COUPE ANIMATH DE PRINTEMPS

Mercredi 29 Mai 2019

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques, 11-13 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris.
Contact : contact-pofm@animath.fr

Corrigé

Merci de bien vouloir respecter la numérotation des exercices. Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en lettres capitales vos nom et prénom en haut à gauche ainsi que votre classe, et le numéro du problème en haut à droite.

Énoncés collège

Exercice 1. Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la *partie entière* de x, c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x. On note $\{x\}$ sa *partie décimale*, c'est-à-dire $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Par exemple, on a $\lfloor 3.1 \rfloor = 3$ et $\{3.1\} = 3.1 - 3 = 0.1$. On a aussi $\lfloor -2.7 \rfloor = -3$ et $\{-2.7\} = -2.7 - (-3) = 0.3$.
Trouver tous les nombres réels x tels que $\lfloor x \rfloor \times \{x\} = 2019 \times x$.

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> Soit x une solution du problème. On note $n = \lfloor x \rfloor$ et $y = \{x\}$. On a alors n entier et $0 \leqslant y < 1$. L'équation se réécrit $ny = 2019(n + y)$, soit $(n - 2019)y = 2019n$. En particulier, si $n = 2019$, on obtient $0 = 2019^2$, ce qui est impossible, donc $y = \frac{2019n}{n-2019}$.
On distingue maintenant plusieurs cas selon la valeur de n. Si $n > 2019$, alors $2019n > n > n-2019 > 0$, donc $y > 1$, ce qui est impossible. Si $0 < n < 2019$, alors $2019n > 0 > n - 2019$ donc $y < 0$, ce qui est aussi impossible. On doit donc avoir $n \leqslant 0$, donc on pose $n = -n'$ avec $n' \geqslant 0$. On a alors $y = \frac{-2019n'}{-n'-2019} = \frac{2019n'}{n'+2019}$.
Mais on a aussi $y < 1$, donc $2019n' < n' + 2019$, soit $2018n' < 2019$, donc $n' < \frac{2019}{2018}$, donc n' vaut 0 ou 1, donc n vaut 0 ou -1. Dans le premier cas, on a $y = 0$ donc $x = 0$. Dans le second cas, on a $y = \frac{2019}{2020}$, donc $x = -1 + \frac{2019}{2020} = -\frac{1}{2020}$. Il y a donc deux solutions, qui sont 0 et $-\frac{1}{2020}$.

Exercice 2. Combien y a-t-il de nombres à 8 chiffres dont l'écriture décimale est de la forme $ab2019cd$ avec $a > 0$, et qui sont divisibles par 360 ?

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Pour commencer, un nombre solution doit être divisible par 10, donc on doit avoir $d = 0$, et le nombre qui s'écrit $ab2019c$ doit être divisible par 36, donc par 4. Le nombre qui s'écrit $ab20100$ est divisible par 100 donc par 4, donc le nombre qui s'écrit $9c$ doit aussi être divisible par 4, donc c vaut 2 ou 6.
Enfin, le nombre doit être divisible 36 donc par 9, donc la somme de ses chiffres doit être divisible par 9, donc $a + b + 2 + 0 + 1 + 9 + c$ est divisible par 9, donc $a + b + c + 3$ est divisible par 9, donc $a + b + c$ vaut 6 ou 15 ou 24 (la somme de trois chiffres ne peut pas dépasser 27).
Si $c = 2$, alors $a + b + c \leqslant 2 + 9 + 9 = 20$, donc $a + b + c$ vaut 6 ou 15, donc $a + b$ vaut 4 ou 13, ce qui donne les solutions suivantes :

