PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 20 MARS 2019
DURÉE : 4H

Instructions

- Le groupe Junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après.
  Le groupe Senior est constitué des élèves nés en 2003 ou avant.
- Les exercices 1 à 3 ne concernent que les élèves du groupe Junior.
  L'exercice 4 concerne tous les élèves, quel que soit leur groupe.
  Les exercices 5 et 6 ne concernent que les élèves du groupe Senior.
- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

copies.ofm@gmail.com

Exercices du groupe Junior

Exercice 1. Soit $ABCD$ un trapèze tel que (AB) soit parallèle à (CD). Soit P un point de $[AC]$ et Q un point de $[BD]$ tels que $\widehat{APD} = \widehat{BQC}$.
Démontrer que $\widehat{AQD} = \widehat{BPC}$.

Solution de l'exercice 1 L'énoncé nous donne plein d'égalités d'angles : exploitons-les ! Tout d'abord, on remarque que

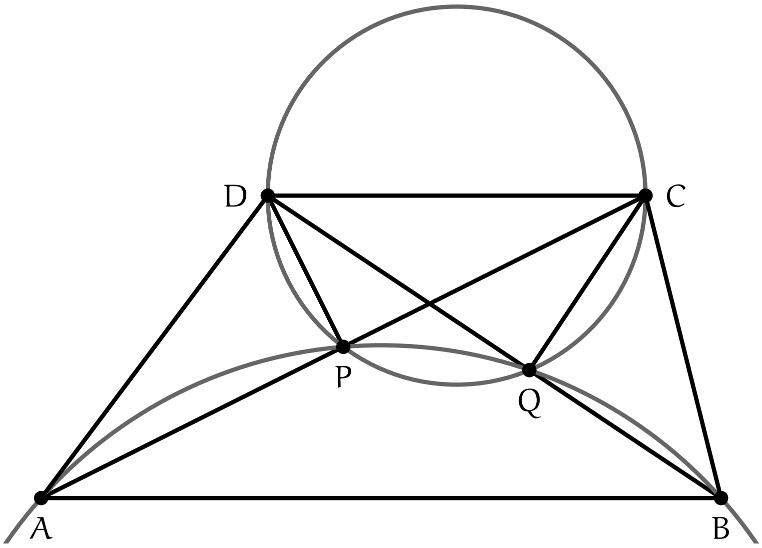
$$\widehat{DPC} = 180° - \widehat{APD} = 180° - \widehat{CQB} = \widehat{DQC},$$

ce qui signifie que les points C, D, P et Q sont cocycliques.
On en déduit que

$$\widehat{BQP} = 180° - \widehat{PQD} = 180° - \widehat{PCD} = 180° - \widehat{PAB},$$

ce qui signifie là encore que les points A, B, P et Q sont cocycliques.
On en conclut que

$$\begin{aligned}\widehat{AQD} = \widehat{AQP} + \widehat{PQD} = \widehat{ABP} + \widehat{PCD} &= \left(\widehat{ABC} - \widehat{PBC}\right) + \left(\widehat{BCD} - \widehat{BCP}\right)\\ &= \left(\widehat{ABC} + \widehat{BCD}\right) - \left(\widehat{PBC} + \widehat{BCP}\right) = 180° - \left(180° - \widehat{CPB}\right) = \widehat{CPB}.\end{aligned}$$



Exercice 2. Soit a, b, c des nombres réels positifs ou nuls tels que $a + b + c = 1$.
Démontrer que

$$\frac{5 + 2b + c^2}{1 + a} + \frac{5 + 2c + a^2}{1 + b} + \frac{5 + 2a + b^2}{1 + c} \geqslant 13.$$

Solution de l'exercice 2 Soit S la somme

$$\frac{5 + 2b + c^2}{1 + a} + \frac{5 + 2c + a^2}{1 + b} + \frac{5 + 2a + b^2}{1 + c}.$$

