Eliminatoires coupe Animath juin 2019

Animath

Toutes les réponses sont un nombre entier entre 0 et 999 inclus.

1 Exercices collège

Exercice 1 Sur mon tableau sont notés trois nombres. En les sommant deux à deux, j'obtiens les trois sommes 69, 72, et 81. Quel était le plus grand nombre écrit au tableau ?

Exercice 2 Combien de cartes d'un jeu de 52 cartes faut-il prendre pour être certain d'avoir au moins une carte de chacune des quatre couleurs ?

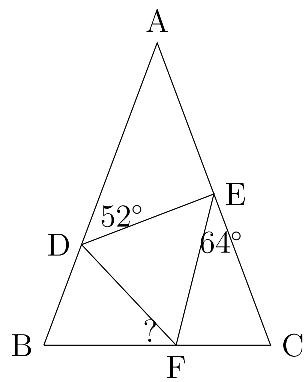
Exercice 3 Un disque est partagé en 1000 secteurs égaux par des rayons. Combien de ces secteurs une droite ne passant pas par le centre du disque peut-elle couper, au maximum ?

Exercice 4 En pensant à deux chiffres x et y, je me rends compte que le nombre $x2345y$ est multiple de 72. Que vaut alors $10x + y$?

Exercice 5 J'ai acheté 10 crayons et 6 classeurs pour $13,6$ euros. Mon frère a acheté 3 crayons et 5 classeurs pour $9,2$ euros. Combien coûte l'achat de 8 crayons et 8 classeurs, en euros ?

Exercice 6 Pour écrire les naturels de 1 à 999, combien de fois utilise-t-on le chiffre 1 ?

Exercice 7 Dans la figure (imprécise) ci-dessous, le triangle ABC est isocèle (avec les segments AB et AC égaux) et le triangle DEF, qui lui est inscrit, est équilatéral. Si $\widehat{ADE} = 52°$ et $\widehat{CEF} = 64°$, que vaut $\widehat{BFD}$, en degrés ?



Exercice 8 Combien de couples d'entiers, positifs ou non, (x, y) satisfont la relation $x^2y^2 = 100$? Pour rappel, l'ordre des éléments d'un couple est important : les couples $(1, 2)$ et $(2, 1)$ sont différents.

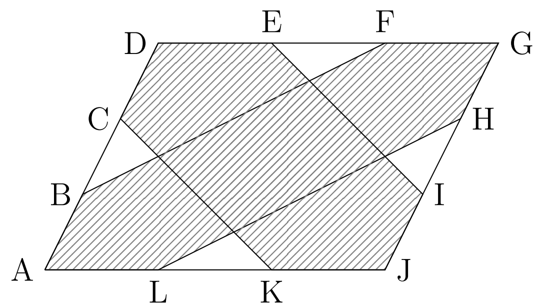
2 Exercices communs

Exercice 9 Que vaut $1+2-3+4+5-6+7+8-9+\ldots+199+200-201-6000$?

Exercice 10 Je sais que tous les chats au pelage tricolore sont des femelles et que tous les chats de mon voisin Raoul sont des mâles. Hier, j'ai vu dans mon jardin un chat tricolore à poils courts. Certaines des affiramtions numérotées suivantes peuvent être logiquement déduites de ces trois hypothèses. Que vaut la somme de leurs numéros ?

1) Tous les chats à poils courts sont des femelles.
2) Toutes les femelles ont un pelage tricolore.
4) Si un chat a un pelage tricolore, il n'appartient pas à mon voisin Raoul.
8) Si un chat n'appartient pas à mon voisin Raoul, il a un pelage tricolore.
16) Le chat que j'ai vu hier était une femelle.
32) Les chats à poils longs existent.
64) Les chats à poils longs n'existent pas.

Exercice 11 Dans la figure (imprécise) ci-dessous, $ADGJ$ est un parallélogramme, B et C divisent le segment AD en 3 segments égaux, . . ., K et L divisent le segment JA en 3 segments égaux. Si l'aire de $ADGJ$ est 540, que vaut l'aire de la zone hachurée ?



Exercice 12
Quel est le dernier chiffre de $3^{2019} + 7^{2019}$?

3 Exercices lycée

Exercice 13 Quel est le nombre de paires d'entiers naturels (0 inclus) qui sont des carrés parfaits et dont la différence vaut 36 ?