$$13201920, 22201920, 31201920, 40201920,$$

$$49201920, 58201920, 67201920, 76201920, 85201920, 94201920.$$

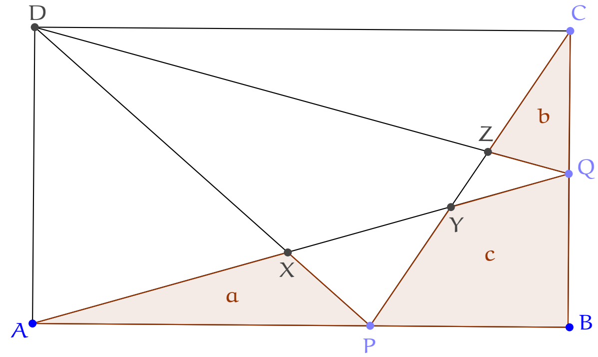
Si $c = 6$, comme $a > 0$, on a $a + b + c > 6$ donc $a + b + c$ vaut 15 ou 24, donc $a + b$ vaut 9 ou 18, ce qui donne les solutions suivantes :

$$18201960, 27201960, 36201960, 45201960, 54201960, 63201960, 72201960, 81201960, 90201960,$$

$$99201960.$$

On a donc au total 20 solutions.

Exercice 3. Soit $ABCD$ un rectangle. Soient P un point sur le segment $[AB]$, et Q un point sur le segment $[BC]$. Les segments $[AQ]$ et $[DP]$ s'intersectent en X, les segments $[AQ]$ et $[CP]$ s'intersectent en Y et les segments $[CP]$ et $[DQ]$ s'intersectent en Z. On note respectivement a, b et c les aires du triangle APX, du triangle CQZ et du quadrilatère $BPYQ$.
Montrer que l'aire du quadrilatère $DXYZ$ vaut $a + b + c$.



Solution de l'exercice 3 On notera par exemple $\mathscr{A}_{ABC}$ l'aire du triangle ABC. On a alors

$$\mathscr{A}_{DXYZ} = \mathscr{A}_{CDP} - \mathscr{A}_{CDZ} - \mathscr{A}_{PXY} = \mathscr{A}_{CDP} - (\mathscr{A}_{CDQ} - b) - (\mathscr{A}_{ABQ} - a - c) = a + b + c + \mathscr{A}_{CDP} - \mathscr{A}_{CDQ} - \mathscr{A}_{ABQ}.$$

Or, on a

$$\mathscr{A}_{CDP} = \frac{1}{2} CD \times BC$$

et

$$\mathscr{A}_{CDQ} + \mathscr{A}_{ABQ} = \frac{1}{2} CD \times CQ + \frac{1}{2} AB \times BQ = \frac{1}{2} AB \times (CQ + BQ) = \frac{1}{2} AB \times BC = \mathscr{A}_{CDP},$$

d'où $\mathscr{A}_{DXYZ} = a + b + c$.

Énoncés communs

Exercice 4. On considère une grande grille carrée de côté 10, découpée en petits carrés de côté 1. Deux petits carrés sont dits *voisins* si ils ont un côté commun. Sur chacun des petits carrés est inscrit un nombre réel positif. De plus, 5 grenouilles se déplacent sur la grille, et peuvent recouvrir chacune un petit carré. Deux grenouilles ne recouvrent jamais le même carré. Entre deux instants, chaque grenouille saute du carré où elle se trouve vers un carré voisin.
On suppose que la somme des nombres visibles vaut 10 à l'instant 1, puis 10^2 à l'instant 2, puis 10^3 à l'instant 3, et ainsi de suite jusqu'à l'instant k où la somme vaut 10^k. Quelle est la plus grande valeur possible de k ?