Notons également x_i le $i^{\text{ème}}$ plus petit élément de l'ensemble $\{a, b, c\}$. L'inégalité du réordonnement indique que

$$\begin{aligned} \frac{b}{1+a} + \frac{c}{1+b} + \frac{a}{1+c} &\geqslant \frac{x_1}{1+x_1} + \frac{x_2}{1+x_2} + \frac{x_3}{1+x_3} \text{ et} \\ \frac{c^2}{1+a} + \frac{a^2}{1+b} + \frac{b^2}{1+c} &\geqslant \frac{x_1^2}{1+x_1} + \frac{x_2^2}{1+x_2} + \frac{x_3^2}{1+x_3}, \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} S &\geqslant \frac{5 + 2x_1 + x_1^2}{1 + x_1} + \frac{5 + 2x_2 + x_2^2}{1 + x_2} + \frac{5 + 2x_3 + x_3^2}{1 + x_3} \\ &\geqslant 4\left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3}\right) + (1 + x_1) + (1 + x_2) + (1 + x_3) \\ &\geqslant 4 + 4\left(\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3}\right). \end{aligned}$$

La fonction $f : x \mapsto 1/(1 + x)$ étant convexe, on sait en outre que

$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} = f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) \geqslant 3f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}\right) = 3f(1/3) = 9/4.$$

On en déduit que $S \geqslant 4 + 9 = 13$.

Exercice 3. On dit qu'une paire d'entiers (a, b) est *chypriote* si $a \geqslant b \geqslant 2$, si a et b sont premiers entre eux, et si $a + b$ divise $a^b + b^a$.
Démontrer qu'il existe une infinité de paires chypriotes distinctes.

Solution de l'exercice 3 Posons $k = a - b$. Puisque a et b sont premiers entre eux, on sait que $a \neq b$, donc que $k \geqslant 1$. Ainsi,

$$a^b + b^a \equiv a^b + (-a)^a \equiv a^b \left(1 + (-1)^a a^k\right) \pmod{a + b}.$$

Or, a est premier avec b donc avec $a + b$ aussi.
D'après le théorème de Gauss, on souhaite donc que $a + b = 2a - k$ divise $1 + (-1)^a a^k$, ou encore $a^k + (-1)^a$.
Faute de mieux, étudions maintenant les petites valeurs de k. Choisir $k = 1$ reviendrait à souhaiter que $a + b$ divise $a \pm 1$, ce qui est impossible puisque $a + b > a + 1 > a - 1$. On regarde donc $k = 2$.
Dans ce cas, on souhaite que $2a-2 = 2(a-1)$ divise $a^2+(-1)^a$. Or, notons que $a^2+(-1)^a \equiv 1+(-1)^a \pmod{a-1}$. Par conséquent, et puisque $a \geqslant 2$, il nous faut nécessairement choisir a impair. Dans ce cas, il reste à faire en sorte que $2(a - 1)$ divise $a^2 - 1 = (a - 1)(a + 1)$, c'est-à-dire que 2 divise $a - 1$. Mais c'est justement le cas, puisque a est impair.
En conclusion, on a bien montré que toutes les paires $(2k + 1, 2k - 1)$, où $k \geqslant 2$, étaient chypriotes.

Note : Il existe d'autres paires chypriotes. On laisse ainsi au lecteur le plaisir de vérifier que les entiers $a = (2\ell)^{4\ell} + 2\ell - 1$ et $b = (2\ell)^{4\ell} - 2\ell - 1$ forment également une paire chypriote pour tout entier $\ell \geqslant 1$.

Exercice commun aux groupes Junior et Senior

Exercice 4. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon 1, et soit $\mathbf{T}$ un nombre réel. On dit qu'un ensemble de triangles est $\mathbf{T}$-*méraire* s'il satisfait les trois conditions suivantes :

▷ les sommets de chaque triangle appartiennent à $\mathcal{C}$;

▷ les triangles sont d'intérieurs deux à deux disjoints (mais deux triangles peuvent partager un côté ou un sommet) ;

▷ chaque triangle est de périmètre strictement plus grand que $\mathbf{T}$.

