) = f(x) + 2x$, et en prenant $x = 0$, on a $g(f(y)) = f(0) + yg(y)$, donc
$f(x+y)$
$= g(f(x+y)) - 2(x+y)$
$= f(x) + 2x + yg(y) - 2(x+y)$
$= f(x) + 2x + g(f(y)) - f(0) - 2(x+y)$
$= f(x) + 2x + f(y) + 2y - f(0) - 2(x+y)$
$= f(x) + f(y) - f(0)$

En remplaçant f par h, où $h(x) = f(x) - f(0)$, on obtient $h(x+y) = h(x) + h(y)$, donc pour tout $r \in \mathbb{R}$, h est linéaire sur $r\mathbb{Q}$ et f y est de la forme $f(z) = az + b$.

Pour $z \in r\mathbb{Q}^*$, en prenant $y = f(nz)$ où n est entier, on a
$g(f(y))$
$= f(y) + 2y$
$= f(f(nz)) + 2f(nz)$
$= f(anz + b) + 2(anz + b)$
$= f(anz) + f(b) - f(0) + 2(anz + b)$, ce qui est un polynôme de degré 1 en n, car f est affine sur $az\mathbb{Q}$.

On a aussi
$g(f(y))$
$= f(0) + yg(y)$
$= f(0) + f(nz)g(f(nz))$
$= f(0) + (anz + b)(f(nz) + 2nz)$
$= f(0) + (anz + b)(anz + b + 2nz)$, ce qui est un polynôme de degré au plus 2 en n.

On en déduit que le coefficient de degré 2 de ce polynôme est nul, donc $az(az+2) = 0$ et a vaut nécessairement 0 ou -2.

Les valeurs de a et b sont bornées, donc f est bornée sur tout intervalle borné, et comme f vérifie l'équation de Cauchy (à constante près), f est affine, de la forme $az + b$ avec a égal à 0 ou -2.

f ne peut pas être constante car on aurait $2x = g(f(x)) - f(x) = g(b) - b$ pour tout x, ce qui est évidemment impossible.

Par conséquent, f est de la forme $f(x) = -2x + b$. Pour tout x non nul, $b = f(x) + 2x = g(f(x)) = f(0) + yg(y) = b + yg(y)$, donc $yg(y) = 0$ et $g(y) = 0$. $f(0) = g(f(0))$, donc $f(0)$ ne peut qu'être nulle, et $g(0)$ aussi. La seule solution est donc $f(x) = -2x$ et $g(x) = 0$, ce dont on vérifie facilement qu'il s'agit bien d'une solution.

Solution de l'exercice 7

Un pot de houmous sera offert au premier élève trouvant une solution à cet exercice.[1]

1. L'exercice a été résolu, cette offre n'est donc désormais plus valable

4 Entraînement de fin de parcours

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. Trouver tous les polynômes P de degré n à coefficients réels admettant n racines réelles distinctes tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, si $P(x) = 0$ alors $P(x+1) = 1$.

Solution de l'exercice 1

Soit P un tel polynôme de degré $n > 0$. Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n$ ses n racines réelles. Alors pour un certain réel $a \neq 0$:

$$P(X) = a\prod_{i=1}^{n}(X - a_i)$$

De plus on sait que $P(X) - 1$ est de degré n (car $n > 0$), et les réels $a_i + 1$ en sont des racines pour $1 \leqslant i \leqslant n$. Ainsi on en déduit que pour un certain réel $b \neq 0$:

$$a\prod_{i=1}^{n}(X - a_i) + 1 = b\prod_{i=1}^{n}(X - a_i - 1)$$

Or si $n > 1$, l'égalité des coefficients en X^n indique que $a = b$, et l'égalité des coefficients en X^{n-1} indique que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = (a_1+1) + (a_2+1) + \cdots + (a_n+1)$, ce qui est impossible.

Si $n = 1$, alors on écrit $P = aX + b$ avec $a \neq 0$. Alors $\frac{-b}{a}$ est racine de P et $P\left(\frac{-b}{a} + 1\right) = a\left(\frac{-b}{a} + 1\right) + b = a$. Ainsi P est solution si et seulement si $a = 1$, donc si P est unitaire.

Enfin les polynômes constants non nuls sont solution, donc ce sont les seuls avec les polynômes unitaires de degré 1.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier. On note A_n le nombre de façons d'écrire $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ avec $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k$ et $k \in \mathbb{N}$ de sorte que parmis les entiers $a_1, a_2, \cdots, a_k$, le même entier pair n'apparaisse pas plus d'une fois.

On note B_n le nombre de façons d'écrire $n = a_1 + a_2 + \cdots + a_k$ avec $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_k$ et $k \in \mathbb{N}$ de sorte que parmis les entiers $a_1, a_2, \cdots, a_k$, le même entier n'apparaisse pas plus de 3 fois.

Montrer que $A_n = B_n$.

Solution de l'exercice 2

On considère la série génératrice de la suite A_n c'est à dire la série formelle :

$$f(X) = \sum_{n \geqslant 0} A_n X^n$$

Chaque entier impair est choisi un nombre quelquonque de fois, et chaque entier pair est choisi zéro ou une fois. On peut écrire f ainsi :

$$f(X) = \prod_{n \text{ pair}} (1 + X^n) \times \prod_{n \text{ impair}} (1 + X^n + X^{2n} + X^{3n} + \cdots)$$

On réécrit cela ainsi :

$$f(X) = \prod_{n \text{ pair}} \frac{1 - X^{2n}}{1 - X^n} \times \prod_{n \text{ impair}} \frac{1}{1 - X^n}$$

On considère ensuite la série génératrice de la suite B_n c'est à dire la série formelle :

$$g(X) = \sum_{n \geqslant 0} B_n X^n$$

Chaque entier est choisi zéro, une, deux ou trois fois. On peut écrire g ainsi :

$$g(X) = \prod_{n \geqslant 0} (1 + X^n + X^{2n} + X^{3n})$$

On réécrit cela ainsi :

$$g(X) = \prod_{n \geqslant 0} \frac{1 - X^{4n}}{1 - X^n}$$

Or l'ensemble des entiers de la forme $2n$ pour n pair est égal à l'ensemble des entiers de la forme $4n$ pour n entier. Ainsi $f = g$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n = B_n$.

Exercice 3

Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ injectives telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left| \sum_{i=1}^{n} i \left(f(x+i+1) - f(f(x+i)) \right) \right| \leqslant 2019$$

Solution de l'exercice 3

Soit x un réel et soit $m \geqslant 1$ un entier. On considère la différence suivante :

$$\left| \sum_{i=1}^{m} i \left(f\left((x-m)+i+1\right) - f\left(f\left((x-m)+i\right)\right)\right) - \sum_{i=1}^{m-1} i \left(f\left((x-m)+i+1\right) - f\left(f\left((x-m)+i\right)\right)\right) \right|$$

Cette différence vaut toujours $|m\left(f\left((x-m)+m+1\right) - f\left(f((x-m)+m)\right)\right)|$. En appliquant l'hypothèse de l'énoncé pour $n = m$ et $n = m-1$, et en utilisant le fait que pour tous réels x, y on a $|x - y| \leqslant |x| + |y|$, on en déduit que :

$$\left| m \left(f\left(x+1\right) - f\left(f\left(x\right)\right)\right) \right| \leqslant 2019 + 2019$$

En particulier on a que pour tout entier $m \geqslant 1 : |(f(x+i+1) - f(f(x+i)))| \leqslant \frac{4038}{m}$. On en déduit que pour tout réel $x : f(x+1) = f(f(x))$. Or f est supposée injective, donc pour tout réel x on a que $f(x) = x+1$.

Exercice 4

Au stage de Valbonne il y a n élèves. Certaines paires d'élèves se connaissent au début du stage. Une équipe est un ensemble de trois élèves qui se connaissent tous au début du stage. On suppose qu'il n'existe pas d'équipes dans le stage de Valbonne. De plus, si on sépare les stagiaires en deux parties, l'un des deux parties contient nécessairement une paire d'élèves qui se connaissent au début du stage.

Montrer qu'il existe un stagiaire qui connaît au plus $\frac{2n}{5}$ autres stagiaires au début du stage.

Solution de l'exercice 4

On considère le graphe G dont les sommets sont les stagiaires, et qui possède une arête entre toute paire de stagiaires qui se connaissent. Montrons tout d'abord que ce graphe possède un cycle de longueur impaire, c'est à dire un nombre impair k de sommets distincts $s_1, s_2, \cdots, s_k$ tels qu'il y ait une arête entre s_1 et s_k ainsi qu'entre s_i et s_{i+1} pour $1 \leqslant i < k$.

Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de cycle de taille impaire. Nous allons montrer que le graphe est bi-partite, c'est à dire qu'il peut être coloré en deux couleurs de sorte que deux sommets voisins soient de couleur différente. En effet, on commence par colorier un sommet s_0 en rouge, puis ses voisins en bleu, et les voisins de ses voisins en rouge jusqu'à ce que l'on obtienne un sommet colorié de deux couleurs x. Un chemin est un suite se sommets distincts tels que deux sommets consécutifs sont reliés par une arête. Il doit exister deux chemins différents de s_0 à x. que l'on note $s_0, s_1, \cdots, s_k = x$ et $s_0 = s'_0, s'_1, s'_2, \cdots, s'_\ell = x$ avec $k + \ell$ impair. On peut supposer $k + \ell$ minimal, et dans ce cas on obtient un cycle de longueur impair.

Or il n'y a pas de triangles, il existe donc un cycle de longueur impaire $2k+1$ avec $k \geqslant 2$. Prenons k minimal. Considérons un sommet du graphe qui n'est pas dans ce cycle, alors il ne peut pas être relié à plus de 2 sommets du cycle, sinon on peut trouver un cycle de longueur impaire strictement inférieure. Ainsi la somme des degrés des sommets du $2k+1$-cycle est au plus égale à $n \times k$. Ainsi un des sommets du cycle a un degré au plus $\frac{2n}{2k+1} \leqslant \frac{2n}{5}$.

5 Derniers cours

1 Équations fonctionnelles (Paul Cahen)

Découverte de la Théorie des Nombres

Nous avons en cours démontré le théorème de réciprocité quadratique en introduisant les nombres algébriques. La preuve de ce théorème peut être consulté dans la quatrième édition de *Proofs From The Book*.

Nous avons de plus trouver une formule pour donner le nombre de manière qu'a un entier pour s'écrire comme somme de deux carrés ; la preuve est consultable dans le douzième chapitre de *A Classical Introduction to Modern Number Theory*. A noter que ce deuxième livre contient la preuve présentée en cours, au sixième chapitre, mais moins épurée.

2 Découverte théorie des nombres (Paul Cahen)

TD d'équations fonctionnelles

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que $f(x^2 + xf(y)) = xf(x+y)$ pour tous réels $x, y > 0$.

Solution de l'exercice 1
L'idée est ici, comme dans beaucoup d'équations fonctionnelles, de faire en sorte que des expressions étant argument de f soient égales, afin que les images soient égales.

Ici, on veut donc $x^2 + xf(y) = x + y$ avec $x, y > 0$, ce qui, compte-tenu des conditions, assurerait $x = 1$, puis, grâce à $x^2 + xf(y) = x + y$, $f(y) = y$.

Fixons donc un $y > 0$; si on trouve $x > 0$ tel que $x^2 + xf(y) = x + y$, on a $f(y) = y$ comme dit précédemment. Il suffit donc de l'existence d'un tel x. Or le polynôme de degré 2 $X^2 + (f(y) - 1)X - y$ est < 0 en 0 et tend vers plus l'infini en plus l'infini ; il a donc une racine strictement positive.

Ainsi, quel que soit $y > 0$, $f(y) = y$ et la seule solution possible est donc l'identité. Il est clair que c'est une solution réciproquement.

Exercice 2
Soit $\alpha \neq 0$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x^2 + y + f(y)) = f(x)^2 + \alpha y$.

Solution de l'exercice 2
Il est clair, compte tenu de l'équation, que f est surjective et aussi que $f(x)^2 = f(-x)^2$.

Soit c un antécédent de 0 ; avec $x = 0$ et $y = c$ on trouve que $\alpha c + f(0)^2 = 0$. L'équation $\alpha X + f(0)^2 = 0$ n'ayant qu'une seule solution, on en déduit $f(x) = 0 \iff x = c$.

Choisissons dans l'équation $y = -\frac{f(x)^2}{\alpha}$; on a alors $f(x^2 + y + f(y)) = 0$, soit $x^2 - \frac{f(x)^2}{\alpha} + f(-\frac{f(x)^2}{\alpha}) = c$, pour tout réel x.

Remarquons que $f(-c) = 0$ car $f(-c)^2 = f(c)^2 = 0$. Dès lors $-c = c$ soit $c = 0$.

Dès lors, si $f(x) = \pm f(x')$, l'équation précédente force $x = \pm x'$.

Soit $x \neq 0$ un réel. Choisissons x' tel que $f(x') = -f(x)$. On a $f(x) \neq f(x')$ et $x = \pm x'$; dès lors $x = -x'$ et ainsi $f(-x) = -f(x)$. f est alors impaire. ($f(0) = 0$)

Si $f(x) = f(x')$, on a $x = \pm x'$ mais compte-tenu de l'imparité $x = x'$: f est injective.

Avec $y = 0$, $f(x^2) = f(x)^2$ et avec $x = 0$ $f(y + f(y)) = \alpha y$.

Soit $z \geq 0$ et $y \in \mathbb{R}$; on a $f(z + y + f(y)) = f(z) + \alpha y$ en écrivant $z = (\sqrt{z})^2$.

Soit $z \leq 0$ et $y \in \mathbb{R}$; on a par le pont précédent $f(-z - y + f(-y)) = f(-z) + \alpha(-y)$ soit, en utilisant l'imparité $f(z + y + f(y)) = f(z) + \alpha z$.

L'équation $f(z + y + f(y)) = f(z) + \alpha y$ est donc toujours vraie.

En posant $z = x + f(x)$ dans l'équation ci-dessus on a finalement $f(x + f(x) + y + f(y)) = \alpha x + \alpha y = \alpha(x + y) = f(x + y + f(x + y))$ et donc, par injectivité, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Puisque $f(x)^2 = f(x^2)$, il est bien connu que f est soit l'identité soit la fonction nulle.

Finalement, si $\alpha = 2$, $f(x) = x$ est l'unique solution (la réciproque est claire), sinon il n'y a pas de solution.

Il est apparu pendant le cours qu'une autre solution à l'exercice précédent existait, en utilisant une équation fonctionnelle plus ou moins classique (nous avons utilisé un cas particulier de l'équation de Cauchy) que voici :

Exercice 3
Soit $c \in \mathbb{R}$ non nul tel que $f(x+1) = f(x) + c$ et $f(x^2) = f(x)^2$ pour tout réel x. Montrer que $c = 1$ et f est l'identité.

Solution de l'exercice 3
Cette solution est essentiellement pompée d'un post de Corentin Bodart sur Mathraining. Montrons déjà que $c = 1$ nécessairement. On a $f(0) = f(0)^2$ et $f(1) = f(1)^2$ donc $c = f(1) - f(0) \in \{-1, 0, 1\}$. Puisque $c \neq 0$, il ne reste qu'à éliminer $c = -1$. Si $c = -1$, on a directement $f(0) = 1$, $f(1) = 0$ et enfin $f(2) = -1$. Or $f(2) = f(\sqrt{2})^2 \geq 0$, contradiction. Donc $c = 1$.

Comme pour la plupart des équations fonctionnelle à une seule variable, si l'on veut raisonner uniquement avec des égalités, il faudrait exprimer $f(x)$ en fonction d'elle-même (et de termes ne contenant pas de f), de manière non-triviale. Ici, vu les opérations qui nous sont permises, cela nous demanderait de trouver un polynôme "sympa" dont x est racine, ce qui n'est possible pour x algébrique. (Note que si ce type d'argument fonctionnait, cela fonctionnerait aussi dans $\mathbb{C}$.)

Bref, tout ça pour dire qu'on va devoir utiliser quelque chose vrai sur $\mathbb{R}$ mais faux sur $\mathbb{C}$: tout carré est positif ! L'observation qui en découle directement (avec la première équation) est $f(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$. En particulier,

$$f(x) - \lfloor x \rfloor = f(\underbrace{x - \lfloor x \rfloor}_{\geq 0}) \geq 0 \implies f(x) \geq \lfloor x \rfloor > x - 1.$$

$\star$ Prenons $x > 2$ et supposons $f(x) < x$, disons $f(x) = x - \varepsilon$ (avec $0 < \varepsilon < 1$), alors

$$(x - \varepsilon)^{2^n} = f(x^{2^n}) > x^{2^n} - 1 \iff 1 > x^{2^n} - (x - \varepsilon)^{2^n}.$$

Or, par le théorème des accroissements finis, il existe $y \in (x - \varepsilon, x)$ (en particulier, $y > 1$) tel que

$$x^{2^n} - (x - \varepsilon)^{2^n} = \varepsilon \cdot 2^n \cdot y^{2^n - 1} > \varepsilon \cdot 2^n,$$

absurde pour $n > \log_2(\frac{1}{\varepsilon})$. Ainsi $f(x) \geq x$ pour $x > 2$, puis pour tout x (en utilisant la seconde équation).

$\star$ Supposons maintenant $f(x) > x$. Prenons N un entier supérieur à $f(x)$, de sorte que

$$0 > f(x) - N = f(x - N) > x - N.$$

En élevant au carré, on obtient maintenant

$$f((x - N)^2) = f(x - N)^2 < (x - N)^2,$$

absurde par le premier point.

$\star$ Finalement, seul $f(x) = x$ reste possible. Après vérification, cela nous fournit l'unique fonction satisfaisant ces deux équations.

En fait les deux solutions sont très proches mais l'exercice précédent n'en est pas moins intéressant.

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 0 \iff x = 0$ et $f(x^2 + yf(x)) + f(y^2 + xf(y)) = f(x + y)^2$ pour tous réels x, y.

Solution de l'exercice 4
En posant $x = 0$ on trouve que $f(y)^2 = f(y^2)$. Cela signifie entre autre que $f(-y) = \pm f(y)$ mais aussi que $f(y) \geq 0$ dès que $y \geq 0$.