Solution de l'exercice 4 On va montrer que la plus grande valeur possible de k est 6. Vérifions tout d'abord que 6 est bien atteignable. Pour cela, on isole un rectangle de taille 2×3 en haut à gauche de la grille. Sur toutes les cases qui ne sont pas dans ce rectangle, on inscrit le nombre 0. Sur les cases du rectangle, on inscrit les nombres $10, 100, \ldots, 10^6$ comme suit :

10^3	10^4
10^2	10^5
10	10^6

À l'instant 1, les grenouilles occupent les 5 cases portant les nombres $10^2, \ldots, 10^6$, de sorte que seul le nombre 10 est visible (ainsi que tous les 0). Puis à l'instant 2, les grenouilles tournent dans le sens des

aiguilles d'une montre, de sorte que 10^2 est visible (ainsi que les 0), et ainsi de suite... On a alors bien une configuration comme on voulait avec $k = 6$.
Montrons maintenant que $k > 6$ est impossible. Supposons $k \geqslant 7$. En passant de l'instant 1 à l'instant 2, au plus 5 nouveaux nombres sont révélés (les 5 qui étaient couverts à l'instant 1), et la somme des nombres visibles augmente de $10^2 - 10 = 90$. Par conséquent, la somme des nombres découverts entre l'instant 1 et l'instant 2 vaut au moins 90. Comme il y a au plus 5 nombres découverts, au moins un est plus grand que $90/5 = 18$. D'un autre côté, la somme des nombres visibles à l'instant 2 vaut 100, donc les nombres découverts ne dépassent pas 100, donc il y a une case portant un nombre entre 18 et 100. En raisonnant de même entre les instants 2 et 3, puis 3 et 4 et ainsi de suite jusqu'à 6 et 7, on trouve une case portant un nombre entre 180 et 1000, puis entre 1800 et 10000, et ainsi de suite jusqu'à 18×10^5 et 10^7. On a donc trouvé 6 cases supérieures à 18. Comme il n'y a que 5 grenouilles à l'instant 1, au moins une de ces cases était visible à l'instant 1 donc la somme valait au moins 18, d'où la contradiction.

Exercice 5. On rappelle (voir Exercice 1) que la partie entière $\lfloor x \rfloor$ d'un nombre réel x est le plus grand entier inférieur ou égal à x.
Soit x un nombre réel positif. On suppose que $\lfloor x^2 \rfloor$, $\lfloor x^3 \rfloor$ et $\lfloor x^4 \rfloor$ sont des carrés d'entiers.
Montrer qu'alors $\lfloor x \rfloor$ est aussi le carré d'un entier.

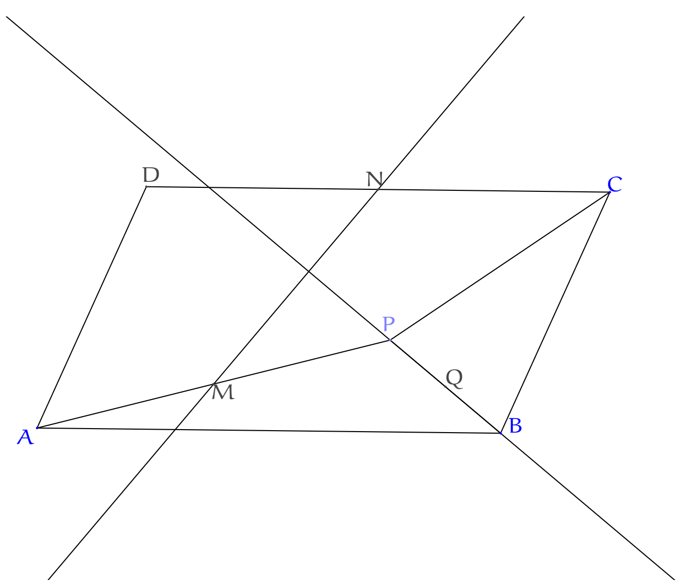
Solution de l'exercice 5 Tout d'abord, si $x < 2$, alors $\lfloor x \rfloor$ vaut 0 ou 1, donc est un carré. Dans la suite, on supposera donc $x \geqslant 2$.
Soit $n \geqslant 0$ entier tel que $\lfloor x^2 \rfloor = n^2$. Notons que $x \geqslant 2$, donc $n \geqslant 2$. On commence par montrer que $\lfloor x^4 \rfloor = n^4$. En effet, par définition de la partie entière, on a $n^2 \leqslant x^2 < n^2 + 1$, donc $n^4 \leqslant x^4 < (n^2+1)^2$, donc $n^4 \leqslant \lfloor x^4 \rfloor < (n^2+1)^2$. La partie entière de x^4 est donc un carré d'entier compris entre $(n^2)^2$ et $(n^2+1)^2$, donc ça ne peut être que n^4.
On vérifie maintenant que $\lfloor x^3 \rfloor = n^3$. En effet, on a $x^2 \geqslant n^2$, donc $x^3 \geqslant n^3$. De plus, comme $\lfloor x^4 \rfloor = n^4$, on a $n^4 \leqslant x^4 < n^4 + 1$, donc