Trouver tous les réels $\mathbf{T}$ tels que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un ensemble $\mathbf{T}$-méraire contenant exactement n triangles.

Solution de l'exercice 4 Nous allons démontrer que les réels recherchés sont exactement les réels $\mathbf{T} \leqslant 4$. Pour ce faire, fixons on réel $\mathbf{T} \leqslant 4$. On commence par montrer qu'il existe des ensembles $\mathbf{T}$-méraires de n'importe quelle taille, grâce à la construction suivante. Soit $[AB]$ un diamètre de $\mathcal{C}$, et soit P un point quelconque de $\mathcal{C}$, autre que A et B. L'inégalité triangulaire indique que ABP est de périmètre $AB + BP + PA > 2AB = 4 \geqslant \mathbf{T}$.

Forts de cette remarque, on montre par récurrence sur n qu'il existe n points $P_1, \ldots, P_n$, placés dans cet ordre sur l'un des deux demi-cercles $\overline{AB}$ (avec P_1 proche de A et P_n proche de B), et tel que l'ensemble formé des triangles AP_iP_{i+1} (pour $i \leqslant n-1$) et ABP_n soit $\mathbf{T}$-méraire. Pour $n = 1$, on vient de voir qu'il suffit de placer P_1 n'importe où sur $\overline{AB}$.

Puis, une fois acquise l'existence des points $P_1, \ldots, P_n$, construisons le point P_{n+1}. Pour ce faire, on considère le réel $\varepsilon = AB + BP_n + P_nA - \mathbf{T}$, qui est strictement positif par hypothèse. On place alors P_{n+1} n'importe où sur l'arc $\overline{BP_n}$, de sorte que $BP_{n+1} < \varepsilon/2$. En effet, dans ces conditions, nos $n+1$ triangles sont bien d'intérieurs deux à deux disjoints, et il suffit de vérifier que ABP_{n+1} et AP_nP_{n+1} sont de périmètre strictement plus grand que $\mathbf{T}$.

Le premier cas est un cas particulier de notre remarque initiale, et le deuxième cas découle encore une fois de l'inégalité triangulaire, puisque AP_nP_{n+1} est de périmètre

$$AP_n + P_nP_{n+1} + P_{n+1}A \geqslant AP_n + (P_nB - BP_{n+1}) + (AB - BP_{n+1}) = \mathbf{T} + \varepsilon - 2BP_{n+1} > \mathbf{T}.$$

Ceci conclut notre récurrence, et donc le fait que l'on a bien des ensembles $\mathbf{T}$-méraires de n'importe quelle taille.

Réciproquement, considérons un réel $\mathbf{T} > 4$, et posons $\varepsilon = (\mathbf{T} - 4)/2 > 0$. Soit également ABC un triangle dont les sommets appartiennent à $\mathcal{C}$ et dont le périmètre est strictement plus grand que $\mathbf{T}$. En notant a, b et c les longueurs BC, CA et AB, et $p = (a+b+c)/2 > \mathbf{T}/2$ le demi-périmètre de ABC, la formule de Héron indique que ABC est d'aire

$$\mathcal{S} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Puisque $p - a \geqslant p - 2 \geqslant \mathbf{T}/2 - 2 = \varepsilon$ et que, de même, $p - b \geqslant \varepsilon$ et $p - c \geqslant \varepsilon$ on en déduit que $\mathcal{S} \geqslant \sqrt{p\varepsilon^3} \geqslant \sqrt{2\varepsilon^3}$.

Par conséquent, si un ensemble $\mathbf{T}$-méraire contient n triangles, ceux-ci étant d'intérieurs deux à deux disjoints, ils couvrent, dans leur ensemble, une surface égale à $n\sqrt{2\varepsilon^3}$ au moins. Cette surface ne pouvant pas dépasser π, qui est la surface du disque contenu à l'intérieur $\mathcal{C}$, on en déduit que $n \leqslant \pi/\sqrt{2\varepsilon^3}$, ce qui conclut le problème.