Dès lors, si $x^2 + yf(x) = x^2 + 2xy + y^2$, on trouve immédiatement $f(y^2 + xf(y)) = 0$ soit $y^2 + xf(y) = 0$. En posant $y = f(x) - 2x$, on a bien la première égalité, donc

$$(2x - f(x))^2 + xf(f(x) - 2x) = 0$$

Cette équation nous dit, si $x \geq 0$, $f(f(x) - 2x) \leq 0$ et donc $f(x) - 2x \leq 0$ (d'après la première remarque et $f(x) = 0 \to x = 0$). Si on fixe $x > 0$ on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x)^{2^n} = f(x^{2^n}) \leq 2x^{2^n}$ et donc $f(x) \leq \sqrt[2^n]{2} \times x$. A la limite on trouve que $f(x) \leq x$. Ceci est donc vrai pour tout $x \geq 0$

Soit $x \geq 0$. On a $f(2x - f(x)) \geq 0$ (car $2x - f(x) \geq 0$) mais aussi $f(2x - f(x)) = \pm f(f(x) - 2x)$. Puisque $f(f(x) - 2x) \leq 0$, on a $f(2x - f(x)) = -f(f(x) - 2x)$, et ainsi

$$(2x - f(x))^2 = xf(2x - f(x)) \leq x(2x - f(x))$$

et donc, en divisant par $2x - f(x) > 0$, $f(x) \geq f(x)$.

Dès lors $f(x) = x$ pour tout $x \geq 0$. Or $f(f(x) - 2x) = -f(2x - f(x))$ pour x positif, donc $f(-x) = -f(x)$ pour x positif, ce qui conclut : f est l'identité qui est réciproquement une solution.

VII. La chasse au trésor

L'après-midi du 23, les élèves ont pu participer à une chasse au trésor pour un moment plus décontracté à l'issue de l'entraînement du matin. Les élèves étaient répartis en équipes de 4 élèves. Un élève de chaque groupe était présent par équipe. La chasse au trésor s'est divisée en deux parties. une première consistait en la recherche d'indices répartis sur le campus du CIV. Pour trouver ces indices, les équipes devaient résoudre deux problèmes : un problème difficile pour les élèves des groupes C et D et un problème plus facile pour les élèves des groupes A et B. La deuxième partie de la chasse au trésor consistait à trouver le trésor à partir des indices déjà obtenus.

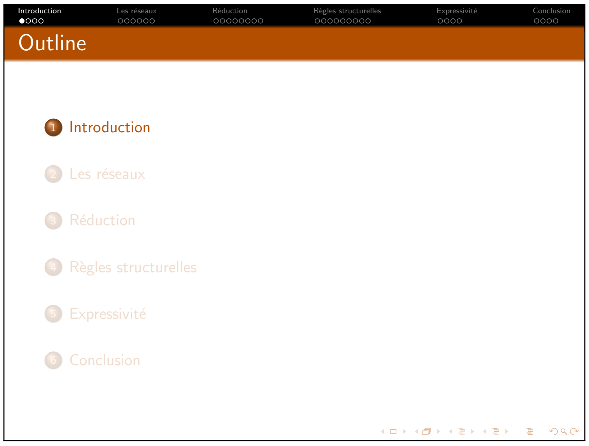
Une équipe a été particulièrement efficace, puisque le trésor a été trouvé au bout de quelques minutes seulement. Il contenait des pièces danoises, et un billet dont le montant est un pultiple de 42. Après l'effort, les élèves ont eu le droit à un gouter pour terminer cette rude journée.

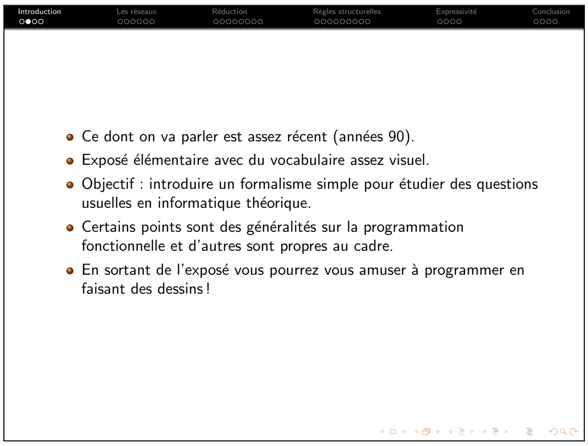
VIII. Les soirées

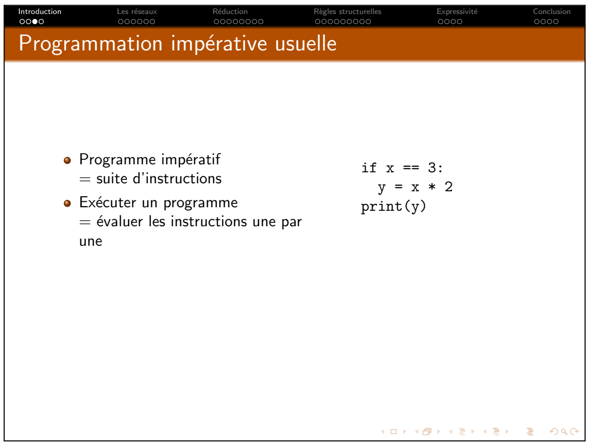
Contenu de cette partie

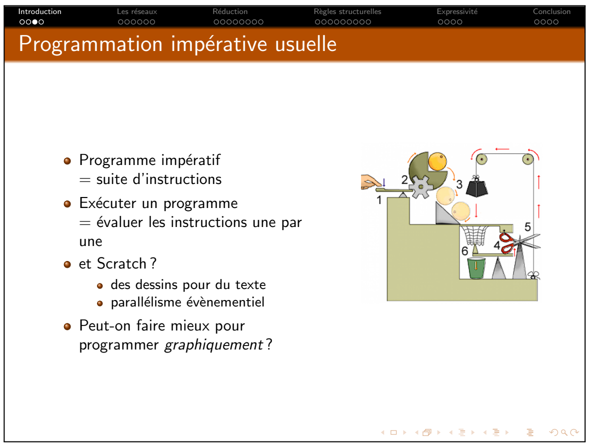
1 Conférence : Programmer avec des dessins (Marc de Falco)

Marc de Falco est professeur est en CPGE « à domicile », au Centre International de Valbonne. Il a présenté lors de cette conférence une nouvelle manière de programmer, « avec des dessins », en introduisant un nouveau langage de programmation et en développant ses avantages et les problèmes qu'il engendre.

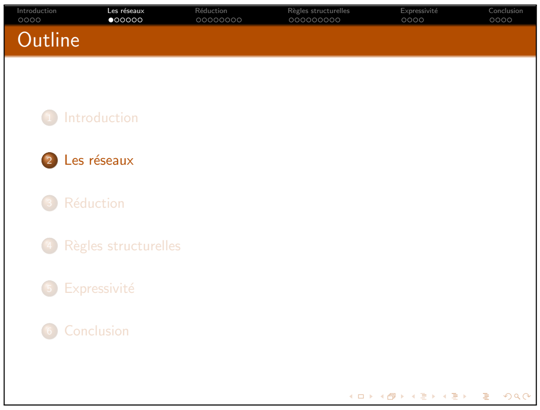


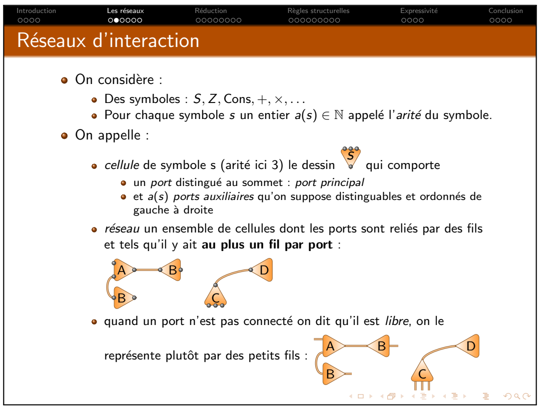


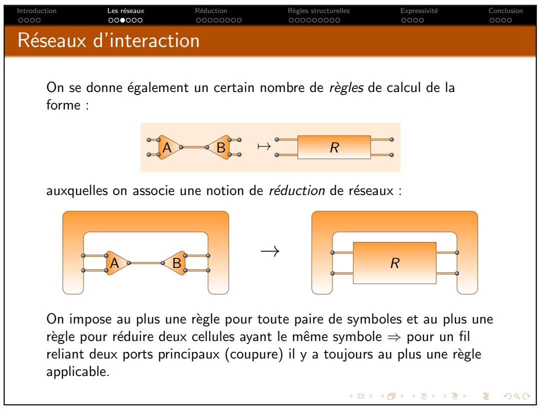


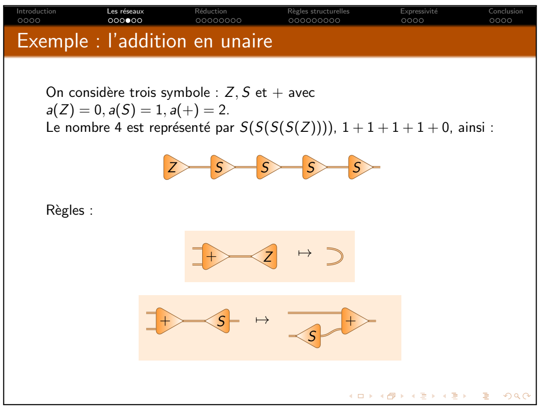


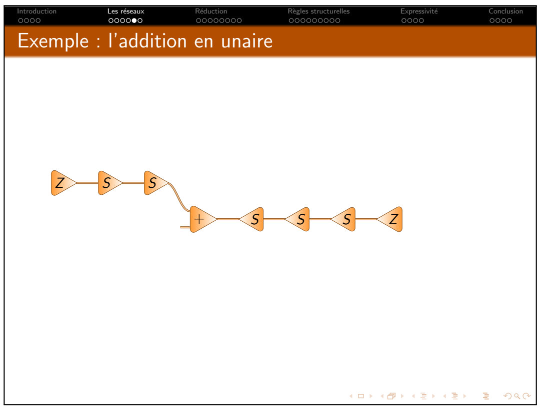

Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Réseaux d'interaction : Historique
en 1986, Jean-Yves Girard introduit la *logique linéaire* qui est une logique ayant des liens forts avec l'informatique
en logique linéaire, les preuves peuvent être représentées par des dessins.
Grâce à Curry et Howard, on sait que preuves $\sim$ programmes dans certains cadres. En 1990, Yves Lafont définit alors un cadre général correspondant à un fragment de la logique linéaire.

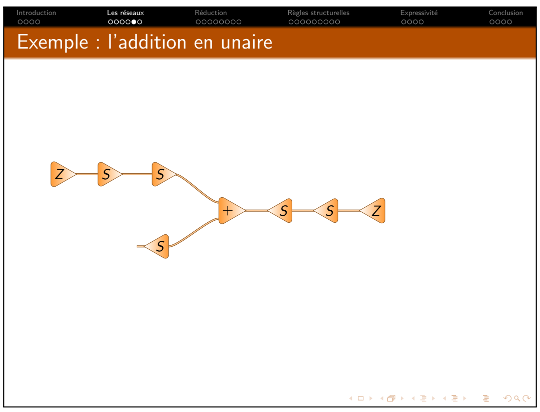

Outline
1 Introduction
2 Les réseaux
3 Réduction
4 Règles structurelles
5 Expressivité
6 Conclusion

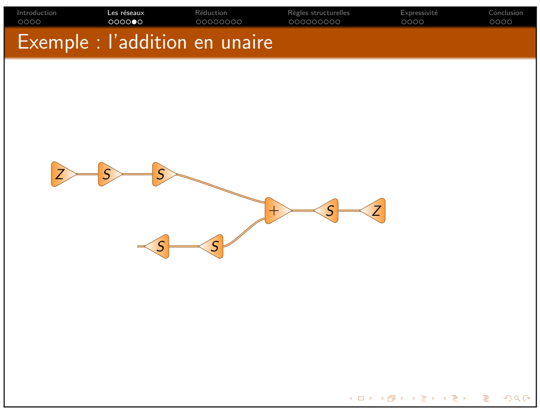

Réseaux d'interaction
On considère :
Des symboles : S, Z, Cons, $+, \times, \ldots$
Pour chaque symbole s un entier $a(s) \in \mathbb{N}$ appelé l'*arité* du symbole.
On appelle :
cellule de symbole s (arité ici 3) le dessin qui comporte
un *port* distingué au sommet : *port principal*
et $a(s)$ *ports auxiliaires* qu'on suppose distinguables et ordonnés de gauche à droite
réseau un ensemble de cellules dont les ports sont reliés par des fils et tels qu'il y ait **au plus un fil par port** :
quand un port n'est pas connecté on dit qu'il est *libre*, on le représente plutôt par des petits fils :
S
A
B
C
D

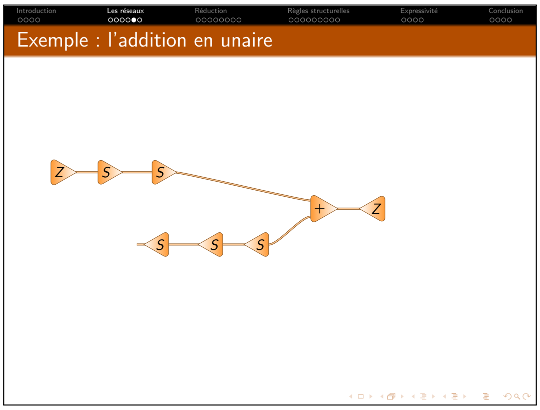

Réseaux d'interaction
On se donne également un certain nombre de *règles* de calcul de la forme :
A
B
R
auxquelles on associe une notion de *réduction* de réseaux :
On impose au plus une règle pour toute paire de symboles et au plus une règle pour réduire deux cellules ayant le même symbole ⇒ pour un fil reliant deux ports principaux (coupure) il y a toujours au plus une règle applicable.

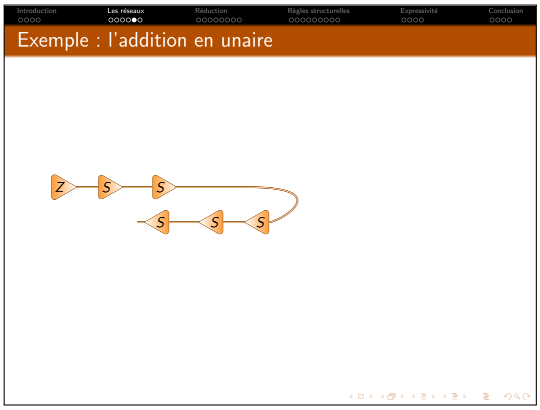

Exemple : l'addition en unaire
On considère trois symbole : Z, S et $+$ avec
$a(Z) = 0, a(S) = 1, a(+) = 2$.
Le nombre 4 est représenté par $S(S(S(S(Z))))$, $1 + 1 + 1 + 1 + 0$, ainsi :
Règles :
Z
S
+

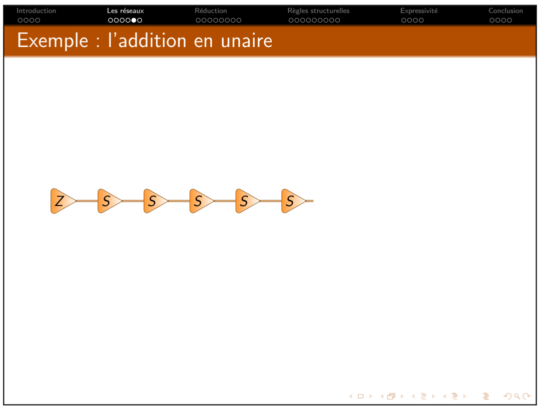

Exemple : l'addition en unaire
Z
S
+

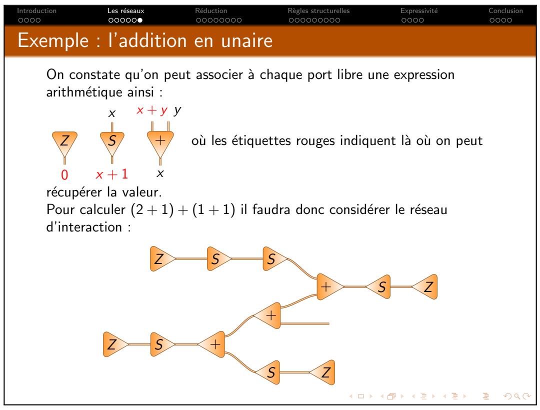

Exemple : l'addition en unaire
Z
S
+

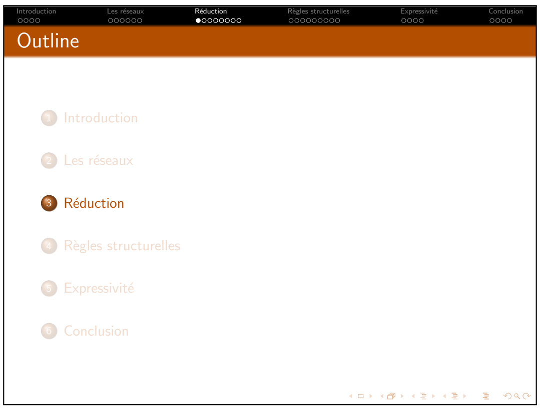

Exemple : l'addition en unaire
Z
S
+

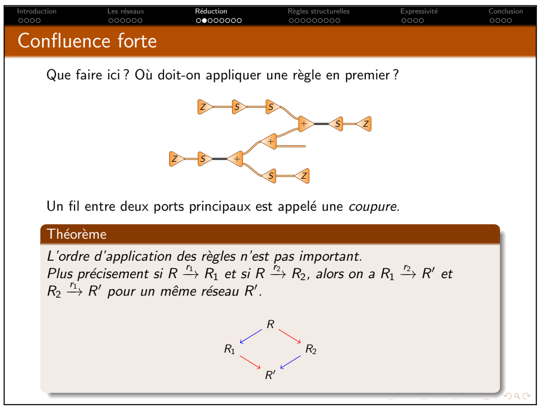

Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Exemple : l'addition en unaire
Z S S + Z
S S S

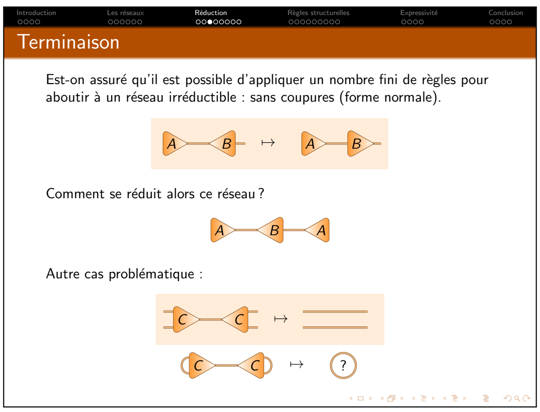

Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Exemple : l'addition en unaire
Z S S
S S S

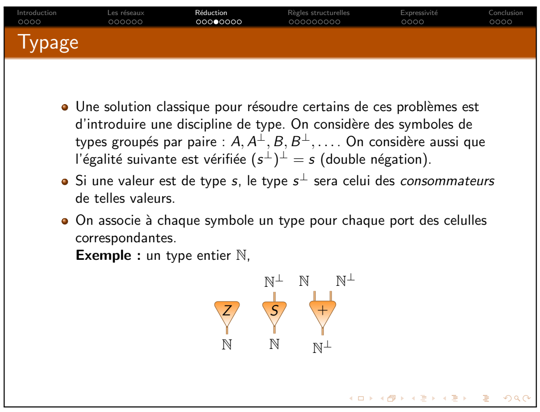

Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Exemple : l'addition en unaire
Z S S S S S


Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Exemple : l'addition en unaire
On constate qu'on peut associer à chaque port libre une expression arithmétique ainsi :
x
x + y y
Z S +
0 x + 1 x
où les étiquettes rouges indiquent là où on peut récupérer la valeur.
Pour calculer (2 + 1) + (1 + 1) il faudra donc considérer le réseau d'interaction :
Z S S + S Z
+
Z S +
S Z

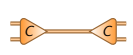

Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Outline
1 Introduction
2 Les réseaux
3 Réduction
4 Règles structurelles
5 Expressivité
6 Conclusion


Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Confluence forte
Que faire ici ? Où doit-on appliquer une règle en premier ?
Un fil entre deux ports principaux est appelé une coupure.
Théorème
L'ordre d'application des règles n'est pas important.
Plus précisément si $R \xrightarrow{r_1} R_1$ et si $R \xrightarrow{r_2} R_2$, alors on a $R_1 \xrightarrow{r_2} R'$ et $R_2 \xrightarrow{r_1} R'$ pour un même réseau R'.
R
R1 R2
R'


Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Terminaison
Est-on assuré qu'il est possible d'appliquer un nombre fini de règles pour aboutir à un réseau irréductible : sans coupures (forme normale).
A B ↦ A B
Comment se réduit alors ce réseau ?
A B A
Autre cas problématique :
C C ↦
C C ↦ ?


Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Typage
Une solution classique pour résoudre certains de ces problèmes est d'introduire une discipline de type. On considère des symboles de types groupés par paire : $A, A^\perp, B, B^\perp, \ldots$. On considère aussi que l'égalité suivante est vérifiée $(s^\perp)^\perp = s$ (double négation).
Si une valeur est de type s, le type $s^\perp$ sera celui des consommateurs de telles valeurs.
On associe à chaque symbole un type pour chaque port des celulles correspondantes.
Exemple : un type entier $\mathbb{N}$,
$\mathbb{N}^\perp$ $\mathbb{N}$ $\mathbb{N}^\perp$
Z S +
$\mathbb{N}$ $\mathbb{N}$ $\mathbb{N}^\perp$

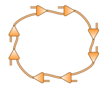
Typage

- Un réseau est bien typé quand il est composée de cellules typées et que les fils relient toujours des paires $s, s^\perp$.
- Une règle est bien typée quand elle préserve le caractère typé d'un réseau après réduction. Pour cela, il suffit que les types des ports libres soient préservés et que le motif de remplacement soit bien typé.
- Le réseau problématique  n'est pas typable.
- A-t-on résolu tous les problèmes ?

Typage

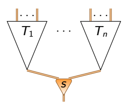
- Le réseau suivant est bien typé

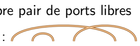
Mais le résultat est pathologique, c'est une sorte de valeur morte qui ne peut plus interagir.

- On appelle *cycle vicieux* un sous-réseau de la forme 
- On dit qu'un réseau est *réduit* quand il ne contient ni coupures ni cercles vicieux.

Structure des réseaux réduits

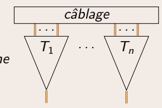
- On appelle *arbre* des réseaux ayant un unique port libre relié à un port principal et construits ainsi :
  - un fil reliant deux ports libres est un arbre
  - si s est un symbole d'arité n et $T_1, \dots, T_n$ des arbres alors le réseau suivant est un arbre :



- On appelle *câblage* un réseau ayant un nombre pair de ports libres tous reliés deux à deux par des fils. Exemple : 

Structure des réseaux réduits

Théorème

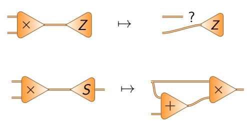
Un réseau réduit est de la forme  *où les $T_1, \dots, T_n$ sont des arbres.*

On appelle *donnée* un réseau réduit ayant un unique port libre (donc un seul arbre).

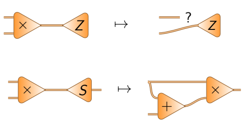
Pourquoi est-ce utile de savoir à quoi va ressembler un réseau réduit ? : On peut faire des hypothèses sur la forme d'un réseau.

Outline

Exemple : la multiplication en unaire ?



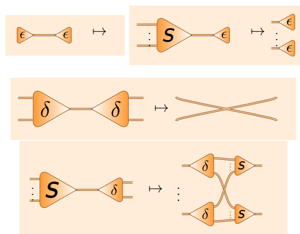
Exemple : la multiplication en unaire ?

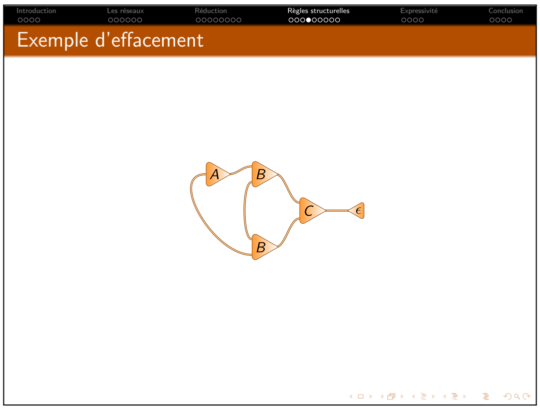


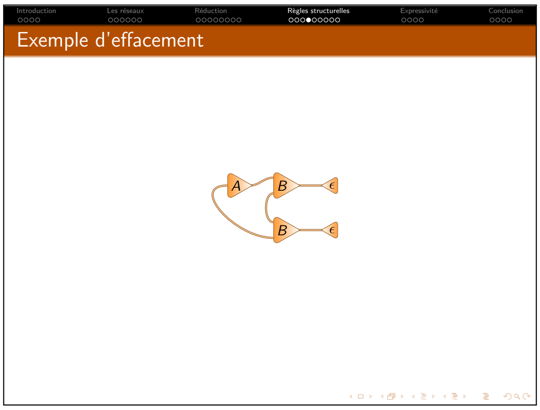
Problème : il faudrait pouvoir effacer dans la première règle et dupliquer dans la seconde...

Effacement et duplication

On considère deux symboles ϵ et δ et pour tout symbole $s \neq \epsilon, \delta$ on définit les règles :



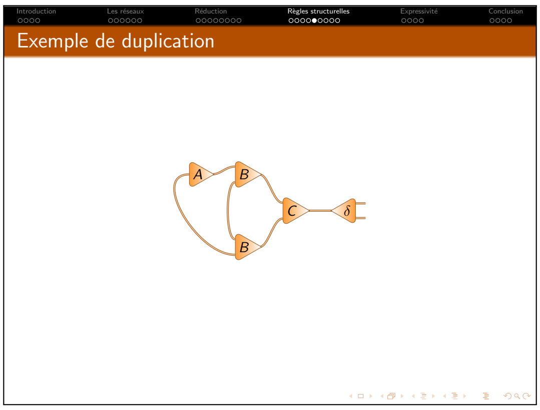

Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Exemple d'effacement
A
B
B
C
ϵ

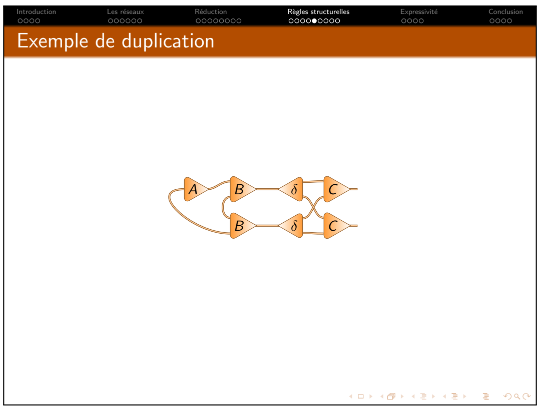

Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Exemple d'effacement
A
B
B
ϵ
ϵ

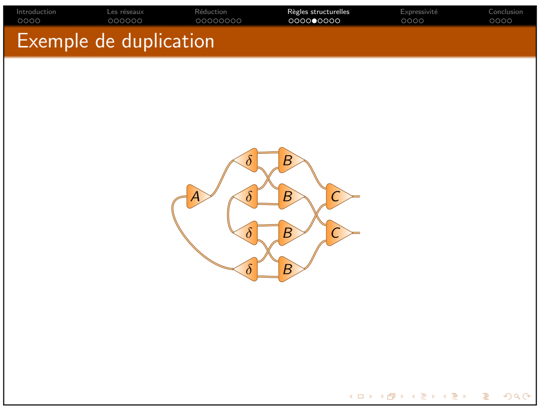

Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Exemple d'effacement
A
ϵ
ϵ
ϵ
ϵ

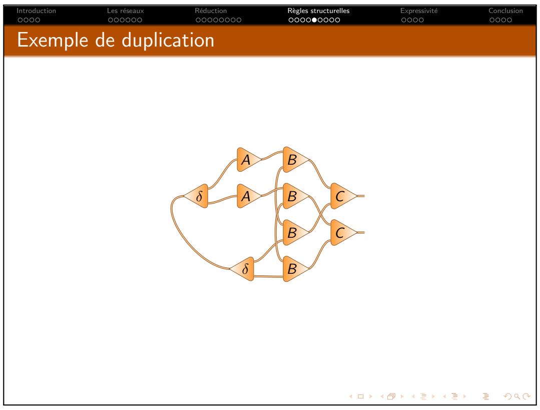

Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Exemple d'effacement
ϵ
ϵ

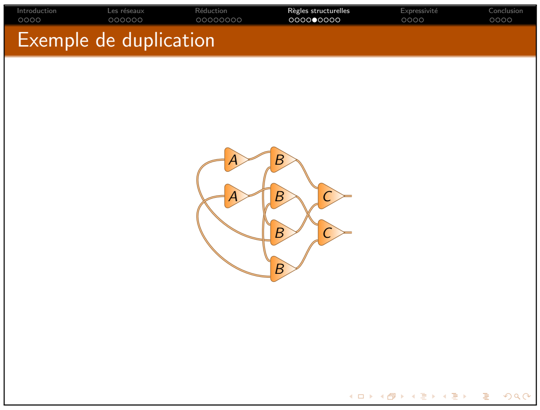

Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Exemple d'effacement

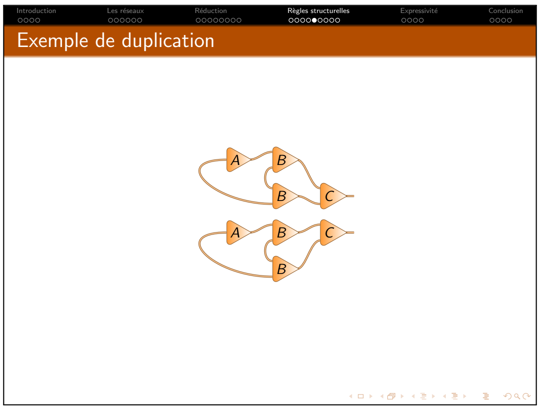

Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Exemple de duplication
A
B
B
C
δ

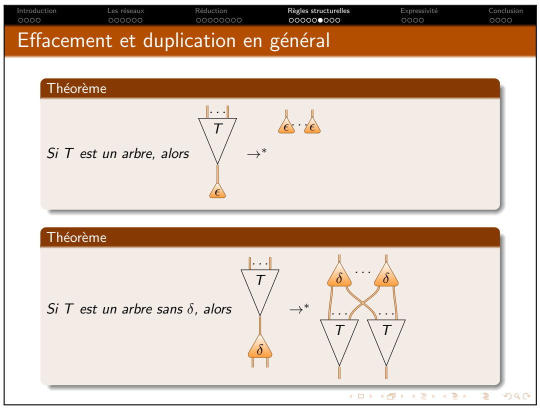

Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Exemple de duplication
A
B
B
δ
δ
C
C

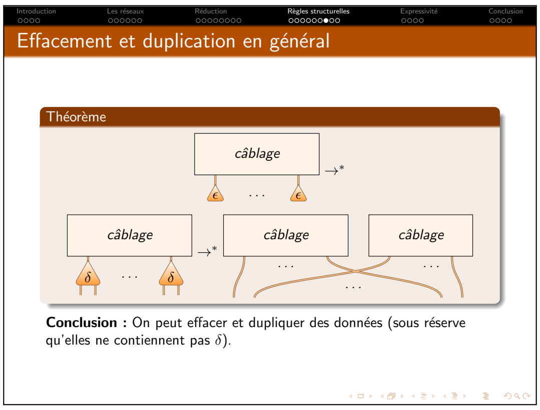

Introduction Les réseaux Réduction Règles structurelles Expressivité Conclusion
Exemple de duplication
A
δ
δ
δ
δ
B
B
B
B
C
C

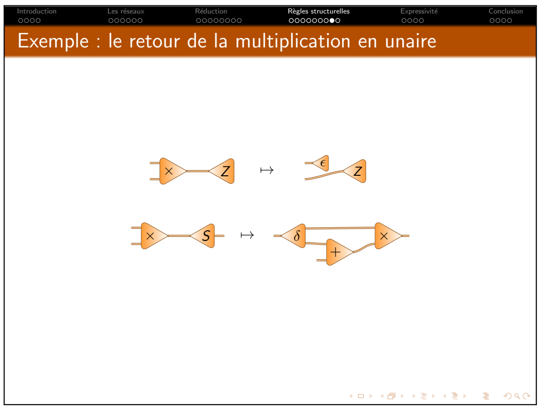

Exemple de duplication
A
A
B
B
B
B
C
C
δ
δ

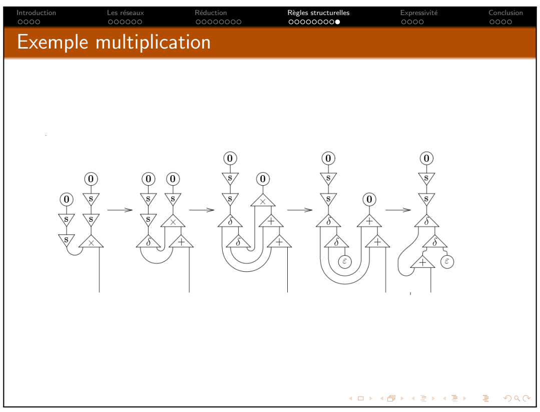

Exemple de duplication
A
A
B
B
B
B
C
C

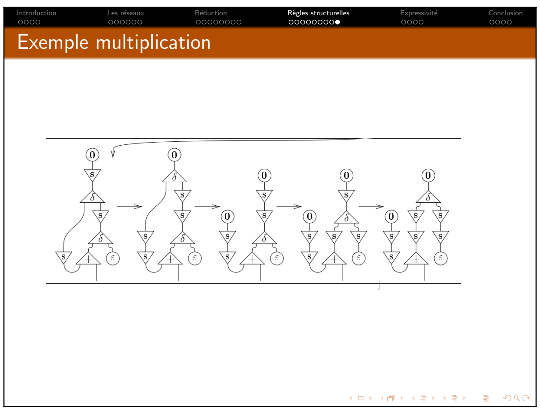

Exemple de duplication
A
B
B
C
A
B
B
C

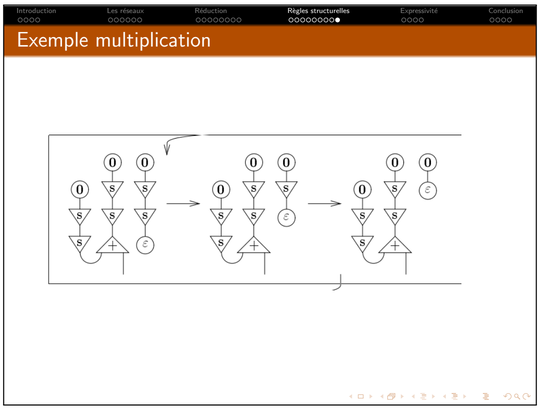

Effacement et duplication en général
Théorème
Si T est un arbre, alors
→*
Théorème
Si T est un arbre sans δ, alors
→*

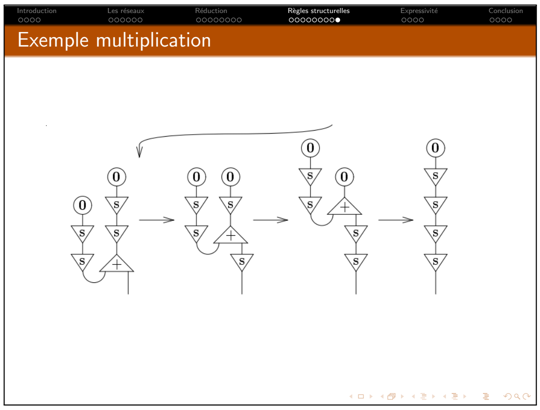

Effacement et duplication en général
Théorème
câblage
→*
câblage
→*
câblage
câblage
Conclusion : On peut effacer et dupliquer des données (sous réserve qu'elles ne contiennent pas δ).