$$x^3 = \frac{x^4}{x} \leqslant \frac{n^4+1}{x} \leqslant \frac{n^4+1}{n} = n^3 + \frac{1}{n} < n^3 + 1,$$

où la dernière inégalité utilise $n \geqslant 2$. On en déduit $\lfloor x^3 \rfloor = n^3$. Par hypothèse, le nombre n^3 est donc le carré d'un entier, donc n en est un aussi.

Énoncés lycée

Exercice 6. Soit $ABCD$ un parallélogramme, et P un point à l'intérieur de $ABCD$ tel que $CP = CB$. On note M et N les milieux de $[AP]$ et $[CD]$. Montrer que les droites (BP) et (MN) sont perpendiculaires.



Solution de l'exercice 6

On note Q le milieu de $[BP]$. Le triangle BCP étant isocèle en C, la droite (CQ) est la médiatrice de $[BP]$, donc elle est perpendiculaire à (BP). Il suffit donc de montrer que (CQ) est aussi parallèle à (MN). Pour cela, on va montrer que $CNMQ$ est en fait un parallélogramme.
D'après le théorème de la droite des milieux, la droite (QM) est parallèle à (AB), donc aussi à (CD), c'est-à-dire (CN). De plus, toujours d'après le théorème de la droite des milieux, on a

$$QM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD = CN.$$

Le quadrilatère $CNMQ$ est donc bien un parallélogramme, donc (MN) est parallèle à (CQ), et donc perpendiculaire à (BP).

Exercice 7. Soit (u_n) une suite d'entiers telle que $u_1 > 0$ et, pour tout $n \geqslant 0$, le nombre u_{n+1} est la somme de u_n et de son plus grand diviseur excepté lui-même. Par exemple, si $u_n = 12$, alors $u_{n+1} = 12+6 = 18$. Montrer qu'il existe N tel que, pour tout $n > N$, l'entier u_n est divisible par 3^{2019}.

Solution de l'exercice 7 Dans toute la solution, on notera $d(n)$ le plus grand diviseur de n excepté n, de sorte que $u_{n+1} = u_n + d(u_n)$. Commençons par deux remarques assez simples. Premièrement, si u_n est impair, alors $d(u_n)$ doit être impair aussi, donc u_{n+1} est pair. Deuxièmement, si u_n est pair, alors $d(u_n) = \frac{u_n}{2}$, donc $u_{n+1} = 3\frac{u_{n+1}}{2}$ est divisible par 3.
Ces deux remarques assurent qu'il existe dans la suite un terme u_N divisible par 3, soit $u_N = 3k$, avec $k \geqslant 3$ quitte à attendre assez longtemps. Supposons dans un premier temps que k est impair, soit $k = 2\ell + 1$. Alors le plus grand diviseur non trivial de u_N est $2\ell + 1$, donc