Note : En invoquant d'autres arguments, et sans faire appel à la formule de Héron, on pourrait également montrer que $n \leqslant \pi/\varepsilon$, ce qui nous fournit une meilleure approximation dès lors que $\mathbf{T}$ est proche de 4.

Exercices du groupe Senior

Exercice 5. Soit u un entier naturel non nul.
Démontrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de triplets d'entiers naturels (a, b, n) tels que $n! = u^a - u^b$.
Note : on rappelle que $0! = 1! = 1$.

Solution de l'exercice 5 Soit p un nombre premier impair qui ne divise pas u, et soit k un entier tel que $p^k > u^{p-1} - 1$. Posons $q = p^{k-1}$. On montre tout d'abord que u n'est pas une puissance $q^{\text{ème}} \pmod{p^k}$. En effet, si u était une puissance $q^{\text{ème}} \pmod{p^k}$, alors il existerait un entier v tel que $u \equiv v^q \pmod{p^k}$, et alors on aurait $1 \equiv v^{\varphi(p^k)} \equiv v^{q(p-1)} \equiv u^{p-1} \pmod{p^k}$, ce qui n'est pas le cas.

Par conséquent, on sait également, pour tout entier $\ell \geqslant k$, que u n'est pas non plus une puissance $q^{\text{ème}} \pmod{p^\ell}$. On en déduit que $p^{\ell-k}$ divise $\omega_{p^\ell}(u)$, où $\omega_{p^\ell}(u)$ désigne l'ordre de $u \pmod{p^\ell}$. En effet, soit g une racine primitive $\pmod{p^\ell}$, et soit x un entier tel que $u \equiv g^x \pmod{p^\ell}$. Alors $1 \equiv u^{\omega_{p^\ell}(u)} \equiv g^{x\omega_{p^\ell}(u)} \pmod{p^\ell}$, ce qui signifie que $\varphi(p^\ell) = (p-1)p^{\ell-1}$ divise $x\omega_{p^\ell}(u)$. Puisque $q = p^{k-1}$ ne divise pas x, c'est donc que $p^{\ell-k}$ divise $\omega_{p^\ell}(u)$.

Supposons enfin qu'il existe un triplet (a, b, n) d'entiers tels que $u^a - u^b = n!$ et $n \geqslant kp$. Posons également $d = a - b$ et $\ell = \lfloor n/p \rfloor$. Alors p^ℓ divise $n! = u^b(u^d - 1)$ et, puisque p ne divise pas u, c'est donc que $a^d \equiv 1 \pmod{p^\ell}$. On en déduit que $\omega_{p^\ell}(u)$ divise d, donc que $p^{\ell-k}$ divise d également. Cela signifie en particulier que $d \geqslant p^{\ell-k}$, donc que

$$2^{n(n+1)} \geqslant n^{n+1} \geqslant n! + 1 \geqslant u^d \geqslant u^{p^{\ell-k}} \geqslant u^{p^{n/p-k}},$$

ou encore que $p^k n(n+1) \geqslant p^{n/p} \log_2(u)$.

Une fois les entiers u, p et k fixés, le membre de droite croît beaucoup plus vite que le membre de gauche. Il existe donc un entier $\mathbf{N}$, qui ne dépend que de u, p et k, et tel que $n \leqslant \mathbf{N}$.

Ainsi, seul un nombre fini d'entiers n appartient à un triplet (a, b, n) tel que $n! = u^a - u^b$. Or, une fois un tel entier n fixé, on sait que $u^a > u^b$, donc que $a \geqslant b + 1$, et donc que $n! \geqslant u^a - u^{a-1} = (u-1)u^{a-1}$, ce qui montre que a et b sont eux-mêmes bornés. Ceci conlut notre solution.

Note : Il n'était pas nécessaire de recourir directement à l'existence d'une racine primitive $\pmod{p^\ell}$, par exemple en procédant comme suit. Soit s l'ordre de $u \pmod{p}$, et soit k la valuation p-adique de $u^s - 1$. Alors, pour tout $\ell \geqslant k$, on peut en fait montrer que u est d'ordre $\omega = p^{\ell-k}s \pmod{p^\ell}$.