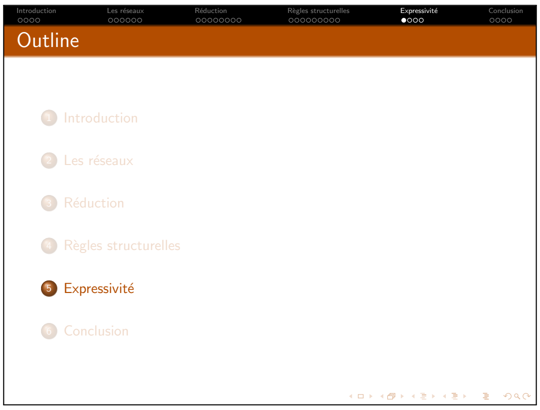

Exemple : le retour de la multiplication en unaire
↦
↦

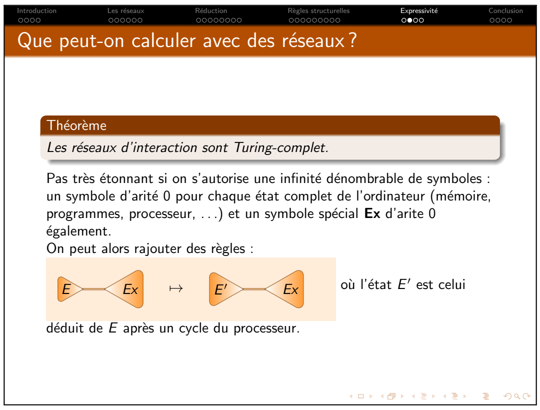

Exemple multiplication

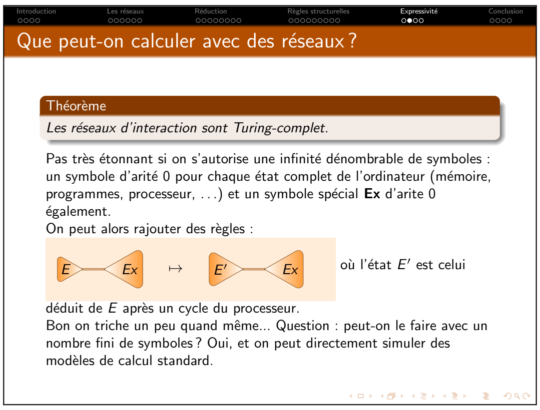

Exemple multiplication

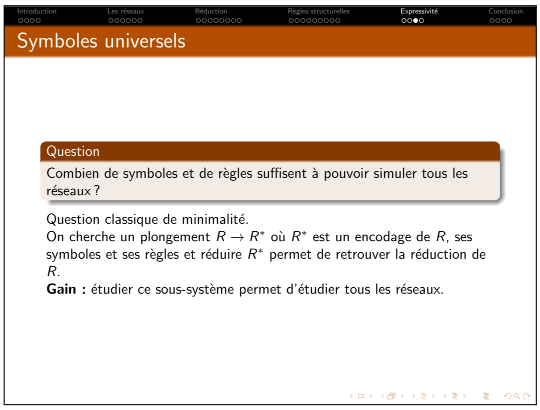

Exemple multiplication

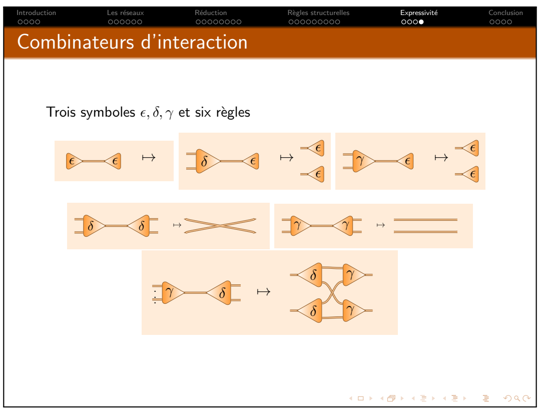

Exemple multiplication

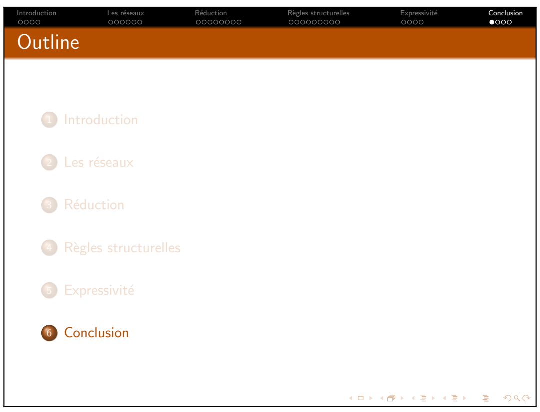

Outline
Introduction
Les réseaux
Réduction
Règles structurelles
Expressivité
Conclusion


Que peut-on calculer avec des réseaux ?
Théorème
Les réseaux d'interaction sont Turing-complet.
Pas très étonnant si on s'autorise une infinité dénombrable de symboles : un symbole d'arité 0 pour chaque état complet de l'ordinateur (mémoire, programmes, processeur, ...) et un symbole spécial **Ex** d'arite 0 également.
On peut alors rajouter des règles :
où l'état E' est celui déduit de E après un cycle du processeur.


Que peut-on calculer avec des réseaux ?
Théorème
Les réseaux d'interaction sont Turing-complet.
Pas très étonnant si on s'autorise une infinité dénombrable de symboles : un symbole d'arité 0 pour chaque état complet de l'ordinateur (mémoire, programmes, processeur, ...) et un symbole spécial **Ex** d'arite 0 également.
On peut alors rajouter des règles :
où l'état E' est celui déduit de E après un cycle du processeur.
Bon on triche un peu quand même... Question : peut-on le faire avec un nombre fini de symboles ? Oui, et on peut directement simuler des modèles de calcul standard.


Symboles universels
Question
Combien de symboles et de règles suffisent à pouvoir simuler tous les réseaux ?
Question classique de minimalité.
On cherche un plongement $R \to R^*$ où R^* est un encodage de R, ses symboles et ses règles et réduire R^* permet de retrouver la réduction de R.
Gain : étudier ce sous-système permet d'étudier tous les réseaux.


Combinateurs d'interaction
Trois symboles ϵ, δ, γ et six règles


Outline
Introduction
Les réseaux
Réduction
Règles structurelles
Expressivité
Conclusion

Pourquoi étudier les réseaux d'interaction ?

- Formalisme pur très explicite : on gère les câblages, les duplications, les effacements, . . .
- Permet de s'adapter naturellement à des contextes concurrents.
- Modèle de calcul particulièrement simple tout en étant directement expressif.
- Liens très forts avec la logique.

Conclusion

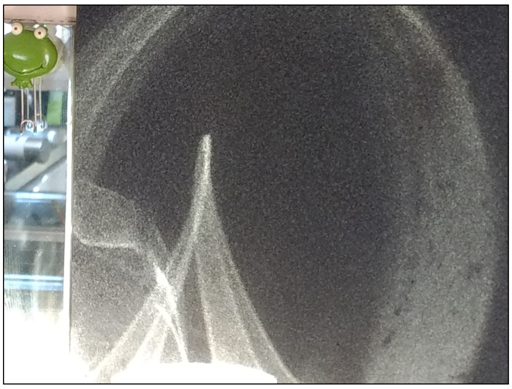
Sur cet exemple des réseaux d'interaction on retrouve des questions classiques de la programmation fonctionnelle.

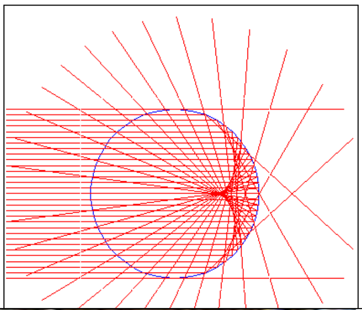
- **La confluence** : est-ce que l'ordre de réduction compte ?
- **La terminaison** : est-ce qu'un calcul termine toujours ?
- **Les formes normales** : existe-t-il une forme remarquable pour les réduits ? Comment y arrive-t-on ?
- **Le typage** : rajouter des informations de types permet-il de garantir un bon comportement ?
- **L'expressivité** : que peut-on écrire comme programme ?
- **La minimalité** : est-ce que toutes les structures sont utiles ?

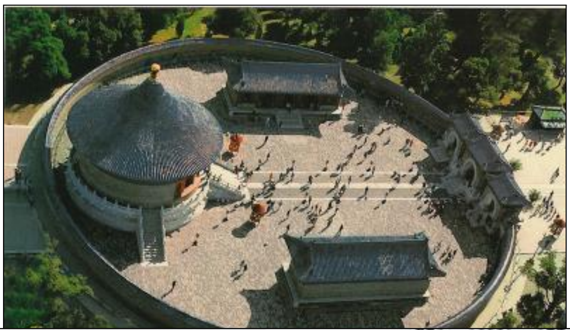
Questions

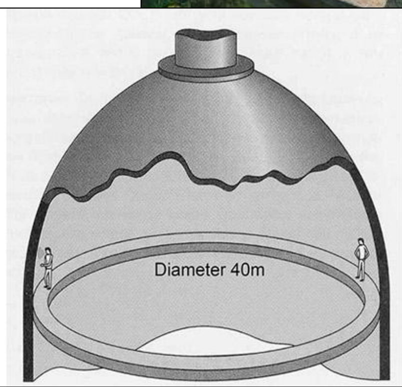
2 Réflexion d'ondes (Fabrice Planchon)

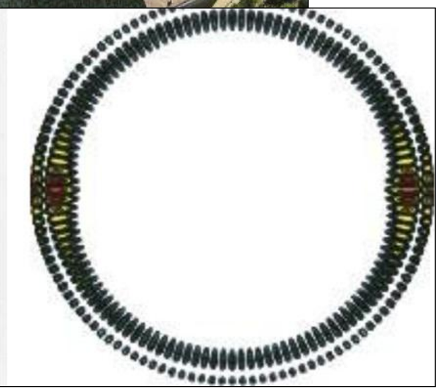
Lors de cette conférence ont été présentés divers phénomènes d'optique liés à la géométrie de certaines structure, créant un lien entre analyse et géométrie.

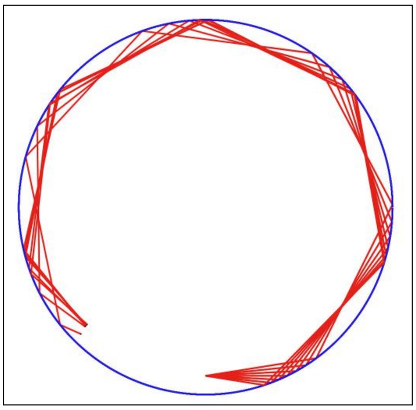


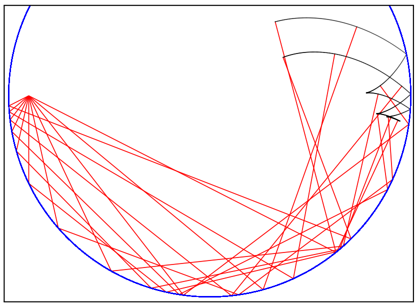


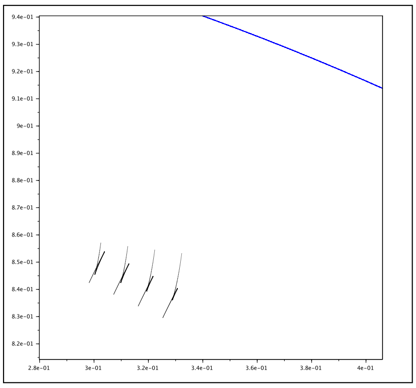


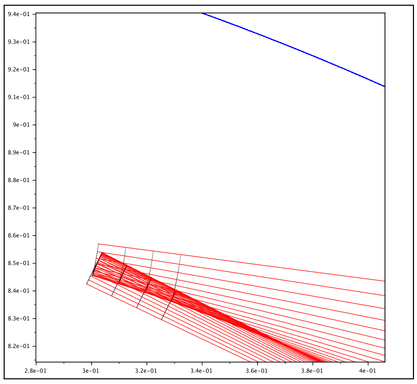

Diameter 40m

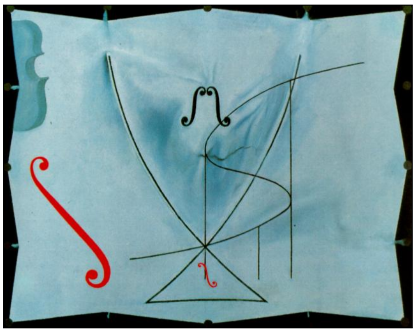


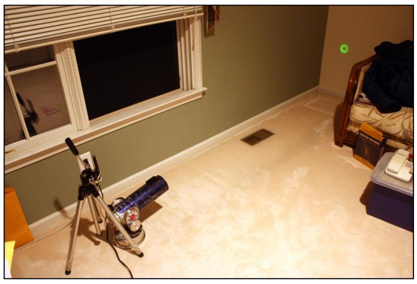


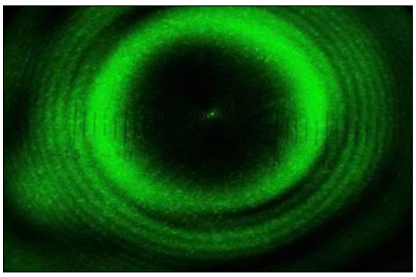










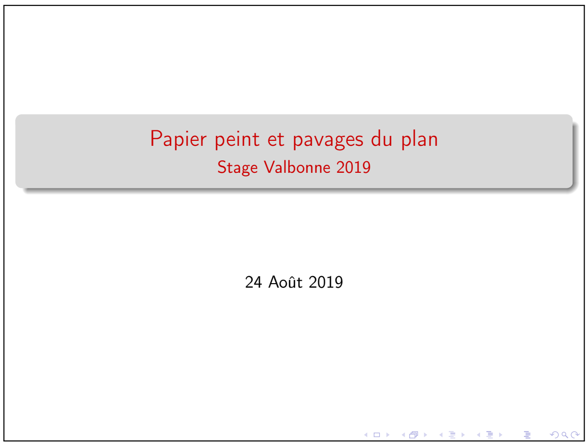


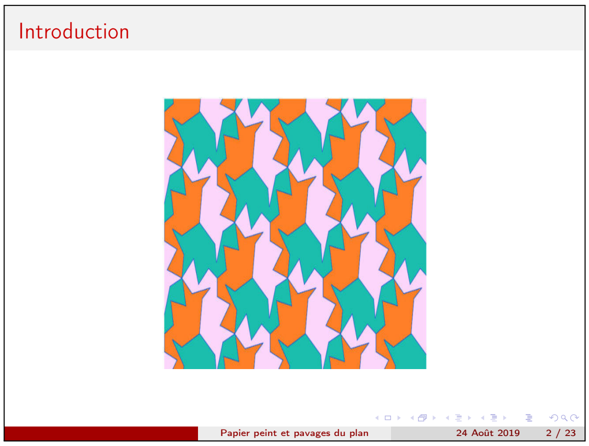
1) Photo d'une caustique formée par la lumière du soleil rasant sur un récipient en verre (qu'on distingue en partie basse), ou plutôt de la projection de la caustique sur le mur. La caustique a la forme d'un cusp (la pointe orientée vers le haut)
2) Même principe, cette fois la caustique se visualise en surface du café : la figure s'appelle une néphroïde.
3) La même figure, visualisée comme enveloppe des rayons qui arrivent par la gauche et se réfléchissent, suivant la loi de Descartes, sur le bord du cercle. La caustique est donc ici l'enveloppe des rayons, et un lieu où l'intensité lumineuse est plus concentrée.
4) Le temple du ciel à Pékin : les chinois ont depuis longtemps observé qu'en parlant près du mur, à l'intérieur de l'enceinte circulaire, on était entendu plus loin le long du mur : l'onde sonore se propage le long du mur, avec une déperdition d'intensité qui est moindre qu'en l'absence de mur.
5) Un autre exemple : le dôme de la cathédrale St-Paul à Londres, où lord Rayleigh a mis en évidence le phénomène, à la fin du 19ème siècle.
6) Un tracé de rayons, émis par une source ponctuelle placée près du bord du cercle, en bas : on observe que les rayons réfléchis restent près du bord. On observe également que, d'une part les rayons semblent se reconcentrer entre deux réflexions successives, et d'autre part que, s'ils étaient étui-distribués (angulairement) au départ de la source, ils ne semblent plus l'être ensuite...
7) Même figure, la source est à gauche : on a émis des rayons suivant des angles plus ouverts. La courbe noire au bout des rayons est le lieu de l'extrémité de tous les rayons entre les 2 rayons les plus ouverts ; c'est la courbe du front d'onde, on observe qu'elle a des points de rebroussement (et des figures qui ressemblent au cusp de la photo de départ)
8) Ici on a zoomé près du bord du cercle bleu précédent : et on a gardé une petite partie de ce front d'onde, pour observer la figure dite "queue d'aronde".
9) Même figure mais avec les rayons tracés : on observe qu'ils sont concentrés, là où la queue d'aronde se forme, puis autour des cusps qui en sont issus.
10) Un tableau de Dali, intitulé "La queue d'aronde : série des catastrophes", qui est sa dernière toile peinte sur huile. C'était l'époque où René Thom venait d'introduire la théorie des catastrophes (qui sont une description des types de singularités pouvant intervenir dans certaines géométries. On pourra se référer aux travaux de Michael Berry pour le lien très fort avec la physique de la propagation des ondes (et à l'analyse microlocale pour la description mathématique rigoureuse de la propagation des ondes, mêlant analyse, géométrie et dynamique). Tout ce qu'on a observé jusqu'à présent repose sur une analyse de la propagation des rayons (lumineux) : c'est ce qu'on appelle l'optique géométrique. Mais une onde a également un caractère ondulatoire, et il y a d'autres phénomènes qui ne peuvent s'expliquer avec les rayons. L'exemple typique est la figure d'interférences dans l'expérience des fentes de Young. Donnons un autre exemple :
11) Expérience simple avec un laser (vert) qui éclaire un petit obstacle sphérique : on observe sur le mur une tache, on s'attend à voir une zone d'ombre créée par l'obstacle, et on observe en son centre une tache lumineuse, c'est le point de Poisson (ou d'Arago).
12) La même chose, en plus grand : on voit bien la tache lumineuse au centre de la zone d'ombre. Les rayons lumineux sont diffractés par l'obstacle, et le caractère sphérique

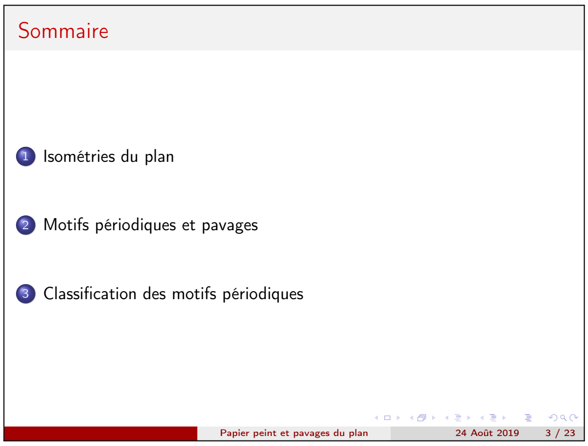
de l'obstacle permet une interférence constructive pour produire une zone lumineuse au centre de la zone d'ombre. L'optique géométrique ne suffit plus à expliquer ce phénomène, il faut une théorie ondulatoire. Sur les deux exemples considérés ici (intérieur d'un cercle, extérieur d'une sphère), tout peut être calculé explicitement (les rayons et les fronts ont des expressions algébriques, on peut ensuite construire des approximations hautes fréquences des ondes qui se propagent et calculer exactemnent leur amplitude, ainsi que la figure d'interférence observée dans l'expérience avec le laser).