Exercice 14 Dans la charmante bougrade de Septanteville, qui compte 280 habitants, tout le monde est inscrit à l'un des trois clubs de la ville. Le club de belote compte 130 membres, celui d'échecs 180 et celui de maths 200. De plus, certaines personnes sont inscrites à plusieurs clubs. Ainsi, 90 personnes jouent aux échecs et à la belote, 100 sont inscrites aux clubs de maths et de belote et 110 cumulent échecs et maths. Combien de personnes sont inscrites simultanément aux trois clubs ?

Exercice 15 Dans un quadrilatère convexe $ABCD$, $||AB|| = ||BC|| = 25$, $||CD|| = ||DA|| = 52$ et $||AC|| = 40$, où $||XY||$ désigne la longueur du segment XY. Que vaut $||BD||$?

Exercice 16 Quel est le plus petit nombre naturel non nul qui, multiplié par 231, donne un multiple de 2002 ?

Exercice 17 Si x est positif et $x^2 + 1/x^2 = 62$, que vaut $x + 1/x$?

Exercice 18 Francis possède 11 livres tous différents : 5 de J.R.R.Tolkien, 5 de C.S.Lewis et 1 d'E.A.Abbott. De combien de centaines de manières peut-il les ranger sur son étagère s'il ne sépare pas les livres du même auteur ?

Exercice 19 A, D et B sont sur un cercle de centre O et C est l'intersection des segments AB et OD. Si $||AC|| = 75$, $||BC|| = 35$ et $||DC|| = 21$, où $||XY||$ désigne la longueur du segment XY, quel est le rayon du cercle ?

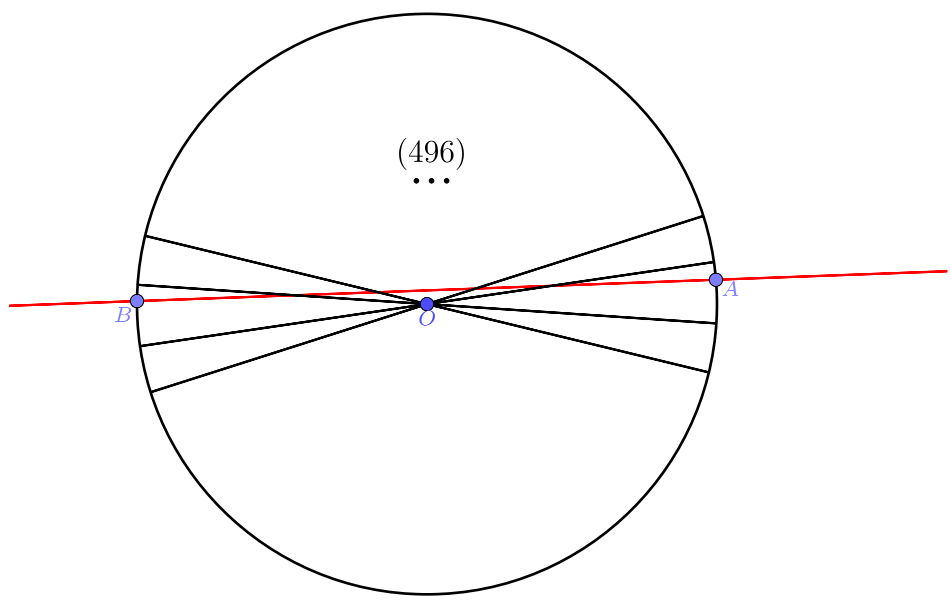
Exercice 20 Combien existe-t-il de nombres premiers dont la somme des chiffres fait 2019 ? Répondre 999 s'il en existe une infinité.

4 Solutions collège

Solution 1 Réponse : 42. Source : inspiré des Olympiades Mathématiques Belges (OMB), éliminatoire miNi 1999, Q21.
Chacun des nombres de départ est compté dans deux des sommes. En calculant $69 + 72 + 81$, on obtient donc le double de la somme des trois nombres de départ, et cette somme vaut donc 111. En retirant la somme de deux des nombres à 111, on obtient le troisième. Les trois nombres sont donc 42, 39 et 30.

Solution 2 Réponse : 40. Source : OMB, éliminatoire miDi 2001, Q6.
Si l'on pioche 39 cartes, on n'est pas sûr d'avoir une carte de chaque couleur. On pourrait en effet avoir trois couleurs complètes, et pas de carte de la quatrième couleur. En piochant une quarantième carte, on a forcément une carte de la couleur qui manque.

