PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 27 FÉVRIER 2019
à destination des élèves du groupe SENIOR

14H-18H (DURÉE : 4H)

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

copies.ofm@gmail.com

Exercice 1. Carine et Cyril jouent au jeu suivant. Tout d'abord, Cyril choisit un entier $n \geqslant 1$. Puis, dans chacune des cases d'une grille 3×3 (apparentée à un jeu de morpion), il écrit un entier.

Vient ensuite le tour de Carine. Elle peut, autant de fois qu'elle le souhaite, effectuer l'opération suivante : elle choisit une case $\mathbf{c}$, puis augmente de 1 la valeur de $\mathbf{c}$ et de ses voisines (c'est-à-dire des cases qui partagent un côté avec $\mathbf{c}$). Carine gagne la partie si elle réussit à faire en sorte que les 9 entiers soient tous égaux entre eux modulo n.

Quel est le joueur qui dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 2. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que, pour tous les réels x et y, on ait :

$$f\left(x^2 + x + f(y)\right) = y + f(x) + f(x)^2.$$

Exercice 3. Soit p un nombre premier.

Démontrer qu'il existe un nombre premier q tel que $n^p \not\equiv p \pmod{q}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.