Pour ce faire, on va d'abord montrer par récurrence, pour tout $m \geqslant 1$, les racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité $\pmod{p^m}$ sont les entiers congrus à $1 \pmod{p^{m-1}}$. En effet, le résultat est immédiat pour $m = 1$. Puis, si $m \geqslant 2$ et si $x^p \equiv 1 \pmod{p^m}$, alors $x^p \equiv 1 \pmod{p^{m-1}}$, donc on peut écrire $x = 1 + yp^{m-2}$, et en développant un binôme de Newton on en déduit que $1 \equiv x^p \equiv 1 + yp^{m-1} \pmod{p^m}$, ce qui conclut la récurrence.

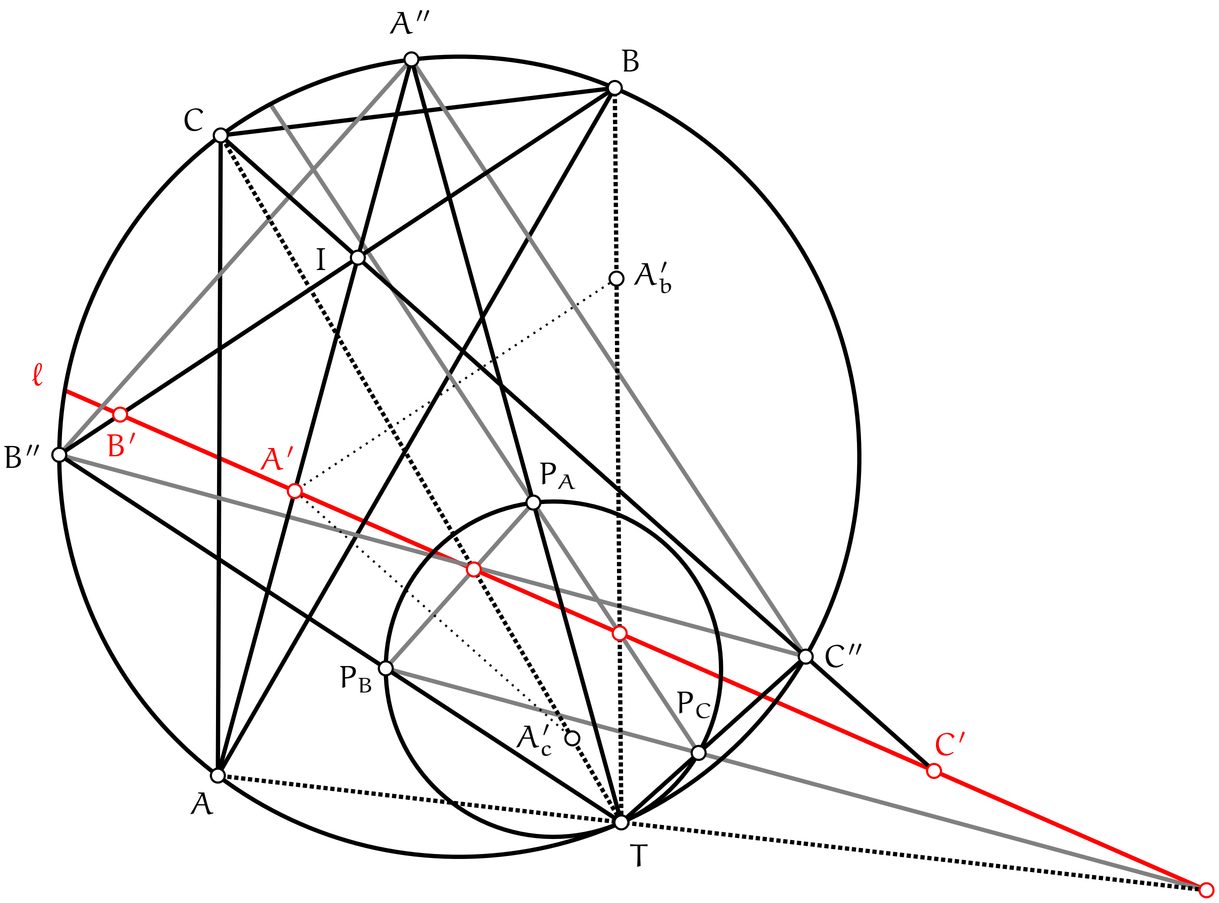
À l'aide de la récurrence ci-dessus, on remarque donc que u^s est d'ordre $\varpi = p^{\ell-k} \pmod{p^\ell}$. Puisque s divise ω, on sait en outre que $\omega = s\varpi$, ce qui conclut.