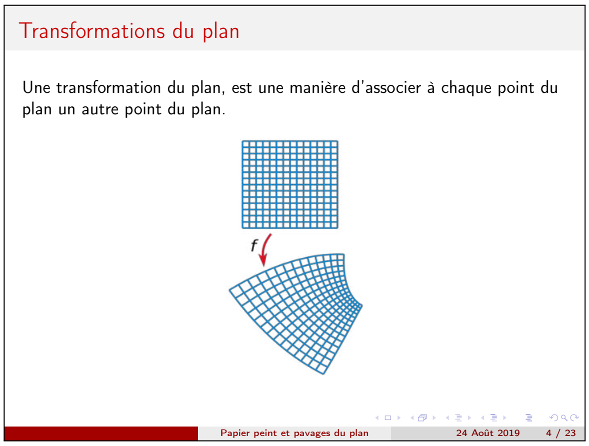
3 Pavage du plan et papier peint (Colin Davalo)

L'objectif de la conférence était de parler des motifs périodiques sur le plan, comme par exemple les motifs de certains papiers peints. Certains de ces motifs ont des axes de symétrie, ou encore ne sont pas modifiés après certaines rotations. Il se trouve que l'on peut distinguer 17 types de motifs différents. L'objectif de la conférence était de comprendre comment reconnaître des motifs de même type, et de comprendre pourquoi il n'y en a que 17.



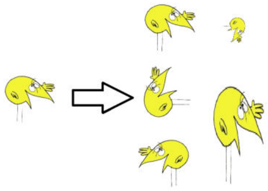






Isométries du plan

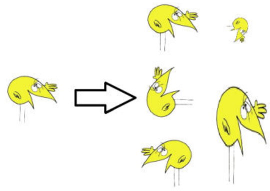
Il existe de nombreuses manières de déformer le plan :



Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 5 / 23

Isométries du plan

Il existe de nombreuses manières de déformer le plan :



Une isométrie est une transformation qui **préserve les distances**.

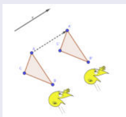
Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 5 / 23

Quelques isométries

Une isométrie est une transformation qui **préserve les distances**.

Translation

Si on se donne un vecteur $\vec{v}$, la translation de vecteur $\vec{v}$ consiste à depalcer tous les points du plan celon ce vecteur.



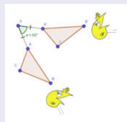
Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 6 / 23

Quelques isométries

Une isométrie est une transformation qui **préserve les distances**.

Rotation

Si on se donne un point O et un angle α, la rotation de centre O et d'angle α consiste à tourner tous les points d'un angle α autour du point O.

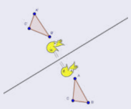


Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 6 / 23

Quelques isométries

Une isométrie est une transformation qui **préserve les distances**.

Symétries axiales



Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 7 / 23

Y en a t-il d'autres ?

Orientation

Une isométrie préserve l'orientation du plan si elle préserve les angles orientés dans le plan.

Théorème

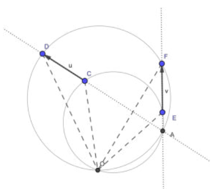
Toutes les isométries qui préservent le plan sont des translations ou des rotations.

Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 8 / 23

Preuve

Théorème

Toutes les isométries du plan qui préservent l'orientation sont des translations ou des rotations.

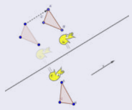


Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 9 / 23

Et celles qui ne préservent pas l'orientation ?

Symétries glissées

Soit d une droite et $\vec{v}$ un vecteur colinéaire à d. Une symétrie glissée d'axe d et de vecteur $\vec{v}$ est la composition d'une symétrie axiale d'axe d et d'une translation de vecteur $\vec{v}$.



Théorème

Toutes les isométries du plan qui ne préservent pas l'orientation sont des symétries glissées (ou pas glissées).

Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 10 / 23

Motifs périodiques et pavages

Symétries d'un motif

Les symétries d'un motif sont les transformations qui ne modifient pas le motif.

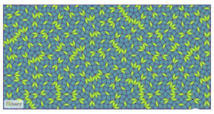
Motif périodique

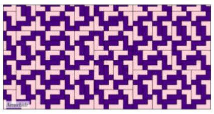
Motif périodique

Un motif périodique est un motif qui se répète périodiquement dans deux directions différentes.

Autrement dit, un motif périodique est un motif qui admet deux symétries qui sont des translations ne vecteurs non-colinéraires.

Motifs apériodiques



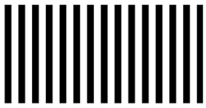


C'est joli... Mais ce n'est pas le sujet qui non intéresse aujourd'hui !

Autres motifs exclus

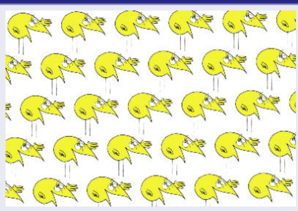
On considère des motifs qui n'ont pas comme symétrie des translatiosn arbitrairement petites. En particulier cela exclut :

- Le motif monochrome, où tout le plan est de la même couleur.
- Les motifs en bande, pour lesquels il existe une direction dans laquelle toutes les translations sont des symétries du motif.
- Certains motifs abstraits et compliqués...



Classifications des motifs : 3 motifs différents

Type $p1$, ou o

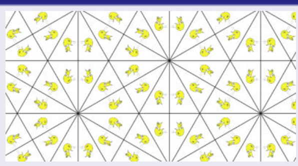


Classifications des motifs : 3 motifs différents

Type pm, ou $**$

Classifications des motifs : 3 motifs différents

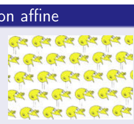
Type $p6m$, ou $*632$

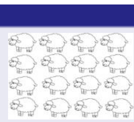


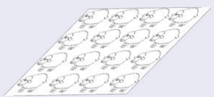
Motifs du même type

Deux motifs sont dits **de même type** si "à une transformation affine près", *ils ont les mêmes symétries.*

Transformation affine



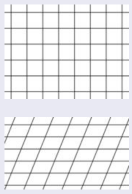




Motifs du même type

eux motifs sont dits **de même type** si "à une transformation affine près", *ils ont les mêmes symétries.*

Motifs qui ne sont pas du même type

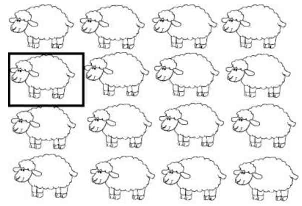


Si en modifiant l'image le motif, on perd ou en ajoute des symétries, ça ne comte pas !

Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 16 / 23

Domaine fondamental d'un motif

Un **domaine fondamental** d'un motif est une partie du motif qui, lorsqu'on lui applique toutes les symétries du motif *pave le plan.*



Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 17 / 23

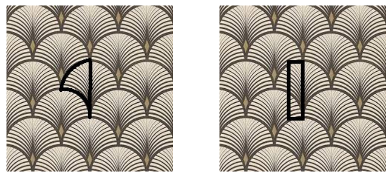
Domaine fondamental d'un motif

Un **domaine fondamental** d'un motif est une partie du motif qui, lorsqu'on lui applique toutes les symétries du motif *pave le plan.*

Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 17 / 23

Domaine fondamental d'un motif

Un **domaine fondamental** d'un motif est une partie du motif qui, lorsqu'on lui applique toutes les symétries du motif *pave le plan.*



Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 17 / 23

Points singuliers

Dans un domaine fondamental, on distingue trois types de points singuliers :

- Les centres de rotations qui sont des symétries du motif (points cône).
- Les points appartenant à un axe de symétrie du motif (points mirroirs)
- Les points se situant à l'intersection d'au moins deux axes de symétrie du motif

Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 18 / 23

Les ? ? types de motifs

- ≈ 1860 Camille Jordan découvre 16 types de motifs, il pense les avoir tous découverts.

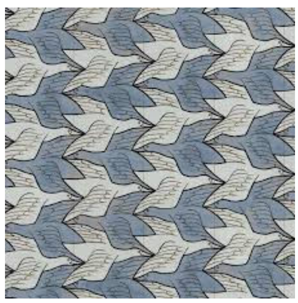
Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 19 / 23

Les 17 types de motifs

- ≈ 1860 Camille Jordan découvre 16 types de motifs, il pense les avoir tous découverts.
- ≈ 1880 Fedorov, Schoenflies, and Barlow montrent qu'il en existe exactement 17.

Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 19 / 23

Reconaître les motifs



Papier peint et pavages du plan 24 Août 2019 20 / 23

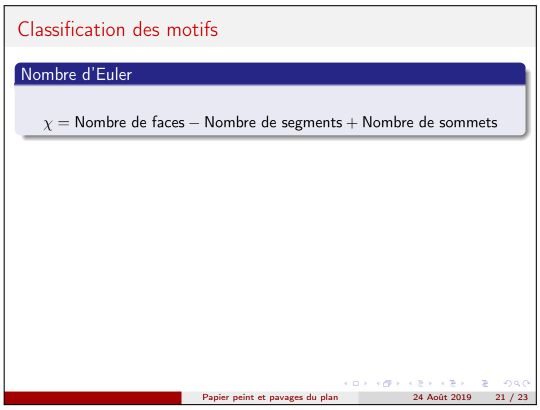

Reconaître les motifs
Papier peint et pavages du plan
24 Août 2019
20 / 23

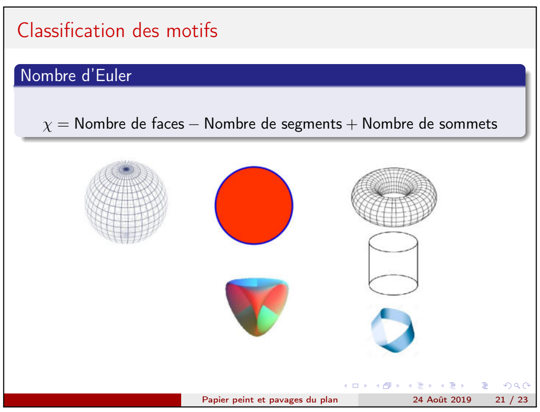

Reconaître les motifs
Papier peint et pavages du plan
24 Août 2019
20 / 23

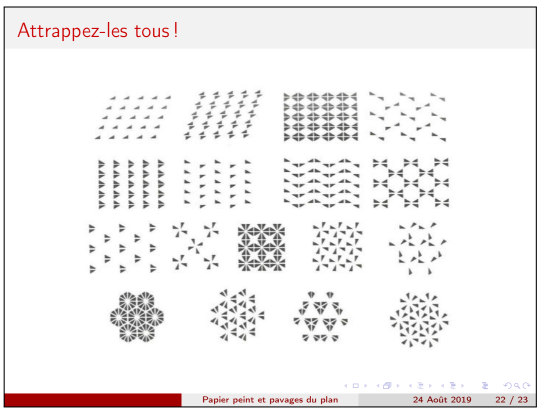

Reconaître les motifs
Papier peint et pavages du plan
24 Août 2019
20 / 23


Reconaître les motifs
Papier peint et pavages du plan
24 Août 2019
20 / 23


Reconaître les motifs
Papier peint et pavages du plan
24 Août 2019
20 / 23


Classification des motifs
Nombre d'Euler
χ = Nombre de faces − Nombre de segments + Nombre de sommets
Papier peint et pavages du plan
24 Août 2019
21 / 23


Classification des motifs
Nombre d'Euler
χ = Nombre de faces − Nombre de segments + Nombre de sommets
Papier peint et pavages du plan
24 Août 2019
21 / 23


Attrapez-les tous !
Papier peint et pavages du plan
24 Août 2019
22 / 23

4 Présentation $\mathbb{TFJM}^2$ et des Correspondances

Les Correspondances de Jeunes Mathématicien·ne·s proposent d'échanger par vidéo sur des problèmes de mathématiques. Elles se déroulent par équipe de lycéen·ne·s, de 3 à 5 personnes, entre novembre 2019 et février 2020 pour leur deuxième édition.

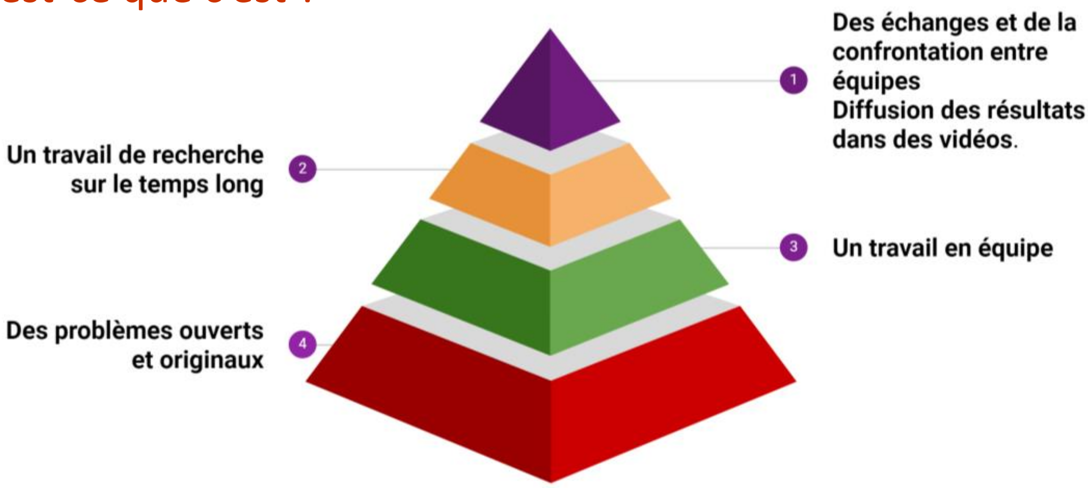
Une liste de problèmes ouverts est proposée. Chaque équipe choisit celui qui l'intéresse et dispose de plusieurs semaines pour réfléchir au problème et réaliser une courte vidéo pour exposer ses résultats. Ensuite, les élèves reçoivent une vidéo réalisée par une autre équipe sur le même problème et échangent avec cette équipe. Les élèves présentent dans une seconde vidéo une synthèse de leur échange. Les meilleures vidéos sont primées et diffusées, les élèves seront invités à visiter un laboratoire de mathématiques.

Plus d'informations sur `https://correspondances-maths.fr/`.

CORRESPONDANCES DE JEUNES MATHÉMATICIEN·NE·S

Partager des maths en équipe

1. Qu'est-ce que c'est ?

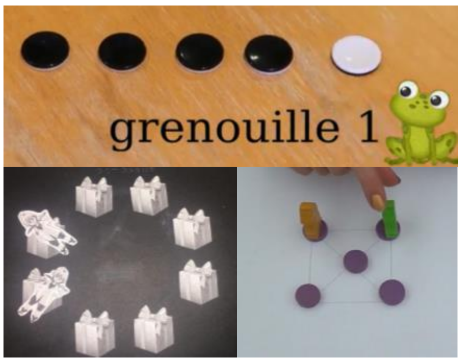


2. Construction d'une équipe et participation

- Equipe de 3 à 5 lycéens
- Un encadrant par équipe
- La participation est gratuite

3. Faire des maths en laissant place à la créativité

- Des problèmes ouverts, originaux et accessibles à tous
- Valorisation des vidéos claires, vivantes, originales et dynamiques
- Possibilité d'utiliser de nombreux supports



4. En savoir plus…

Site internet : correspondances-maths.fr
Twitter : @Corres2maths

5 Soirées astronomie

Une vingtaine de stagiaires et animatheurs ont eu la chance de profiter d'une soirée d'astronomie proposée par l'association qui a ses installations au Mirador, une petite butte isolée du CIV. Deux astronomes passionnés nous ont présenté l'histoire de leur discipline et de la technologie qui l'accompagne, tout en regardant avec nous le ciel s'assombrir et les constellations apparaître. Grâce à deux grands télescopes professionnels, nous avons pu entre autres admirer les couches nuageuses de Jupiter entouré de ses lunes, les anneaux de Saturne et la division de Cassini, ou encore l'amas stellaire du Hibou.

6 Clôture du stage

En cette dernière soirée, les stagiaires se sont réunis pour une dernière conférence. Après quelques informations pratiques concernant le retour du lendemain, les animatheurs ont présenté une longue liste de compétitions, activités mathématiques, clubs virtuels ou non, livres et références sur internet.

Suite à tout cela, Théo a décerné les prix pour les élèves ayant corrigé le plus d'exercices de la muraille. Le palmarès est présenté dans le diaporama suivant.

Un appel à la mobilisation d'animatheurs pour les années à venir a été ensuite lancé. La POFM a besoin de vous pour corriger des copies et organiser des stages !

Les animatheurs ont présenté les activités de la soirée. Mais avant d'en profiter, une conférence de dernière minute a été organisée afin de présenter les meilleurs commentaires du questionnaire de satisfaction que les stagiaires avaient rempli.

D'ici demain Après le stage Muraille La POFM Autour de ce soir

Réunion de fin de stage

29 août 2019

D'ici demain Après le stage Muraille La POFM Autour de ce soir

D'ici demain Après le stage Muraille La POFM Autour de ce soir

1. D'ici demain
2. Après le stage
3. Muraille
4. La POFM
5. Autour de ce soir

D'ici demain Après le stage Muraille La POFM Autour de ce soir

À faire

- La valise !
- Petit-déjeuner 7h30.
- **Quitter les chambres avant 9h.**
  - Mettre les draps et taie d'oreiller au pied du lit
  - Retirer son nom sur la porte
  - Bien remettre tous les meubles en place

Compétitions

Compétitions olympiques

- IMO : Olympiades Internationales de Mathématiques
- RMM : Romanian Masters of Mathematics
- EGMO : Olympiades Européennes pour Filles
- JBMO : Olympiades Balkaniques Junior
- MYMC : Compétition méditérranéenne

Autres activités Animath et compétitions

- TFJM^2 et ITYM
- IOI et EJOI
- Alkindi
- Week-end Filles et Maths
- Correspondances

Clubs

Clubs existants

- Existants : Lyon (Club de mathématiques discrètes) Nancy (http ://depmath-nancy.univ-lorraine.fr/club/) Paris (parimaths.fr) Strasbourg (Cercle) Toulouse (Cercle Sofia Kovalevskaïa) Grenoble.
- Et chez vous ?

