PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 27 FÉVRIER 2019
à destination des élèves du groupe SENIOR

14H-18H (DURÉE : 4H)

Instructions

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits. Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

copies.ofm@gmail.com

Exercice 1. Carine et Cyril jouent au jeu suivant. Tout d'abord, Cyril choisit un entier $n \geqslant 1$. Puis, dans chacune des cases d'une grille 3×3 (apparentée à un jeu de morpion), il écrit un entier.

Vient ensuite le tour de Carine. Elle peut, autant de fois qu'elle le souhaite, effectuer l'opération suivante : elle choisit une case $\mathbf{c}$, puis augmente de 1 la valeur de $\mathbf{c}$ et de ses voisines (c'est-à-dire des cases qui partagent un côté avec $\mathbf{c}$). Carine gagne la partie si elle réussit à faire en sorte que les 9 entiers soient tous égaux modulo n.

Quel est le joueur qui dispose d'une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 1 On va montrer que Carine a une stratégie gagnante. Tout d'abord, adoptons quelques notations. On note (i, j) la case située en ligne i et en colonne j, et on note $k_{i,j}$ l'entier écrit sur cette case. Sans perte de généralité, on suppose que nos entiers sont écrits modulo n.

On va également noter $a_{i,j}$ une action de Carine consistant à choisir la case (i, j), donc à augmenter de 1 les entiers $k_{\hat{\imath},\hat{\jmath}}$ tels que $|i - \hat{\imath}| + |j - \hat{\jmath}| \leqslant 1$. Au vu de la condition de victoire de Carine, on suppose aussi qu'elle dispose d'une opération a_∞ qui consiste à ôter 1 à toutes les cases.

Alors, en effectuant les actions $a_{1,1}$, $a_{3,1}$, $a_{2,3}$ et a_∞, Carine se débrouille pour augmenter l'entier $k_{2,1}$ de 1 sans changer les autres. De même, elle peut augmenter isolément chacun des entiers $k_{2,3}$, $k_{1,2}$ et $k_{3,2}$. On appelle $b_{2,1}$, ${}_{2,3}$, $b_{1,2}$ et $b_{3,2}$ les "actions" correspondantes.

Puis, en réalisant l'action $a_{1,1}$ et en réalisant $n - 1$ fois les actions $b_{2,1}$ et $b_{1,2}$, Carine a augmenté l'entier $k_{1,1}$ sans changer les autres. De même, elle peut augmenter isolément les entiers $k_{1,3}$, $k_{3,1}$ et $k_{3,3}$.

Il lui suffit donc de modifier les valeurs de chacune des cases autres que $(2, 2)$ pour que tous les entiers deviennent égaux, et alors elle aura gagné.

Exercice 2. Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que, pour tous les réels x et y, on ait :

$$f\left(x^2 + x + f(y)\right) = y + f(x) + f(x)^2.$$

<u>*Solution de l'exercice 2*</u> Tout d'abord, il est clair que la fonction $f : x \mapsto x$ est une solution. On va montrer que c'est la seule.

Dans la suite, on notera $\mathbf{E}_{x,y}$ l'équation $f\left(x^2 + x + f(y)\right) = y + f(x) + f(x)^2$. En premier lieu, $\mathbf{E}_{0,y}$ indique que $f(f(y)) = y + f(0) + f(0)^2$, ce qui montre que f est à la fois injective et surjective, donc bijective.

D'autre part, pour tous les réels x et t, notons que $x^2 + x = t^2 + t$ si et seulement si $0 = x^2 - t^2 + x - t = (x - t)(x + t + 1)$, c'est-à-dire si $x = t$ ou $t = -1 - x$. En particulier, en posant $t = -1 - x$, alors $\mathbf{E}_{x,y}$ et $\mathbf{E}_{t,y}$ indiquent que $f(x) + (x)^2 = f(t) + (t)^2$. Par conséquent, si $x \neq -1/2$, et puisque l'on a alors $t \neq x$ et que f est injective, on a également $f(t) = -1 - f(x)$ et $f(x) \neq -1/2$. On en déduit notamment que $f(-1/2) = -1/2$.

On vient de montrer que $-1/2$ est un point fixe de f. Or, si y et x sont des points fixes de f, l'équation $\mathbf{E}_{x,y}$ montre que $x^2 + x + y$ en est un également. De même, si x et $x^2 + x + y$ sont des points fixes de f, et puisque f est bijective, alors y en est un également. Ici, en choisissant $x = -1/2$, on constate donc que, dès lors que y est un point fixe de f, $y - 1/4$ et $y + 1/4$ en sont aussi. En particulier, 0 et $1/4$ sont des points fixes.

Dans ces conditions, $\mathbf{E}_{x,0}$ et $\mathbf{E}_{0,y}$ montrent respectivement que $f(x^2 + x) = f(x) + f(x)^2$ et que $f(f(y)) = y$. Puis, si t est un réel positif, soit x un réel tel que $x^2 + x = t - 1/4$. Alors $\mathbf{E}_{x,1/4}$ indique que

$$f(t) = f\left((x^2 + x + f(1/4)\right) = 1/4 + f(x) + f(x)^2 \geqslant 0.$$

Par ailleurs, si z est un réel tel que $z^2 + z = t$, alors $\mathbf{E}_{z,f(y)}$ indique que

$$f(t + y) = f(y) + f(z) + f(z)^2 = f(y) + f(z^2 + z) = f(y) + f(t).$$

On en déduit à la fois que f est croissante et que f est en fait additive.

La fonction f est donc linéaire, c'est-à-dire de la forme $f : x \mapsto \lambda x$. On conclut en observant que, puisque $-1/2$ est un point fixe de f, c'est que $\lambda = 1$, donc que f est bien la fonction identité.

Exercice 3. Soit p un nombre premier.
Démontrer qu'il existe un nombre premier q tel que $n^p \not\equiv p$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Solution de l'exercice 3 Tout d'abord, si p ne divise pas $q-1$, alors $x \mapsto x^p$ est une bijection de $\mathbb{Z}/q\mathbb{Z}$ dans lui-même, donc q ne peut pas convenir. On en vient à chercher $q \equiv 1 \pmod p$ tel que, pour tout $n \not\equiv 0 \pmod q$, n soit d'ordre $\omega_q(n) \neq p\omega_q(p)$ modulo q, où $\omega_q(p)$ est l'ordre de p modulo q.

Puisque les ordres possibles sont exactement les diviseurs de $q-1$, cela signifie que $q-1$ doit être divisible par p et par $\omega_q(p)$ mais pas $p\omega_q(p)$. Par conséquent, p doit nécessairement diviser $\omega_q(p)$, et une première idée serait de vérifier si on ne peut pas justement avoir $\omega_q(p) = p$.

Dans cette optique, q doit diviser $p^p - 1$ mais pas $p - 1$. Ainsi, q doit diviser l'entier

$$\mathbf{N} = \frac{p^p - 1}{p - 1} = 1 + p + p^2 + \ldots + p^{p-1}.$$

Dans ces conditions, si q divise quand même $p-1$, alors $\mathbf{N} \equiv p \pmod q$, ce qui est impossible. Ainsi, on est ici assuré que q ne divise pas $p-1$, donc que $\omega_q(p) = p$.

Il reste donc à s'assurer que l'on peut choisir q de sorte que $q \not\equiv 1 \pmod{p^2}$. Si un tel q n'existait pas, alors $\mathbf{N}$ lui même serait congru à $1 \pmod{p^2}$. On conclut donc le problème en remarquant que $\mathbf{N} \equiv 1 + p \not\equiv 1 \pmod{p^2}$.