De manière générale, ce raisonnement joue en fait un rôle crucial dans la preuve de l'existence d'une racine primitive $\pmod{p^\ell}$.

Exercice 6. Soit ABC un triangle, soit I le centre du cercle inscrit dans ABC. Soit A', B' et C' trois points respectivement situés sur (AI), (BI) et (CI). On suppose que A', B' et C' sont distincts de A, B, C et I, et qu'ils sont alignés. Enfin, soit P_A le point d'intersection des médiatrices de $[BB']$ et $[CC']$. De même, soit P_B le point d'intersection des médiatrices de $[CC']$ et $[AA']$, et soit P_C le point d'intersection des médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$.

Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles ABC et $P_AP_BP_C$ sont tangents l'un à l'autre.

Solution de l'exercice 6 On commence par tracer une figure comme ci-dessous, sans oublier la droite ℓ qui passe par A', B' et C' ni les cercles Ω et Γ, respectivement circonscrits à ABC et à $P_AP_BP_C$.



Au vu de l'énoncé, une approche raisonnable est de trouver une caractérisation adaptée du point de tangence éventuel, que l'on notera T, entre Ω et Γ. Une telle caractérisation est la suivante : T est le centre d'une des deux homothéties envoyant Γ sur Ω. Soit h cette homothétie : il s'agit de l'homothétie de rapport positif si l'un des deux cercles est inclus à l'intérieur de l'autre, et de l'homothétie de rapport négatif sinon.

Au vu de la définition de Γ et Ω, il est tentant d'étudier l'image de $P_AP_BP_C$ par h, ou bien celle de ABC par h^{-1}. Or, sur la figure, on constate deux choses :

- les points $h(P_A)$, $h(P_B)$ et $h(P_C)$ semblent être les points d'intersection respectifs de (AI), (BI) et (CI) avec Ω ;
- les droites (AT), (BT) et (CT) semblent recouper la droite ℓ en des points de (P_BP_C), (P_CP_A) et (P_AP_B) respectivement.

Exploitons ces idées !

Tout d'abord, on note donc A'', B'' et C'' ces points d'intersection. Le point A'' n'est autre que le pôle sud de ABC par rapport au sommet A. On sait donc que $A''B = A''C = A''I$. De même, on a $B''C = B''A = B''I$ et $C''A = C''B = C''I$. Ainsi, les droites $(A''B'')$ et (P_AP_B) sont les médiatrices respectives de $[CI]$ et de $[CC']$, ce qui montre en particulier qu'elles sont parallèles. De même, $(B''C'')$ est parallèle à (P_BP_C) et $(C''A'')$ est parallèle à (P_A, P_B). Cela montre que les triangles $P_AP_BP_C$ et $A''B''C''$ sont homothétiques l'un de l'autre.

En particulier, il existe une unique homothétie qui envoie $P_AP_BP_C$ sur $A''B''C''$. On peut effectivement la noter h, et noter T son centre, de sorte que h envoie Ω sur Γ. Ici, le point T n'est autre que le point de concours des droites $(A''P_A)$, $(B''P_B)$ et $(C''P_C)$, et il reste à montrer que T appartient à Ω.