Solution 3 Réponse : 501. Source : inspiré des OMB, éliminatoire miNi 2000, Q27.
On peut faire le dessin suivant :



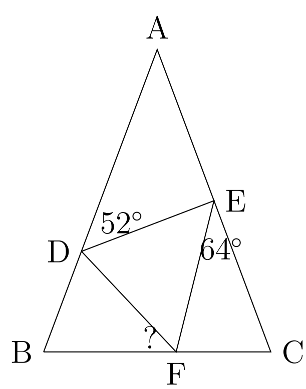
Dans cet exemple, la droite rouge coupe bien 501 secteurs. De plus, puisque l'angle $\widehat{AOB}$ est toujours inférieur à 180°, il est impossible de couper plus de secteurs.

Solution 4 Réponse : 76. Source : inspiré des OMB, éliminatoires miNi 2000, Q7.
Si $x2345y$ est multiple de 72, c'est qu'il est multiple de 8 et de 9. Pour qu'un nombre soit multiple de 8, ses trois derniers chiffres doivent être multiples de 8. On constate que 456 est multiple de 8, donc $y = 6$ est la seule possiblité. Pour qu'un nombre soit multiple de 9, la somme de ses chiffres doit être multiple de 9. $x + 20$ doit donc être multiple de 9, d'où $x = 7$.

Solution 5 Réponse : 16. Source : OMB, demi-finale miNi 2002, Q19.
Si j'achète 10 crayons et 6 classeurs, puis deux fois 3 crayons et 5 classeurs, j'aurai payé en tout 32 euros pour 16 crayons et 16 classeurs. On trouve alors la réponse en divisant par deux.

Solution 6 Réponse : 300. Source : OMB, demi-finale miNi 2001, Q26.
Si on écrit tous les nombres de 000 à 999 avec les zéros de tête inclus, on aura écrit 100 fois le chiffre 1 à la place des centaines, 100 fois à la place des dizaines et 100 fois à la place des unités, pour un total de 300 fois.

Solution 7 Réponse : 58. Source : OMB, demi-finale miNi 1999, Q26.



Puisque DEF est équilatéral, $\widehat{DEF} = 60°$ puis $\widehat{DEA} = 180° - 64° - 60° = 56°$. De même, $\widehat{EDF} = 60°$ puis $\widehat{FDB} = 180° - 52° - 60° = 68°$. La somme des angles du triangle ADE vaut 180°, donc $\widehat{DEA} = 180° - 52° - 56° = 72°$. Le triangle ABC est isocèle, donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} + 72° = 180°$, d'où on trouve $\widehat{ABC} = 54°$. Enfin, dans le triangle BDF on déduit $\widehat{BFD} = 180° - 68° - 54° = 58°$

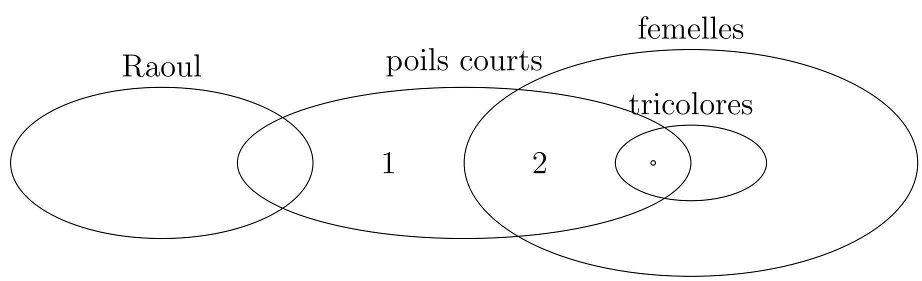
Solution 8 Réponse : 16. Source : OMB, éliminatoire miDi 1999, Q27.
On peut dans un premier temps ne considérer que les cas où x et y sont positifs, et il faudra ensuite multiplier la réponse par 4 pour tenir compte

de toutes les possibilités de signe. Dans le cas où tout est positif, on peut prendre la racine carrée et l'équation est équivalente à $xy = 10$. En testant toutes les possiblités (x et y sont plus petits ou égaux à 10 de toutes façons), on arrive à la réponse souhaitée.

5 Solutions communes

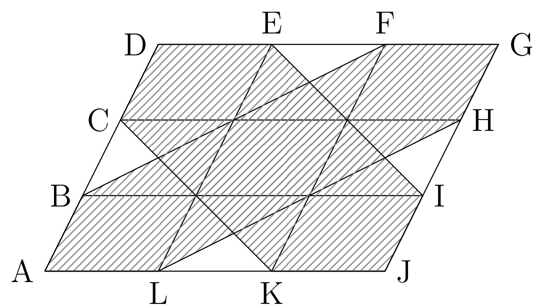
Solution 9 Réponse : 633. Source : inspiré des OMB, éliminatoire miDi 2000, Q26.
En évaluant les groupes de trois, on doit calculer $0+3+6+\ldots+198-6000 = 3.(1+2+\ldots+66)-6000$. Or, on a $2.(1+\ldots+66) = (1+\ldots+66)+(66+\ldots+1) = 67+\ldots+67$ en sommant deux à deux les termes de même rang dans les parenthèses. On a donc que $2.(1+\ldots+66) = 66.67$ La somme cherchée vaut donc $3.\frac{66.67}{2} - 6000 = 633$