$$u_{N+1} = 3(2\ell+1) + 2\ell + 1 = 4(2\ell+1)$$

puis

$$u_{N+2} = 4(2\ell+1) + 2(2\ell+1) = 6(2\ell+1),$$

puis

$$u_{N+3} = 6(2\ell+1) + 3(2\ell+1) = 9(2\ell+1) = 3 \times 3(2\ell+1),$$

où $3(2\ell + 1)$ est impair. En répétant le même argument, on obtient $u_{N+6} = 3^3(2\ell + 1)$, puis $u_{N+9} = 3^4(2\ell + 1)$ et ainsi de suite. On peut donc décrire tous les termes de la suite à partir de u_N, et à partir d'un certain rang tous les termes seront divisibles par 3^{2019}.
Supposons maintenant que k est pair. On peut alors écrire $k = 2^\alpha(2\ell + 1)$, où 2^α est la plus grande puissance de 2 qui divise k. On a alors $u_N = 3 \times 2^\alpha \times (2\ell + 1)$, donc

$$u_{N+1} = 3 \times 2^\alpha \times (2\ell+1) + \frac{1}{2}3 \times 2^\alpha \times (2\ell+1) = 3^2 \times 2^{\alpha-1} \times (2\ell+1),$$

puis

$$u_{N+2} = 3^3 \times 2^{\alpha-2} \times (2\ell+1),$$

et ainsi de suit jusqu'à

$$u_{N+\alpha} = 3^{1+\alpha} \times (2\ell+1) = 3 \times 3^\alpha(2\ell+1),$$

où $3^\alpha(2\ell + 1)$ est impair. On est donc ramené au cas décrit plus haut, ce qui permet de conclure.

Exercice 8. Soient m et n deux entiers impairs avec $m, n \geqslant 3$. Dans une grille $m \times n$, on colorie chaque petit carré en bleu ou en rouge. On note A le nombre de lignes où les carrés bleus sont majoritaires, et B le nombre de colonnes où les carrés rouges sont majoritaires.
Quelle est la plus grande valeur possible de $A + B$?

Solution de l'exercice 8 On va montrer que la valeur recherchée vaut $m+n-2$. Cette valeur peut toujours être atteinte par la construction suivante, où les B représentent des cases bleues et les A des cases rouges.

$$\begin{matrix} B & B & B & B & A & A & A \\ B & B & B & B & A & A & A \\ A & A & A & A & A & A & A \\ A & A & A & B & B & B & B \\ A & A & A & B & B & B & B \end{matrix}$$

On a pris ici $m = 5$ et $n = 7$, mais cet exemple se généralise aisément à m et n impairs quelconques. Les bleus sont majoritaires dans toutes les lignes sauf celle du milieu, et les rouges sont majoritaires dans toutes les colonnes sauf celles du milieu, donc $A = m - 1$ et $B = n - 1$, donc $A + B = m + n - 2$.
Il reste à montrer qu'il est impossible d'atteindre $m+n-1$. Notons que $m+n$ est impossible car si $A = m$ et $B = n$, alors les bleus sont majoritaires dans chaque ligne donc il y a plus de bleus que de rouges au total, mais les rouges sont majoritaires dans chaque colonne, ce qui est absurde.
Si $A + B = m + n - 1$, supposons sans perte de généralité que $A = m$ et $B = n - 1$. Alors les bleus sont majoritaires dans toutes les lignes, donc il y a au moins $\frac{n+1}{2}$ bleus dans chaque ligne, soit $\frac{m(n+1)}{2}$ cases bleues au total, et donc au plus $\frac{m(n-1)}{2}$ cases rouges.
D'un autre côté, il y a $n - 1$ colonnes où les rouges sont majoritaires, chacune contenant au moins $\frac{m+1}{2}$ cases rouges, donc il y a au moins $\frac{(n-1)(m+1)}{2}$ cases rouges au total. On en déduit

$$\frac{m(n-1)}{2} \geqslant \text{nombre de cases rouges} \geqslant \frac{(m+1)(n-1)}{2},$$

ce qui est impossible (car $n > 1$), donc on ne peut pas atteindre $m + n - 1$.