D'autre part, puisque (P_AP_B) est a médiatrice de $[CC']$, et si (TC) recoupe (P_AP_B) en un point X qui appartient aussi à ℓ, alors les droites ℓ et $(TC) = (CX)$ sont symétriques l'une de l'autre par rapport à (P_AP_B). Réciproquement, on note ℓ_a, ℓ_b et ℓ_c les symétriques respectifs de ℓ par rapport à (P_BP_C), (P_CP_A) et (P_AP_B).

On peut alors chercher à montrer que les droites ℓ_a, ℓ_b et ℓ_c sont concourantes en un point $\hat{T}$ qui appartiendra à Ω, puis que les points $\hat{T}$, P_A et A'' sont alignés : on en déduira que $T = \hat{T}$, ce qui conclura le problème. Soit alors T_c le point d'intersection de ℓ_a et ℓ_b. On remarque que

$$\begin{aligned}(T_cA, T_cB) &= (\ell_a, \ell_b) = (\ell_a, \ell) + (\ell, \ell_b) = 2(P_BP_C, \ell) + 2(\ell, P_CP_A) = 2(P_BP_C, P_AP_C)\\ &= 2(B''C'', A''C'') = 2(B''C'', CC'') + 2(CC'', A''C'')\\ &= (AC'', CC'') + (CC'', BC'') = (AC'', BC'') = (AC, BC).\end{aligned}$$

Ceci montre que les points T_c, A, B et C'' sont cocycliques, donc que T_c appartient bien à Ω. Or, si $T_c = A$, alors $\ell_b = (AB)$, donc $(AC, BC) = (\ell_a, \ell_b) = (\ell_a, BA)$, donc ℓ_a est la tangente à Ω en A, et T_c est nécessairement le point d'intersection de ℓ_a, ℓ_b et ℓ_c. De même, on introduit les points T_a et T_b. Si l'un de ces trois points est A, B ou C, alors il constitue bien le point $\hat{T}$ désiré. Sinon, T_c est le point d'intersection de ℓ_a avec Ω autre que A, mais également le point d'intersection de ℓ_b avec Ω autre que B, et en raisonnant de manière analogue sur T_a et T_b on constate bien que $T_a = T_b = T_c$ appartient à Ω.

Par ailleurs, et puisque l'on a obtenu les droites ℓ_a, ℓ_b et ℓ_c en appliquant à ℓ des symétries axiales, il est important d'appliquer ces symétries à d'autres points en particulier, notamment les points A', B' et C' présents sur ℓ. Ainsi, on note A'_b et A'_c les symétriques de A' par rapport à (P_AP_C) et à (P_AP_B) : ils se trouvent sur ℓ_b et ℓ_c.

Dans ces conditions,

$$\begin{aligned}(P_AA'_b, P_AA'_c) &= (P_AA'_b, P_AA') + (P_AA', P_AA'_c) = 2(P_AP_C, P_AA') + 2(P_AA', P_AP_B)\\ &= 2(P_AP_C, P_AP_B) = (\ell_b, \ell_c) = (\hat{T}A'_b, \hat{T}A'_c).\end{aligned}$$

Cela signifie que les points P_A, A'_b, $\hat{T}$ et A'_c sont cocycliques.

D'autre part, puisque $P_AA'_b = P_AA' = P_AA'_c$, on sait que le triangle $P_AA'_bA'_c$ est isocèle en P_A. On en déduit que

$$\begin{aligned}(\ell_b, P_A\hat{T}) &= (A'_b\hat{T}, P_A\hat{T}) = (A'_bA'_c, P_AA'_c)\\ &= 90^\circ - (A'_bP_A, A'_cP_A)/2 = 90^\circ - (P_CP_A, P_BP_A)\\ &= 90^\circ + (BI, IC) = (BA, AI) = (BA, AA'') = (B\hat{T}, \hat{T}A'') = (\ell_b, \hat{T}A'').\end{aligned}$$

Cela signifie que $\hat{T}$ est bien aligné avec P_A et A''. On montre de même que $\hat{T}$ est aligné avec P_B et B'', ainsi qu'avec P_C et C''. Par conséquent, on a bien $T = \hat{T}$, ce qui conclut.