Clubs virtuels

- Mathmosphère : pour les plus jeunes du groupe A, vos frères/soeurs... https ://animath.fun-campus.fr/
- Mathraining, plate-forme belge pour s'entraîner aux IMO : http ://www.mathraining.be/
- France-IOI, pour apprendre l'algorithmie

Sites

Sites

- Art of problem solving : www.artofproblemsolving.com. En anglais. Annales (Community → Contests), forums.
- Yufei Zhao, Evan Chen, en anglais. Andrei Eckstein, en roumain (junior).
- AuDiMATH autour de la diffusion des mathématiques

Livres

Livres

- *Solutions d'experts*, Arthur Engel
- *Les olympiades de mathématiques*, Tarik Belhaj Soulami
- *La géométrie du triangle*, Yvonne et René Sortais
- Anciens polys de stage
- *Olympiades internationales de mathématiques 1976-2005*, Paul Bourgade
- Euclidian Geometry for Mathematical Olympiads, Evan Chen
- *300 défis mathématiques*, Mohammed Aassila

D'ici demain Après le stage **Muraille** La POFM Autour de ce soir

Muraille

Quelques chiffres...

- 51 problèmes résolus sur 143 !
- Individuel : 8 en groupe A, 11 en groupe B, 9 en groupe C, 10 groupe D
- par équipes : 0 en groupe A, 6 en groupe B, 3 en équipe C, 8 en équipe D.

D'ici demain Après le stage Muraille La POFM Autour de ce soir

Muraille

Palmarès individuel

- Groupe A : **1. Anatole Bouton, 12pts.**, 2. Gaëtan Dautzenberg, 2pts.
- Groupe B : **1. Elliot Thorel, 29pts**, 2. Adam Donadille, 10pts, 3. Teiki Rigaud et Samuel Avril, 1pt.
- Groupe C : **1. Antoine Corbineau, 10 pts**, 2. Roberto Bolzan, 9pts, 3. Quentin Hurez, 6pt, 4. Raphaël Gandin, 3pts, 4. Matthieu Vogel, 2pts.
- Groupe D : **1. Ayoub Tirdab, 11pts**, 2. Anna Luchnikova, 3pts, 3. Vladimir Ivanov, Quentin Nguyen, 2pts, 4. Roméo Nazaret, 1pt.

D'ici demain Après le stage Muraille La POFM Autour de ce soir

Muraille

Palmarès par équipes

- Groupe B : **1. Elsa Lubek / Isaline Duperon, 6pts**, 2. Augustin Kheng / Camille Ordronneau, 4pts, 3. Aurélien Chen / Augustin Kheng / Alexandre Hervou, 3pts, 4. Florien Chivé / Samuel Avril, 1pt.
- Groupe C : **1. Adam Donadille / Antoine Corbineau, 7pts**, 2. Théo Goix / Emir Melliti / Adrien Patoz / Benoît Fanton, 3pts.
- Groupe D : **1. Vladimir Ivanov / Justin Cahuzac / Aurélien Fourré / Elias Caeiro / Roméo Nazaret, 9pts**, 2. Vladimir Ivanov / Roméo Nazaret, 2pts, 3. Ayoub Tirdab / Adrien Rey et Yaël Dillies / Justin Cahuzac, 1pt.

D'ici demain Après le stage Muraille **La POFM** Autour de ce soir

POFM NEEDS YOU !

D'ici demain Après le stage Muraille La POFM **Autour de ce soir**

Autour de ce soir...

RDV **21h30 à l'Agora** pour fêter la fin du stage (pizzas, boissons). Jeux possibles tard, **sans faire trop de bruit ni sortir du campus.**

IX. La Muraille

Une muraille de 143 exercices était affichée dans la salle commune. Les exercices 1 à 42 sont dits de NIVEAU 1. Les exercices 43 à 96 sont dits de NIVEAU 2. Les exercices 97 à 143 sont dits de de NIVEAU 3

Un exercice est décoré de n étoiles lorsque il est resté sans solution à la muraille de n stages.

Les élèves du groupe A cherchent les exercices (étoilés ou non) de tous niveaux. Les élèves du groupe B cherchent les exercices (étoilés ou non) de NIVEAU 2 ou 3 et les exercices étoilés de NIVEAU 1. Les élèves du groupe C cherchent les exercices (étoilés ou non) de NIVEAU 3 et les exercices étoilés de NIVEAU 2. Les élèves du groupe D cherchent les exercices (étoilés ou non) de NIVEAU 3.

Une fois un exercice résolu, la solution devait être rédigée et donnée à une animatrice ou un animateur. La première solution correcte d'un exercice est reproduite dans ce polycopié. Il était possible de résoudre les exercices à plusieurs. Le but était d'avoir tout résolu à la fin du stage !

À la fin du stage, quatre Grand Prix Mystère seront décernés aux quatre élèves ayant obtenu le plus de points en résolvant des exercices de la Muraille dans chacun des quatre groupes A, B, C, D.

À la fin du stage, un autre Grand Prix Mystère sera décerné à l'équipe (constituée d'au moins deux élèves et d'au plus quatre élèves) ayant obtenu le plus de points en résolvant des exercices de la Muraille.

BARÈME : Un exercice à x étoiles résolu rapporte $x + 1$ points (sauf pour les élèves du groupe B qui résolvent des exercices étoilés de NIVEAU 1 et les élèves du groupe C qui résolvent des exercices étoilés de NIVEAU 2, pour lesquels un exercice à x étoiles rapporte x points).

Énoncés

Exercice 1
** Trouver tous les entiers n strictement positifs tels que $2^n + n$ divise $8^n + n$. *Elliot Thorel*

Exercice 2
On écrit les fractions $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ..., \frac{n-1}{n}$ au tableau. On s'autorise à "*retourner*" certaines fractions, *retourner* une fraction consiste à remplacer $\frac{a}{b}$ par $\frac{b}{a}$. Trouver les n tels qu'on puisse *retourner* certaines fractions de sorte à ce que le produit des nombres au tableau soit 1.

Exercice 3
**** Soit ABC un triangle équilatéral et P un point à l'intérieur de ce triangle. Soient D, E et F les pieds des perpendiculaires de P sur $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ respectivement. Montrer que :

1. $AF + BD + CE = AE + BF + CD$ et que
2. $|APF| + |BPD| + |CPE| = |APE| + |BPF| + |CPD|$,

où $|XYZ|$ désigne l'aire du triangle XYZ.

Exercice 4
*** Soient x, y deux entiers relatifs et p un nombre premier. Montrer que si l'on a $x \equiv y$ $[p]$, alors on a $x^p \equiv y^p$ $[p^2]$.

Elliot Thorel

Exercice 5
** Trouver tous les quadruplets d'entiers positifs (w, x, y, z) tels que

$$w^x + w^y = w^z.$$

Adam Donadille et Antoine Corbineau

Exercice 6
En notant a, b, c les trois solutions réelles de l'équation $x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$, combien vaut $\frac{1}{ab} + \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$?

Anatole Bouton

Exercice 7
Quel est le chiffre des unités de $1! + 2! + ... + 42!$?

Anatole Bouton

Exercice 8
**** Trouver tous les entiers relatifs x et y tels que

$$x^2y + 7x = x^2 + 3xy + 3y + 4.$$

Elliot Thorel, Augutin Kheng et Camille Ordenneau

Exercice 9
*** Les nombres de 1 à n sont écrits au tableau. À chaque étape, on choisit deux nombres a et b distincts du tableau, on les efface puis on les remplace par $ab + a + b$, et on réitère ce processus. Quel sera le dernier nombre écrit au tableau ?

Adam Donadille

Exercice 10
****** Soit $[EF]$ un segment inclus dans le segment $[BC]$ tel que le demi-cercle de diamètre $[EF]$ est tangent à $[AB]$ en Q et à $[AC]$ en P. Prouver que le point d'intersection K des droites (EP) et (FQ) appartient à la hauteur issue de A du triangle ABC.

Exercice 11
*** Soient a et b deux nombres réels et f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à x associe $x^2 + ax + b$. On suppose qu'il existe un réel t tel que $f(t) = f(f(f(t))) = 0$. Montrer que $f(0) \times f(1) = 0$.

Anatole Bouton

Exercice 12
*** Combien y a-t-il d'entiers positifs n tels que

$$\frac{n^{2016}}{n - 2016}$$

soit un nombre entier ?

Exercice 13
Quel est le rapport entre l'aire d'un carré circonscrit à un cercle et l'aire d'un carré inscrit dans le même cercle ?

Anatole Bouton et Gaetan Dautzenberg

Exercice 14
On considère 2019 nains en ligne numérotés $1, 2, ..., 2019$. Chaque nain possède une pomme rouge ou verte sur sa tête et voit les pommes de tous les nains qui ont un plus petit numéro (donc le nain i voit le nain j si et seulement si $i > j$). Blanche Neige demande à chaque nain quelle est la couleur de sa pomme. Elle commence par demander au nain 2019, puis au nain 2018, et ainsi de suite jusqu'au nain 1. Si le nain dit la bonne couleur, il peut manger sa pomme. Si les nains se mettent d'accord au début, quel est le plus grand nombre de pommes qu'ils peuvent s'assurer de manger au total ?

Anatole Bouton

Exercice 15
**** Montrer que tous les termes de la suite (a_n) définie par

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = a_3 = 1 \\ a_{n+1} = \frac{1 + a_{n-1} a_n}{a_{n-2}} \end{cases}$$

sont des entiers.

Exercice 16
*** On considère 101 points, placés à l'intérieur d'un carré 10×10. Montrer qu'il existe un triangle parmi les 101 points avec une aire inférieure ou égale à 1.

Elliot Thorel

Exercice 17
**** Existe-t-il une suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ d'entiers naturels non nuls telle que pour tous entiers $m, n \geqslant 1$ u_n et u_m sont premiers entre eux si et seulement si $|n - m| = 1$?

Adam Donadille

Exercice 18
*** Soit ABC un triangle isocèle en A et D le pied de la bissectrice intérieure issue de B. On suppose que $BC = AD + DB$. Combien vaut $\widehat{BAC}$?

Exercice 19
*** 20 enfants sont attendus par leurs grands-pères à la sortie de l'école primaire. On suppose que deux enfants quelconques choisis parmi les 20 ont au moins un grand-père en commun. Montrer qu'il y a au moins un grand-père qui attend au moins 14 de ses petits-enfants.

Elsa Lubek et Isaline Duperon

Exercice 20
Trouver toutes les paires d'entiers naturels (a, b) telles que :

$$ab + 2 = a^3 + 2b$$

Exercice 21
Trouver tous les nombres premiers distincts p, q, r tels que :
$p|qr - 1$
$q|pr - 1$
$r|pq - 1$

Exercice 22
** On inscrit 100 entiers sur un cercle. Leur somme vaut 1. On appelle séquence positive une suite de nombres consécutifs sur le cercle telle que leur somme soit strictement positive. Combien y a-t-il de séquences positives sur le cercle ?

Exercice 23
Trouver la valeur minimale de l'expression S suivante :

$$S = \frac{a + b + c}{a^2 + b^2 + c^2 + 3}$$

Avec $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exercice 24
On considère deux entiers m et n et un nombre premier p qui vérifient $0 < m < n < p$. On suppose aussi que p divise $m^2 + 1$ et $n^2 + 1$. Montrer que p divise aussi $mn - 1$.

Anatole Bouton

Exercice 25
*** Soit $ABCD, ECGF$ deux carrés tels que B, C, G sont alignés et A, D, E, F sont du même côté de la droite (BC). Soit M l'autre point d'intersection des cercles circonscrits à $ABCD$ et à $ECGF$.

Donner une autre construction du point M, n'utilisant qu'une règle non graduée.

Exercice 26
* Un naturel n est *hydraté* s'il a exactement deux diviseurs premiers. Existe-t-il une suite de 18 naturels consécutifs hydratés ?

Elsa Lubek et Isaline Duperon

Exercice 27
*** Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice part du nombre 2 et les joueurs jouent chacun leur tour. A chaque tour, en notant n le nombre atteint par le joueur précédent, on ajoute un nombre m tel que m divise n, $m \neq n$, et $m + n \leqslant 2016$. Le premier joueur à ne plus pouvoir jouer a perdu. Quel joueur peut s'assurer la victoire ?

Exercice 28
Soit n un entier strictement positif. On dit qu'un sous ensemble A de $\{1, 2, ..., n\}$ est "*fade*" si pour tout x, y dans A, $x + y$ n'est pas dans A. Selon la valeur de n, quel est le cardinal du plus grand ensemble *fade* ?

Exercice 29
** Rusalka observe par un beau soir d'été 50 étoiles. Avec son matériel d'astronomie, elle calcule la somme des distances mutuelles entre elles, qui vaut S. Soudain, un nuage surgit et cache 25 étoiles. Montrer que la somme des distances mutuelles entre les 25 étoiles restantes ne dépasse pas $S/2$.

Elsa Lubek et Isaline Duperon

Exercice 30
*** Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que $f(x+y) \geqslant f(xy)$ pour tous les réels x, y. Montrer que f est constante.

Adam Donadille

Exercice 31
*** Soit ABC un triangle isocèle en B, puis F un point sur la bissectrice de $\widehat{ABC}$ tel que (AF) soit parallèle à (BC). Enfin, soit E le milieu de $[BC]$, et soit D le symétrique de A par rapport à F. Calculer le rapport des distances EF/BD.

Exercice 32
******* Soit $\mathcal{P} = A_1 \dots A_{2n}$ un $2n-$gone convexe dans le plan. Soit P un point intérieur à $\mathcal{P}$,

non situé sur une diagonale. Prouver que P est contenu dans un nombre pair de triangles à sommets parmi les A_i.

Elliot Thorel

Exercice 33
$\star$ Montrer que pour x, y des réels positifs on a toujours :

$$\frac{x}{x^4+y^2}+\frac{y}{y^4+x^2}\leqslant\frac{1}{xy}$$

Samuel Avril

Exercice 34
$\star\star$ Si tous les points du plan sont colorés soit en rouge, soit en orange soit en violet, peut-on toujours trouver deux points de même couleur éloignés d'un centimètre exactement ?

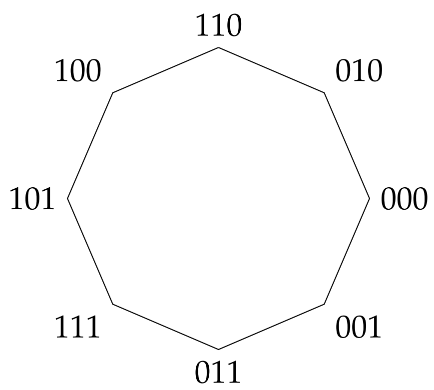
Exercice 35
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers strictement positifs tels que pour tout $i, j \geq 1$ entiers on ait :

$$pgcd(a_i, a_j) = pgcd(i, j)$$

Montrer que $a_i = i$ pour tout $i \geq 1$.

Exercice 36
$\star\star\star$ Soit ABC un triangle, I le centre du cercle inscrit dans ABC, D le pied de la hauteur de ABI issue de B, et E le pied de la hauteur de BCI issue de B. Montrer que $AB = BC$ si et seulement si $BD = BE$.

Exercice 37
$\star$ Pour quels entiers naturels $n \geqslant 2$ peut-on assigner à chaque sommet d'un 2^n-gone une suite de n chiffres 0 et 1 de telle sorte que chaque suite soit utilisée une et une seule fois et que deux suites sur deux sommets adjacents diffèrent par exactement un chiffre ? Ci-dessous, un exemple d'une telle configuration pour $n = 3$.



Teiki Rigaud, Florian Chivé et Samuel Avril

Exercice 38
On considère la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0 = 2$ et $a_{n+1} = \sqrt{2a_n - 1}$ pour tout $n \geq 0$.

• Montrer que a_n est irrationel pour tout $n \geq 1$.

• La limite de (a_n) est-elle irrationnelle (si elle existe) ?

Exercice 39
⋆ Soit ABC un triangle actuangle. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe BC en D et le cercle circonscrit à ABC en E. La tangente au cercle circonscrit à ABC en B coupe AD en F. On suppose que $AD^2 = 2CD^2$. Montrer que E est le milieu de $[AF]$.

Exercice 40
⋆ On donne un nombre n plus grand que 10^{2018}. Quel est le premier chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de la racine carrée de $(n^2 + n + 200)$?

Exercice 41
⋆

Mathieu joue au billard sur un billard rectangulaire de 2,03 m sur 3,03 m. Sa boule, de 6 cm de diamètre, est placée au milieu d'un grand côté du billard et Mathieu la fait rouler, sans effet, selon un angle de 45 degré par rapport au côté du billard. En supposant que Mathieu lui ait donné suffisamment de force, à quelle distance du point de départ le centre de la boule sera-t-il au moment du 59e rebond ?

Exercice 42
⋆⋆ Eva et Victor disposent d'une tablette de chocolat rectangulaire de n carrés de longueur et 2 carrés de hauteur pour un certain entier $n > 0$ et jouent au jeu suivant : chacun leur tour, en commençant par Eva, ils choisissent un carré de la tablette et le croquent ainsi que tous les carrés situés en haut ou à droite de celui-ci. Le dernier carré, en bas à gauche, étant fourré au piment, le joueur qui se trouve obligé de le manger a perdu. Est-ce que Victor ou Eva possède une stratégie gagnante ? Si oui, quelle est-elle ?

Anatole Bouton

Exercice 43
⋆ Savinien et Martin jouent à un jeu. Les cases d'un échiquier $n \times n$ sont toutes vides et blanches, sauf celle en bas à gauche qui est noire et sur laquelle se trouve une tour. Tour à tour, Savinien et Martin la déplacent sur une case blanche et colorient cette case en noir (une tour peut se déplacer d'une case sur n'importe quelle autre case située sur la même ligne ou la même colonne). Le premier qui ne peut plus jouer a perdu. En fonction de n, qui a une stratégie gagnante et en quoi consiste-t-elle ?

Raphaël Gandin

Exercice 44
Soit q un entier strictement positif et P un polynôme à coefficients entiers. Montrer qu'il existe un entier $n > 0$ tel que $P(1) + \cdots + P(n)$ soit divisible par q.

Exercice 45
⋆⋆⋆⋆⋆ Pour quels entiers $n \geqslant 1$ existe-t-il une bijection

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\},$$

de sorte que $|\sigma(i) - i| \neq |\sigma(j) - j|$ si $i \neq j$?

Exercice 46

⋆ Martin et Savinien jouent à un jeu : une droite est tracée dans le plan. Martin choisit une caractéristique parmi "médiatrice", "médiane", "hauteur", "bissectrice intérieure". Savinien trace ensuite une deuxième droite coupant la première en un point P. Martin trace alors une troisième droite sécante aux deux autres en P. Si Savinien parvient à dessiner un triangle dont les trois droites remarquables à la caractéristique choisie sont les trois droites dessinées, il gagne. Sinon c'est Martin qui l'emporte. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 47

⋆⋆⋆ Quel est l'entier n minimal tel que, si on place n points sur le réseau hexagonal, il existe forcément deux de ces points dont le milieu est sur le réseau hexagonal ?