Solution 10 Réponse : 20.
On peut faire le schéma suivant :



La première phrase permet de conclure que l'ellipse des chats tricolores est incluse dans celle des femelles. La deuxième permet de conclure que l'ellipse de Raoul et celle des femelles n'ont pas d'intersection. Enfin, la troisième nous dit qu'il y a un point dans la zone à l'intersection des poils courts et des tricolores. Notons que dans les zones où il n'y a pas de point placé, on ne peut rien déduire quant à la présence ou non d'un point.
Dès lors, les propositions 1 et 2 sont fausses car il pourrait y avoir un point dans les zones numérotées 1 et 2 respectivement. La proposition 8 est fausse à cause par exemple de la possible existence de points dans la zone 2. Les propositions 32 et 64 sont fausses car on ne sait rien déduire de la présence ou non de points en dehors de l'ellipse "poils courts". La proposition 4 est vraie car l'ellipse "tricolores" et l'ellipse "Raoul" n'ont pas d'intersection, et la proposition 16 est clairement vraie.

Solution 11 Réponse : 480. Source : inspiré des OMB, demi-finale miNi 2000, Q30.
On peut tracer les lignes EL, FK, CH et BI qui sont parallèles aux côtés et les coupent en les tiers de leurs longueurs. On obtint alors la figure suivante :



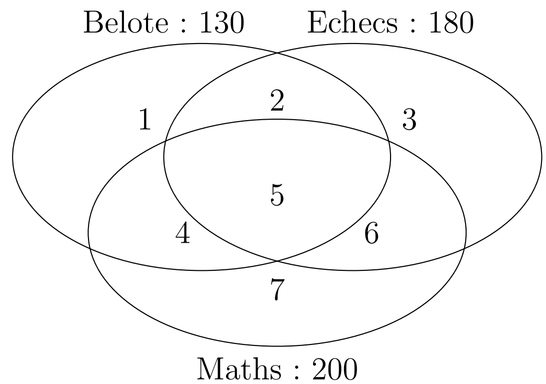
Il est alors clair que l'aire blanche vaut un neuvième de l'aire totale, donc que l'aire hachurée vaut huit neuvièmes de l'aire totale.

Solution 12 Réponse : 0
Si l'on écrit la suite des chiffres des unités premières puissances de 3 (en commençant à 3^0), on obtient $1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, \ldots$. Cette suite est périodique (un terme ne dépend que du précédent) de période 4. Le terme numéro 2019 est donc le même que le terme numéro 3, c'est à dire 7. En procédant de même pour 7, on trouve que le chiffre des unités de 7^{2019} est 3. Dès lors, le chiffre des unités de la somme est le chiffre des unités de $3 + 7$, c'est à dire 0.

6 Solutions lycée

Solution 13 Réponse : 2. Source : OMB, demi-finale miDi 2001, Q23.
Notons x^2 et y^2 nos entiers, avec $x > y$. On a $x^2 - y^2 = 36$, ie $(x-y)(x+y) = 36$. On peut constater que les diviseurs de 36 sont $1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18$ et 36. On a donc les décompositions $36 = 1.36 = 2.18 = 3.12 = 4.9 = 6.6$. Notre décomposition $36 = (x-y)(x+y)$ coïncide forcément avec une des précédentes, il suffit donc de tester les cinq cas. Par exemple, le cas $x - y = 1$, $x + y = 36$ donne x et y non naturels, ce qui n'est pas valable. $x - y = 2$, $x + y = 18$ donne $x = 10$, $y = 8, \ldots$ Au final, on trouve deux solutions.

