PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 4 : POT-POURRI
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 14 MARS 2019

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés ‘Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés ‘Communs” sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés ‘Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.
copies.ofm@gmail.com

Exercices Juniors

Exercice 1. Au début, les 9 cases d'un échiquier 3×3 contiennent chacune un 0. A chaque étape, Pedro choisit deux cases partageant un côté, et ajoute soit 1 aux deux cases, soit -1 aux deux cases. Montrer qu'il est impossible d'atteindre en un nombre fini de coups la situation où toutes les cases sont remplies par un 2.

Exercice 2. Soient m, n, k trois entiers positifs tels que $m^2 + n = k^2 + k$. Montrer que $m \leqslant n$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle dont les trois angles sont aigus, avec $AB > AC$, et soit Ω son cercle circonscrit. On note M le milieu de $[BC]$. Les tangentes à Ω en B et C s'intersectent en P, et les droites (AP) et (BC) se coupent en S. On note D le pied de la hauteur issue de B dans ABP, et ω le cercle circonscrit à CSD. Enfin, on note K le second point d'intersection (après C) de ω et Ω.
Montrer que $\widehat{CKM} = 90°$.

Exercices Communs

Exercice 4. Soit ABC un triangle isocèle en A mais pas rectangle. Soit D le point de (BC) tel que (AD) soit perpendiculaire à (AB), et soit E le projeté orthogonal de D sur (AC). Soit enfin H le milieu de $[BC]$.
Montrer que AHE est isocèle en H.

Exercice 5. Soit $n \geqslant 2$ et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des nombres réels tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ et $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1$.
Montrer qu'il existe i tel que $x_i \geqslant \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

Exercice 6. Trouver tous les triplets (a, b, c) d'entiers strictement positifs tels que

$$3^a - 5^b = c^2.$$

Exercices Seniors

Exercice 7. Soit $(a_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de réels. On suppose que $a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$ pour tout entier naturel n. De plus, a_0 et a_1 sont strictement positifs et distincts. Montrer que la suite $(a_n)_{n \geqslant 0}$ n'est pas bornée.

Exercice 8. Soit $ABCD$ un trapèze avec (AB) parallèle à (CD). On suppose qu'il y a deux cercles ω_1 et ω_2 à l'intérieur du trapèze tels que ω_1 est tangent aux côtés $[DA]$, $[AB]$ et $[BC]$ et ω_2 est tangent aux côtés $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$. Soit (d_1) la seconde tangente (après (AD)) à ω_2 passant par A, et soit (d_2) la seconde tangente (après (BC)) à ω_1 passant par C.
Montrer que (d_1) et (d_2) sont parallèles.

Exercice 9. Soit $S = \{1, \ldots, n\}$, avec $n \geqslant 3$ un entier, et soit k un entier strictement positif. On note S^k l'ensemble des k-uplets d'éléments de S. Soit $f : S^k \to S$ telle que, si $x = (x_1, \ldots, x_k) \in S^k$ et $y = (y_1, \ldots, y_k) \in S^k$ avec $x_i \neq y_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, alors $f(x) \neq f(y)$.
Montrer qu'il existe ℓ avec $1 \leqslant \ell \leqslant k$ et une fonction $g : S \to S$ vérifiant, pour tous $x_1, \ldots, x_k \in S$, $f(x_1, \ldots, x_k) = g(x_\ell)$.