Exercice 48

Soit n un entier strictement positif, on définit $S_n := \sum_{k=1}^{n-1}(k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k)$.
Montrer que $5S_n + n$ est un carré parfait si et seulement si n est un carré parfait.

Exercice 49

⋆⋆⋆⋆ Soit P un point de l'espace et $r > 0$. Montrer qu'il existe 8 sphères disjointes de même rayon r qui cachent le point P, c'est-à-dire que toute demi-droite issue de P rencontre au moins l'une des sphères. On supposera que les centres des sphères sont tous à des distances $> r$ de P.

Exercice 50

⋆⋆⋆⋆ Parmi les quadrilatères de côtés a,b,c,d caractériser géométriquement celui qui a la plus grande aire.

Exercice 51

⋆⋆⋆ Achille et Briséis ont un tas de $2n + 1$ jetons. Tour à tour, ils peuvent en retirer un nombre au choix entre 1 et $2k + 1$, et ce jusqu'à épuisement du tas. Le but de chaque joueur est de finir en ayant retiré, en tout, un nombre pair de jetons.

Achille commence. A-t-il une stratégie gagnante ?

Elliot Thorel

Exercice 52

Soit $n \geq 1$ un entier. Une suite $a_1, a_2, ..., a_n$ d'entiers est dite "*élégante*" si elle respecte les deux conditions suivantes :

• $a_i = 1$ ou $a_i = 0$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$

• Il n'existe aucune sous suite de (a_n) se répétant trois fois consécutivement. Par exemple (a_n) ne peut pas contenir les nombres $1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1$ consécutivement puisque la sous-suite $(1, 0, 1)$ est répétée trois fois consécutivement.

Montrer qu'il existe des suite *élégantes* de taille arbitrairement grande.

Exercice 53
$\star\star$ Prouver qu'il existe une infinité de triplets d'entiers positifs (m, n, p) tels que $4mn - m - n = p^2 - 1$, mais aucun tel que $4mn - m - n = p^2$.

Antoine Corbineau

Exercice 54
Soit $n \geqslant 4$ un entier naturel et $x_1, \dots, x_n$ des réels. Montrer que

$$x_1^4 + \cdots + x_n^4 \geqslant \frac{(x_1 - x_2)^4 + (x_2 - x_3)^4 + \cdots + (x_n - x_1)^4}{16}$$

Exercice 55
Soit $n \geq 2$ un entier. Montrer qu'il existe n points du plan non tous alignés tels que la distance entre deux points soit toujours entière.

Exercice 56
Dans un immeuble, il y a 7 ascenseurs desservant chacun exactement 6 étages. Sachant que pour toute paire d'étages on peut trouver un ascenceur passant par ces deux étages, combien y a-t-il d'étages au maximum ?

Elliot Thorel

Exercice 57
Trouver toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$f(x^2 + f(x)f(y)) = xf(x + y)$$

Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 58
Soit ABC un triangle acutangle. D est le pied de la hauteur issue de A. Soit E le pied de la perpendiculaire à (AC) issue de D. La perpendiculaire à (BE) par A coupe (DE) en P. Montrer que $\frac{PE}{DP} = \frac{DB}{DC}$.

Exercice 59
$\star\star$ Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous m, n entiers naturels,

$$f(f(m) + f(n)) = m + n.$$

Aurelien Chen, Augustin Kheng, Alexandre Hevrou, Antoine Corbineau,Quentin Hurez et Raphaël Gandin

Exercice 60
$\star\star\star\star$ On considère n entiers $a_1, \dots a_n$ dans $\{1, \dots 2015\}$ tels que le ppcm de deux d'entre eux est toujours > 2015. Montrer que

$$\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} < 2.$$

Quentin Hurez

Exercice 61
***** Déterminer tous les couples de polynômes non constants P et Q unitaires, de degré n et admettant n racines positives ou nulles (non nécessairement distinctes) tels que

$$P(x) - Q(x) = 1.$$

Exercice 62
Montrer que pour tout réels positifs $x_1, x_2, ..., x_n$ on a :

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \cdots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geqslant n$$

Exercice 63
Soit c un entier. Existe-t-il un polynôme P à coefficients entiers vérifiant les conditions suivantes ?

• $P(0) = 1$

• Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = P(x_n)$ (pour tout $n \geq 0$). Il existe un entier N tel que pour tout $n > N$ on ait pgcd$(x_n, n+c) > 1$.

Exercice 64
** Les tangentes au cercle circonscrit d'un triangle ABC en A et C se coupent en un point P. Les droites (AB) et (CP) se coupent en un point Q. Montrer que si les triangles ABC, ACP et BCQ ont même aire, alors ABC est rectangle.

Exercice 65
***** Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie strictement croissante d'entiers naturels telle que pour tout n, le terme a_n soit égal soit à la moyenne arithmétique, soit à la moyenne géométrique des deux termes a_{n-1} et a_{n+1}. Cette suite est-elle nécessairement toujours arithmétique ou toujours géométrique à partir d'un certain rang ?

Adam Donadille et Antoine Corbineau

Exercice 66
** Aujourd'hui, Léo l'escargot a avancé le long du chemin de huit heures du matin à six heures du soir. Plusieurs personnes l'ont observé dans son trajet : chacune est restée une heure exactement, et a pu observer que Léo avait avancé d'un mètre exactement. À tout moment de la journée, il y avait au moins un observateur. Quelle est la plus grande distance que Léo a pu parcourir ?

Exercice 67
Trouver tous les entiers n strictement positifs tels que :

$$\text{pgcd}\left(\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, ..., \binom{n}{n-1}\right) > 1$$

Exercice 68
**** Soit $x_0, x_1, x_2, \ldots$ une suite de nombres réels. On dit que la suite $x_0, x_1, \ldots$ est convexe si :

$$\frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2} \geqslant x_n \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0$$

et qu'elle est log-convexe si :

$$x_{n+1}x_{n-1} \geqslant x_n^2 \quad \text{pour tout entier } n \geqslant 0$$

On suppose que pour tout nombre réel $a > 0$, la suite $x_0, ax_1, a^2x_2^2, a^3x_3^3, \ldots$ est convexe. Prouver que la suite $x_0, x_1, \ldots$ est log-convexe.

Antoine Corbineau

Exercice 69
** Quels sont les cinquante premiers chiffres après la virgule de $(10 + \sqrt{101})^{40}$?

Matthieu Vogel

Exercice 70
**** Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et P un point à l'intérieur de ce triangle. On construit un triangle XYZ de côtés de longueur PA, PB et PC et on note F son point de Fermat. Montrer que $FX + FY + FZ = a$.

Exercice 71
****** Une droite passant par un point A coupe un cercle $\mathcal{C}$ en B et C. On suppose que B est situé entre A et C. Les deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par A sont tangentes à $\mathcal{C}$ en S et en T. On note P le point d'intersection de (ST) et (AC). Montrer que $\frac{AP}{PC} = 2\frac{AB}{BC}$

Exercice 72
***** Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tous entiers $m, n \geqslant 0$ on ait

$$f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n).$$

Exercice 73
** Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (a, b) tels que $a^2 + 3b$ et $b^2 + 3a$ soient des carrés parfaits.

Ayoub Tirdad / Quentin Nguyen

Exercice 74
****** Soit ABC un triangle dont le cercle inscrit est noté ω. Soient I le centre de ω et P un point tel que les droites (PI) et (BC) soient perpendiculaires et les droites (PA) et (BC) parallèles. Soient finalement Q et R deux points tels que $Q \in (AB)$, $R \in (AC)$, les droites (QR) et (BC) soient parallèles et finalement (QR) soit tangente à ω.

Prouver que $\widehat{QPB} = \widehat{CPR}$.

Exercice 75
Soit ABC un triangle. Les médianes AM_A, BM_B, CM_C du triangle ABC s'intersectent en M.

Soit Ω_A un cercle passant par le milieu de AM et tangent à BC en M_A. On construit similairement Ω_B et Ω_C .
Prouver que Ω_A, Ω_B et Ω_C s'intersectent en un même point.

Exercice 76
*** On trace un grand triangle ABC, et on le pave avec des triangles. On étiquette ensuite les sommets créés de la façon suivante : à chaque sommet appartenant au côté $[AB]$ du grand triangle est attribuée une lettre, A ou B ; à chaque sommet appartenant au côté $[BC]$ du grand triangle est attribué un B ou un C ; à chaque sommet appartenant au côté $[CA]$ du grand triangle est attribué un C ou un A. On étiquette les sommets situés strictement à l'intérieur du grand triangle avec un A, un B ou un C au choix.

Montrer qu'on peut trouver un triangle (hormis le grand triangle) étiqueté ABC.

Exercice 77
Théo et Paul jouent à un jeu. Théo a face à lui n enveloppes indistingables et fermées. L'une d'elles contient n roubles. Théo choisit une enveloppe. Pour aider Théo, Paul ouvre une enveloppe (autre que celle de Théo) ne contenant rien si il y a au moins 3 enveloppes non ouvertes sur la table. Théo peut alors choisir soit d'ouvrir son enveloppe, soit de recommencer le même processus avec une nouvelle enveloppe (potentiellement la même) mais en enlevant 1 rouble de l'enveloppe contenant de l'argent. Soit E_n l'espérance du gain de Théo en jouant optimalement.
Calculer $\lim_{n\to\infty}(E_n)$

Exercice 78
Soit ABC un triangle acutangle. On note I_A le centre du cercle A-exinscrit de ABC. Soit M le symétrique de I_A par rapport à BC. Montrer que (AM) est parallèle à la droite passant par l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit à I_ACB.

Exercice 79
** Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini de réels dont toutes les fonctions symétriques élémentaires sont strictement positives. Les éléments a_i sont-ils également strictement positifs ?

Note : La k-ème fonction symétrique élémentaire, notée σ_k, est la somme des produits k par k. Ainsi $\sigma_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\sigma_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + \ldots$, et plus généralement, $\sigma_k = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}$.

Exercice 80
** Existe-t-il deux nombres réels distincts a et b et deux polynômes réels unitaires distincts non constants P et Q tels que P et Q prennent la valeur a simultanément (i.e. sur le même ensemble de valeurs, supposé non vide) et de même la valeur b simultanément ?

Exercice 81
**** Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un rationnel r tel que $P(r) = n$.

Exercice 82
** Soit ABC un triangle rectangle en C et M le milieu de $[AB]$. Soit G un point de $[MC]$. Soit P sur la demi-droite $[AG)$ tel que $\widehat{CPA} = \widehat{BAC}$ et Q sur la demi-droite $[BG)$ tel que

$\widehat{BQC} = \widehat{CBA}$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQG et BPG se coupent sur (AB).

Exercice 83

** On construit la suite (u_n) de la façon suivante : on pose $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit u_n de sorte que $|u_n| = |u_{n-1} + 1|$. Quelle est la plus petite valeur que puisse prendre

$$|u_1 + u_2 + \ldots + u_{2017}| \ ?$$

Exercice 84

* Soit $f(x) = x^{2016} + a_{2015}x^{2015} + \cdots + a_1x + a_0$ un polynôme. Llawgad et Aelwyd jouent au jeu suivant : chacun leur tour, ils fixent la valeur (réelle) d'un des coefficients $a_0, \ldots, a_{2015}$. Une fois qu'une valeur a été fixée par l'un d'entre eux, l'autre ne peut plus la changer. Le jeu se termine lorsque tous les coefficients ont reçu une valeur.

Llawgad commence. Son objectif est qu'à la fin du jeu, $f(x)$ soit divisible par un certain polynôme $m(x)$. Aelwyd tente de l'en empêcher.

1. Qui a une stratégie gagnante si $m(x) = x - 2018$?
2. Qui a une stratégie gagnante si $m(x) = x^2 + 1$?

Antoine Corbineau

Exercice 85

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ de cardinal 2^k. On dit qu'une partie $B \subseteq A$ est admissible si B est telle que la somme de deux de ses éléments n'est jamais dans A. Montrer qu'il existe un sous ensemble de A de cardinal $k+1$ qui est admissible.

Exercice 86

**** Soit ABC un triangle acutangle, avec $AC > BC$. On note H son orthocentre, O le centre de son cercle circonscrit et M le milieu de $[AC]$. Soit F le pied de la hauteur issue de C, et P le symétrique de A par rapport à F. On note X l'intersection de (PH) avec (BC), Y l'intersection de (FX) avec (OM), et Z l'intersection de (OF) avec (AC). Montrer que F, M, Y et Z sont cocycliques.

Exercice 87

*** Deux amis A et B s'envoient des messages chiffrés de la façon suivante :

— Ils fixent ensemble un grand nombre premier $p > 2$.

— Chacun de leur côté, A choisit un nombre a, $1 < a < p-1$ premier à $p-1$, tandis que B choisit nombre b, $1 < b < p-1$ premier à $p-1$.

— A calcule l'inverse $\widehat{a}$ de a modulo $p-1$ et B calcule l'inverse $\widehat{b}$ de b modulo $p-1$.

— A choisit un message m (un nombre modulo p) à envoyer à B.

— A calcule $m_1 = m^a$ et l'envoie à B.

— B calcule $m_2 = (m_1)^b$ et l'envoie en retour à A.

— A calcule $m_3 = (m_2)^{\widehat{a}}$ et l'envoie encore une fois à B.

— B calcule $m_4 = (m_3)^{\widehat{b}}$.

Montrer que le nombre m_4 obtenu par B correspond bien au message m envoyé par A et expliquer pourquoi un observateur extérieur, même s'il arrive à intercepter les messages, aura du mal à retrouver m.

Théo Goix, Adrien Patoz, Emir Melliti et Benoît Fanton

Exercice 88
⋆ Soient p et q des entiers premiers entre eux. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{\lfloor \frac{k}{p}\rfloor+\lfloor \frac{k}{q}\rfloor} = \begin{cases} 0 \text{ si } pq \text{ est pair,} \\ 1 \text{ sinon.}\end{cases}$$

Exercice 89
On dit qu'un entier positif n est "*sympa*" si il existe des entiers $a_1, a_2, ..., a_n$ tels que :

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = n$$

Trouver tous les entiers *sympas*.

Exercice 90
⋆⋆⋆ Déterminer toutes les applications $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $f(1) > 0$ et pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, on ait

$$f(m^2 + n^2) = f(m)^2 + f(n)^2$$

Exercice 91
⋆ Pour un entier n, soit $f(n)$ le nombre obtenu en inversant les 0 et les 1 de l'écriture binaire de n. Par exemple, l'écriture binaire de 23 est 10111. En inversant les 0 et les 1, on obtient 01000, ce qui correspond au nombre 8. Ainsi $f(23) = 8$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \frac{n^2}{4}.$$

Pour quelles valeurs de n y a-t-il égalité ?

Exercice 92
⋆⋆⋆ On se donne un certain nombre de polynômes unitaires de degré 2 de même discriminant. On suppose que la somme de deux quelconques de ces polynômes a toujours deux racines réelles distinctes. Montrer qu'il en est de même de la somme de tous les polynômes considérés.

Exercice 93
On considère un ensemble S de $n \geq 2$ entiers distincts et strictement positifs. Montrer qu'on peut trouver deux entiers a et b dans S tels que ni $|a - b|$ ni $a + b$ ne soient dans S.

Exercice 94
On considère 100 réels distincts $a_1, a_2, ..., a_{100}$. On pose $a_{101} = a_1$, $a_{102} = a_2$ et finalement

$a_{103} = a_3$. Montrer qu'il existe un indice i tel que $1 \leq i \leq 100$ et $a_i + a_{i+3} > a_{i+1} + a_{i+2}$.

Exercice 95

**** On écrit un nombre premier $p = a_k a_{k-1}...a_0$ en base 10 et on pose

$$Q_p(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + ... + a_1 x + a_0$$

Montrer que Q_p n'a pas de racines entières sauf pour 4 valeurs de p que l'on déterminera.

Roberto Bolzan

Exercice 96

*** Soient a et b des entiers positifs. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{a} \frac{1}{2^{b+i}} \binom{b+i}{i} + \sum_{i=0}^{b} \frac{1}{2^{a+i}} \binom{a+i}{i} = 2.$$

Exercice 97

On pose $P(x)$ un polynôme non constant à coefficients réels. Pour tout entier naturel n, posons :

$$Q_n(x) = (x+1)^n P(x) + x^n P(x+1)$$

Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels toutes les racines de $Q_n(x)$ sont réelles.

Exercice 98

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère n droites du plan en position générale. Montrer qu'on peut trouver un polygone non croisé à n côtés tel que chaque côté soit sur exactement une droite et que chaque droite contienne exactement un côté.

Exercice 99

On considère un ensemble fini S de points du plan. Soit d la distance maximale séparant deux de ces points. Montrer que le nombre de couples de points à distance d est au plus $|S|$.

Exercice 100

Soit ABC un triangle et soit ω son cercle circonscrit. Soient D, E, F les milieux de BC, AC, AB respectivement. Soit T un point sur ω et soient P, Q, R les intersections de $(TD), (TE), (TF)$ avec ω. Montrer que l'aire du triangle formé par les droites $(AP), (BQ), (CR)$ ne dépend pas de la position de T.

Exercice 101

**** Soit P un point à l'intérieur d'un cercle de rayon R, d une droite passant par P et d' la perpendiculaire à d en P. On fait tourner les droites d et d' d'un angle ϕ autour de P. Montrer que quelle que soit la position du point P, l'aire balayée par d et d' à l'intérieur du cercle (qui a la forme d'une croix) vaudra $\pi R^2 \frac{4\phi}{360}$.

Exercice 102

Martin a face à lui $2n$ boites fermées et numérotées de 1 à $2n$ contenant n cubes bleus et n

rouges. Au départ Martin possède 1 euro. Au tour i, il parie sur le contenu de la boîte i (il peut parier sur un cube bleu ou un cube rouge). Martin parie x euros, où x est un montant réel d'euros positif et plus petit que la somme d'argent qu'il possède. Il récupère le double de sa mise en cas de pari réussi et rien sinon. A chaque tour, il connait le contenu des boîtes qui ont déjà été ouvertes. Quelle montant maximal Martin peut-il s'assurer à la fin du jeu ?

Exercice 103

**** Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si $2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ est un entier, alors c'est un carré parfait.

Roberto Bolzan

Exercice 104

Un entier strictement positif est *magnifique* si il peut s'écrire sous la forme $\frac{x^2 + y^2}{x + y}$ avec x et y entiers distincts strictement positifs et *moche* sinon. Montrer que :

• Si a et b sont *magnifiques* alors ab est également *magnifique*.