Solution 14 Réponse : 70.
On peut faire le schéma suivant :

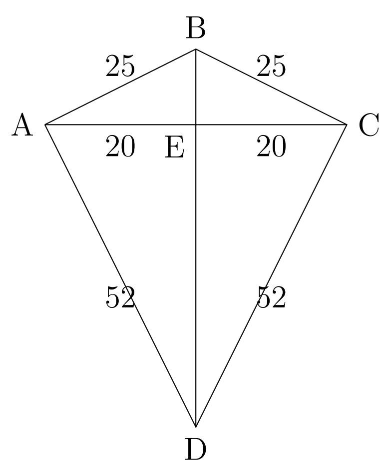


On sait de plus que les zones 2 et 5 cumulent 90 personnes, 4 et 5 en cumulent 100 et 110 pour les zones 5 et 6. Notons x le nombre de personnes dans la zone 5 (c'est la quantité cherchée). Il y a alors $90-x$ personnes dans la zone 2, $100-x$ dans la zone 4 et $110-x$ dans la zone 6. Ensuite, il y en a $130-(90-x)-(100-x)-x = x-60$ dans la zone 1, $180-(90-x)-(110-x)-x = x-20$ dans la zone 3 et $200-(100-x)-(110-x)-x = x-10$ dans la zone 7. On sait que dans les 7 zones, il y a au total 280 personnes. Cela nous donne l'equation

$$x-60+90-x+x-20+100-x+x+110-x+x-10 = 280 \Leftrightarrow x+210 = 280$$

, d'où la réponse.

Solution 15 Réponse : 63. Source : OMB, éliminatoire miDi 2001, Q23. On a le dessin (imprécis) suivant :



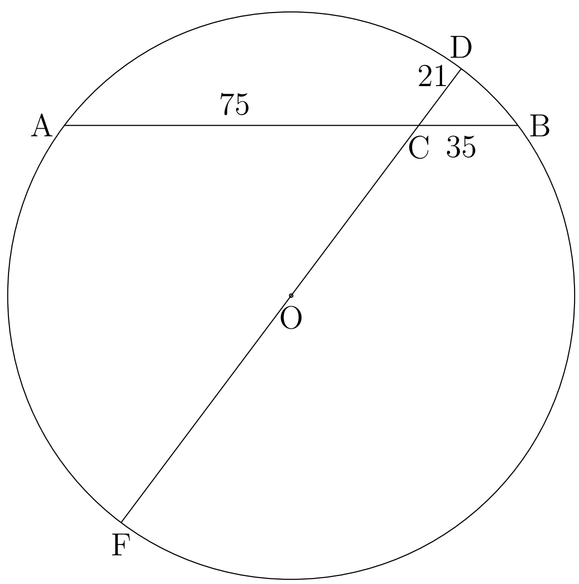
Par le théorème de Pythagore dans le triangle ABE, on a $||BE|| = \sqrt{25^2 - 20^2} = 15$. De même, dans le triangle BEF on a $||EF|| = \sqrt{52^2 - 20^2} = 48$.

Solution 16 Réponse : 26. Source : OMB, éliminatoire miDi 2002, Q17.
En décomposant en facteurs premiers, on trouve $231 = 3.7.11$ et $2002 = 2.7.11.13$. Pour trouver un multiple de 2002 à partir de 231, il faut donc forcément gagner un facteur 2 et un facteur 13. Comme 26 convient, c'est donc la réponse.

Solution 17 Réponse : 8. Source : inspiré des OMB, éliminatoires miDi 1999, Q18.
$x + 1/x$ est calirement positif, et on a $(x + 1/x)^2 = x^2 + 2 + (1/x)^2 = 64$ vu les hypothèses, d'où la réponse.

Solution 18 Réponse : 864. Source : inspiré des OMB, demi-finale maXi 2000, Q10.
S'il ne sépare pas les livres du même auteur, il peut choisir dans quel ordre il va disposer les auteurs, puis, pour chaque auteur, dans quel ordre il va disposer les livres de cet auteur. Il a donc $3!.5!.5!.1! = 6.120.120 = 86400$ manières de placer ses livres. (Pour rappel, $n! = n.(n-1)\ldots 1$)

Solution 19 Réponse : 73. Source : OMB, demi-finale maXi 2001, Q24.
On peut faire le dessin (imprécis) suivant, en intoduisant le point F diamétralement opposé à D :



Les triangles CFA et CBD sont semblables, par le théorème de l'angle inscrit. On a donc l'égalité $\frac{||CF||}{75} = \frac{35}{21}$, d'où $||CF|| = 125$. Le diamètre du cercle vaut alors $||CF|| + ||DC|| = 21 + 125 = 146$, ce qui suffit pour trouver le rayon.

Solution 20 Réponse : 0. Source : inspiré des OMB, éliminatoire miDi 2000, Q6. On sait qu'un nombre est multiple de 3 ssi la somme de ses chiffres est multiple de 3. Or, 2019 est multiple de 3. Un nombre qui a 2019 pour somme des chiffres n'est donc jamais premier, puisqu'il est multiple de 3.