• Si a et b sont *moches* alors ab est également *moche*.

Vladimir Ivanov, Justin Cahuzac, Roméo Nazaret, Aurélien Fourré et Elias Caeiro

Exercice 105

On considère un ensemble T de points du plan tel que la distance maximale séparant deux points soit d. Montrer qu'il existe un disque de rayon $\frac{d}{\sqrt{3}}$ qui contient tous les points de T.

Exercice 106

***** On définit une suite u_n ainsi : u_1 et u_2 sont des entiers entre 1 et 10000 (au sens large), et u_{k+1} est la plus petite valeur absolue des différences deux à deux des termes précédents. Montrer que $u_{21} = 0$.

Exercice 107

Un nombre n est dit parfait si la somme de ses diviseurs positifs fait $2n$.

Montrer qu'il n'existe pas deux nombres parfaits consécutifs.

Anna Luchnikova

Exercice 108

On considère 10 points distincts du plan. Montrer qu'on peut les recouvrir par des disques disjoints de rayon 1.

Exercice 109

Soit $r > 1$ un entier et soit F une famille infinie d'ensembles différents de cardinal r telle que deux ensembles de cette famille ne soient jamais disjoints. Montrer qu'il existe un ensemble de cardinal $r - 1$ qui intersecte tous les ensembles de la famille F.

Exercice 110

Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit ω. Les points de tangences aux côtés $[BC]$; $[CA]$; $[AB]$ sont respectivement D, E, F. Soit M l'intersection de (EF) et (BC). Le cercle passant par B et C est tangent à ω en un point N et le cercle circonscrit au triangle DMN recoupe (AD) en L. Montrer que I, L, M sont alignés.

Vladimir Ivanov

Exercice 111
On se donne des entiers $2 \leq k \leq n$. Théodore joue au jeu suivant contre un méchant sorcier : Le sorcier possède $2n$ cartes, pour chaque entier de $i \in \{1, 2, ..., n\}$, le sorcier possède exactement 2 cartes numérotées i. Le méchant sorcier pose les cartes faces cachées en ligne de façon indistingable. Théodore effectue le mouvement suivant : il choisit k cartes, le sorcier les retourne, et si deux cartes sont identiques, Théodore gagne. Si ce n'est pas le cas, le sorcier prends les k cartes, les mélange et les repose face cachée (Il permute les cartes qu'a retourné Théodore sans modifier les autres cartes). On dit que le jeu est *gagnant* si il existe un entier m tel que Théodore puisse s'assurer de gagner en moins de m coups. Pour quels couples (k, n) le jeu est-il *gagnant* ?

Exercice 112
Dans le triangle ABC, soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et E et F les centres respectifs des cercles circonscrits aux triangles ABD et ACD respectivement. Soit ω le cercle circonscrit à DEF et soit X l'intersection de (BF) et (CE). Les droites (BE) et (BF) coupent ω en P et Q respectivement et les droites (CE) et (CF) recoupent ω en R et S respectivement. Soit Y le second point d'intersection des cercles circonscrits à PQX et RSX. Montrer que Y est sur (AD).

Exercice 113
Martin et Olivier jouent à un jeu. Sur une rangée contenant N cases, ils placent chacun à leur tour un jeton dans l'une des cases, marron pour Martin et orange pour Olivier, de telle sorte que deux cases adjacentes ne peuvent pas contenir un jeton de la même couleur et une case peut contenir au maximum un jeton. Le premier joueur à ne plus pouvoir jouer perd. Martin commence, qui possède une stratégie gagnante ?

Exercice 114
Raphaël et Andrei jouent à un jeu. Il y a M bambous sur une table. Le but est de prendre le dernier bambou. A chaque étape, si il y a n bambous sur la table, un joueur peut prendre un nombre k de bambous si k est pair et $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$ ou si k est impair et $\frac{n}{2} \leq k \leq n$. Si Raphaël commence, quel est le plus petit $M \geq 2019$ tel que Andrei ait une stratégie gagnante ?

Roméo Nazaret

Exercice 115
Soit $n \geq 3$ un entier naturel. Soit x et y des entiers naturels distincts, entre 1 et $n-1$. On dit que x et y sont *amis* s'il existe a et b des entiers naturels tels que $ax = by \neq 0 \pmod{n}$.
Déterminer les valeurs de n pour lesquelles chaque entier entre 1 et $n-1$ a un nombre pair d'*amis* entre 1 et $n-1$.

Exercice 116
Soit ABC un triangle, P, Q sur le petit arc AB du cercle circonscrit à ABC tels que $\widehat{ACP} = \widehat{QCB} < \widehat{PCB}$. Soit H l'orthocentre de ABC et R et S les projetés de H sur (CQ) et (CP) respectivement. Montrer que $PQRS$ est cyclique et donner avec justification le centre du cercle circonscrit à $PQRS$.

Anna Luchnikova

Exercice 117
Soit ABC un triangle, ω son cercle circonscrit. La tangente t_B à ω en B et la tangente t_C à ω en C se coupent en L. La parallèle à (AC) passant par B coupe t_C en D, la parallèle à (AB) passant par C coupe t_B en E. Le cercle circonscrit à BCE coupe (AB) en T et le cercle circonscrit à BCD coupe $[AC]$ en T.
Montrer que (TS) ; (AL) et (BC) sont concourantes en un point.

Anna Luchnikova

Exercice 118
Soit S l'ensemble de tous les mots de l'alphabet latin comportant exactement 26 lettres (S est donc un ensemble de cardinal 26^{26}). Pour un mot m de S, on définit $\ell(m) = \dfrac{1}{k+1}$, où k est le nombre de lettres de l'alphabet non utilisées dans l'écriture de m.
Montrer que :

$$\sum_{m \in S} \ell(m) = 3^{75}$$

Ayoub Tirdad et Adrien Rey

Exercice 119
Pour tous réels strictement positifs a, b on pose :

$$\begin{cases} M_2(a,b) = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \\ M_0(a,b) = \sqrt{ab} \\ M_{-1}(a,b) = \dfrac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \end{cases}$$

Trouver tous les réels $\lambda \in [0;1]$ tels que l'inégalité :

$$\lambda M_2(a,b) + (1-\lambda) M_{-1}(a,b) \geq M_0(a,b)$$

soit vérifiée pour tous a, b strictement positifs

Yael Dillies et Justin Cahuzac

Exercice 120
⋆ Soit Γ un cercle et A, B et C trois points à l'extérieur de Γ. Soient C_1 et C_2 les deux cercles passant par B et C et tangent à Γ. On note X et X' les points de tangence de ces cercles avec Γ. On définit de manière cyclique les points Y, Y', Z et Z'. Montrer que les cercles circonscrits à AXX', BYY' et CZZ' sont coaxiaux.

Exercice 121
⋆⋆⋆⋆⋆ Soit $k \geqslant 6$ un entier et P un polynôme à coefficients entiers tel qu'il existe k entiers distincts $x_1, \ldots, x_k$ tels que pour tout $i \in \{1, \ldots, k\}$, $P(x_i) \in \{1, \ldots, k-1\}$. Montrer que $P(x_1) = \ldots = P(x_k)$.

Exercice 122
Soit n un entier strictement positif fixé. Soient $x_1, x_2, ..., x_n$ des réels de valeur absolue supérieure ou égale à 1. Soit a un réel. Montrer que l'ensemble des n-uplets $(\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ où les ε_i sont dans $\{-1, 1\}$ et tels que

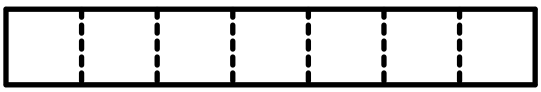
$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i \in [a; a+2[$$

est de cardinal au plus $\binom{n}{\lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Exercice 123
***** On considère une ligne de n carrés. On note $S(n)$ le nombre minimal de carrés à colorier en bleu tels que chacun des $n-1$ traits séparant deux cases voisines soit à égale distance de deux cases bleues. Montrer que

$$\lfloor 2\sqrt{n-1} \rfloor + 1 \leqslant S(n) \leqslant \lfloor 2\sqrt{n} \rfloor + 1.$$

Les "traits séparant deux cases voisines" sont réprésentés en pointillé ici :



Exercice 124
Soient a, b, c et d des réels positifs qui vérifient $abcd = 1$. Montrer que

$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geqslant 1$$

Ayoub Tirdad

Exercice 125
***** Soit $k \geqslant 1$ un entier. Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P(n)$ divise $(n!)^k$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Vladimir Ivanov, Justin Cahuzac, Roméo Nazaret, Aurélien Fourré et Elias Caeiro

Exercice 126
***** Soit $n \geqslant 4$ un entier. On considère des entiers strictement positifs $a_1, \ldots, a_n$ placés sur

un cercle. On suppose que chaque terme a_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) divise la somme de ses deux voisins, c'est-à-dire qu'il existe un entier k_i tel que

$$\frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i} = k_i$$

avec la convention $a_0 = a_n$ et $a_{n+1} = a_1$. Montrer que

$$2n \leqslant k_1 + k_2 + \cdots + k_n < 3n.$$

Exercice 127

******* On considère un ensemble de $2n + 1$ droites du plan, deux jamais parallèles ni perpendiculaires et trois jamais concourantes. Trois droites forment donc toujours un triangle non-rectangle.

Déterminer le nombre maximal de triangles aigus qui peuvent ainsi être formés.

Ayoub Tirdad

Exercice 128

****** Soit n un entier. Dans les lignes d'un tableau de 2^n lignes et n colonnes on place tous les n-uplets formés de 1 et de -1. Ensuite, on efface certains de ces nombres, et on les remplace par des 0. Prouver que l'on peut trouver un ensemble de lignes dont la somme est nulle (i.e., tel que, pour tout i, la somme des nombres appartenant à la colonne i d'une ligne de notre ensemble soit nulle).

Exercice 129

Soit un n entier positif fixé. Trouver le plus petit entier k tel que tout ensemble A de k entiers contienne un sous ensemble de taille paire dont la somme des éléments est divisible par n.

Roméo Nazaret et Vladimir Ivanov

Exercice 130

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe dont les angles aux sommets B et D sont droits. Le point M appartient à $[AB]$ et est tel que $AM = AD$. Soit N l'intersection de (DM) et (BC). les points K et H sont les projections orthogonales de de C et D sur (AN) et (AC) respectivement. Montrer que $\widehat{MCK} = \widehat{MHN}$

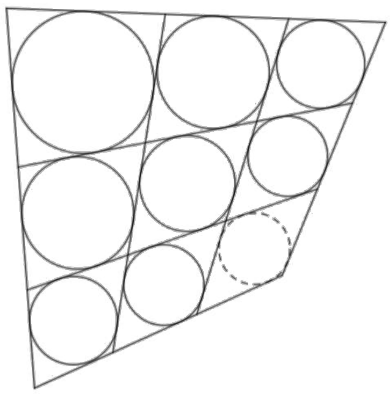
Exercice 131

Trouver tous les polynômes P a coefficients réels tels que la restriction de P à $\mathbb{Q}$ soit une bijection de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$.

Vladimir Ivanov, Justin Cahuzac, Roméo Nazaret, Aurélien Fourré et Elias Caeiro

Exercice 132

On considère une grille 3×3 (cf. figure) telle toutes les cases sauf un coin soient circonscriptibles. Montrer que cette dernière case est circonscriptible.



Exercice 133
Soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs premiers de n (comptés sans multiplcité). Trouver tous les n tels que :

$$\sigma(2^n+1)=\sigma(n)$$

Exercice 134
$\star$ Soit F_n la suite de Fibonacci : $F_0=0$, $F_1=1$ et pour tout entier positif n, $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$. On définit le polynôme P_n de degré n dont les coefficients sont les termes de la suite de Fibonacci :

$$P_n(X)=F_1X^n+F_2X^{n-1}+\ldots+F_nX+F_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}F_{k+1}X^{n-k}$$

Déterminer en fonction de n le nombre de racines réelles de P_n.

Exercice 135
$\star\star\star\star\star\star\star$ Soient $a,b,c>0$ des nombres réels tels que $a+b+c=3$. Prouver que :

$$\frac{ab}{b^3+1}+\frac{bc}{c^3+1}+\frac{ca}{a^3+1}\leq\frac{3}{2}.$$

Exercice 136
Soit A un ensemble non vide de nombres premiers distincts tel que si $p_1,p_2,...,p_k$ distincts appartiennent à A alors les diviseurs premiers de $p_1p_2...p_k+1$ appartiennent aussi à A. Montrer que $A=\mathbb{P}$, où $\mathbb{P}$ est l'ensemble des nombres premiers.

Exercice 137
$\star\star\star\star$ Soit ABC un triangle, I son centre du cercle inscrit. Soient D, E et F ses projetés sur

les côtés de ABC. Soient P et Q les intersections de la droite (EF) avec le cercle circonscrit de ABC. Soient O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits de AIB et de AIC. Montrer que le centre du cercle circonscrit de DPQ est sur la droite (O_1O_2).

Exercice 138

****** Soient P, Q deux polynômes non nuls à coefficients entiers tels que $\deg P > \deg Q$. On suppose que le polynôme $p \cdot P + Q$ possède une racine rationnelle pour une infinité de nombre premiers p. Montrer qu'au moins une racine de P est rationnelle.

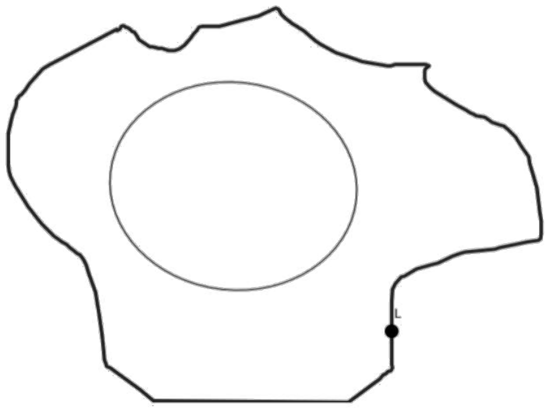
Exercice 139

Soit x, y, z trois nombres entiers et soit p un nombre premier qui vérifient $0 < x < y < z < p$. On suppose que $x^3 \equiv y^3 \equiv z^3 \pmod{p}$. Montrer que $x + y + z$ divise $x^2 + y^2 + z^2$.

Roméo Nazaret et Vladimir Ivanov

Exercice 140

Timothée a attaché son léopard noté L à un poteau en forme d'ellipse. La laisse du léopard est une boucle de longueur fixée qui fait le tour du poteau. Montrer que la limite de la zone que peut parcourir le léopard est aussi une ellipse.



Exercice 141

Soit ABC un triangle équilatéral et soit D un point de $[BC]$. Un cercle tangent à BC en D coupe $[AB]$ et $[AC]$ en M, N et P, Q respectivement. Montrer que :

$$BD + AM + AN = CD + AP + AQ$$

Vladimir Ivanov

Exercice 142

Soit k, n des entiers strictement positifs.

Montrer que $\sum_{i=1}^{n} k^{pgcd(i,n)}$ est divisible par n. *Vladimir Ivanov, Justin Cahuzac, Roméo Nazaret,* *Aurélien Fourré et Elias Caeiro*

Exercice 143
Soit p un nombre premier fixé. On considère quatre entiers $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et une suite (x_n) telle que :

$$\begin{cases} x_0 = c \\ x_1 = d \\ x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n \quad n \geq 0 \end{cases}$$

Soit t_p le plus petit entier tel que $x_{n+t_p} \equiv x_n \pmod p$ pour tout $n \geq p^2$ (on pose $t_p = +\infty$ si un tel entier n'existe pas). Quelle est la plus grande valeur possible de t_p ?

X. Citations mémorables

- Anonyme, dans le portrait mystère : « Si j'étais une blague, je serais ... certainement pas une blague de Vincent Jugé »
- Martin : « Vous êtes trop nuls au Set ... », Lucie (à Martin) : « Oh le melon ! », Martin : « Oui mais à raison. »
- Matthieu L. : « Bon il nous faut une victime » , Théodore : « Allez je me dévoue »
- Raphaël : « Il faut inspirer de la confiance dans la terreur », en écrasant une guêpe
- Théodore propose $1, 2, 3, 4$ comme nom à 4 chiffres aléatoires. Martin : « Mais c'est le nombre à 4 chiffres le plus pourri après $7, 8, 9, 10$! »
- Martin : « C'est dingue. Il y a plein de trucs et pourtant la seule chose claire c'est leur prénom. », en corrigeant les copies.
- Henry : « Tu l'as mis où le C4 ? »
- Inconnu (en pleine réflexion) : « Je me demande pourquoi je me rappelle du passé et pas de l'avenir. »
- Vincent : « Une bonne blague tu la ressers plusieurs fois. » , Remi : « Comme les pâtes de la cantines. »
- Aline : « C'est pour ça que la puissance d'un point c'est puissant. »
- Martin : « Et cette astuce vous permet de couper une droite en son milieu. »
- Emilhan : « T'as quel âge », Benoit : « Euhh... », Yael : « Quelle hésitation ! », Benoit : C'est que je dois calculer, ça change tout le temps. »
- Raphael à Yael qui va au tableau corriger un exo : « Tu t'appelles comment déjà ? », Yael : « Yael. », Raphael : « Gaël ? », Yael : « Avec un "Y". », Raphael : « Aah... Gayel ! »
- Vincent : « Tu tripatouilles ta fonction jusqu'à ce que mort s'en suive, et mort s'en suit... et on a gagné ! »
- Victor : « Preuve : Faites moi confiance, ça marche ! »
- Durant la soirée d'astronomie, : « Tu es brillant ! Mais que dans l'infrarouge ! »
- Victor : « Indice :2= 1+1 »
- Aline devant une copie :« Elle écrit super bien ! Dommage qu'elle écrive n'importe quoi »
- Victor lors d'une conférence : « Qui sait lire ? » Personne ne lève la main.
- Aurélien : « En fait les cas qu'on a eu c'est quand 2=3 »
- Etienne, ne comprenant pas exerice demande : « Ecris l'exercice à l'oral ? »

- Aline : « Les maths c'est une science de flemmards. »
- Adrien : « Il y a 10 types de personnes, ceux qui comprennent le binaire et les autres. »
- A $\forall(a,b) \in \mathbb{R}^2 f(a+b)$, Ninon substitue $a = x^2$ et $b = y^2$: « Je croyais que $\mathbb{R}^2$ c'était l'ensemble des carrés de $\mathbb{R}$ ».
- Teiki : « Adama voulu faire la grasse-matinée sans faire exprès. »
- Aurélien : « Il n'y a pas Justin/juste un Cahuzac »