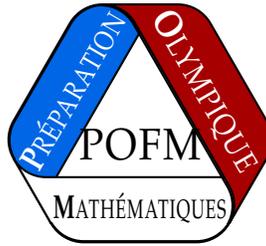


# PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



ENVOI 4 : POT-POURRI  
À RENVoyer AU PLUS TARD LE 14 MARS 2019

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés ‘Juniors’ ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés ‘Communs’ sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés ‘Seniors’ ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath,  
Préparation Olympique Française de Mathématiques,  
11-13 rue Pierre et Marie Curie,  
75005 Paris.  
copies.ofm@gmail.com

## Exercices Juniors

*Exercice 1.* Au début, les 9 cases d'un échiquier  $3 \times 3$  contiennent chacune un 0. A chaque étape, Pedro choisit deux cases partageant un côté, et ajoute soit 1 aux deux cases, soit  $-1$  aux deux cases. Montrer qu'il est impossible d'atteindre en un nombre fini de coups la situation où toutes les cases sont remplies par un 2.

*Exercice 2.* Soient  $m, n, k$  trois entiers positifs tels que  $m^2 + n = k^2 + k$ . Montrer que  $m \leq n$ .

*Exercice 3.* Soit  $ABC$  un triangle dont les trois angles sont aigus, avec  $AB > AC$ , et soit  $\Omega$  son cercle circonscrit. On note  $M$  le milieu de  $[BC]$ . Les tangentes à  $\Omega$  en  $B$  et  $C$  s'intersectent en  $P$ , et les droites  $(AP)$  et  $(BC)$  se coupent en  $S$ . On note  $D$  le pied de la hauteur issue de  $B$  dans  $ABP$ , et  $\omega$  le cercle circonscrit à  $CSD$ . Enfin, on note  $K$  le second point d'intersection (après  $C$ ) de  $\omega$  et  $\Omega$ .

Montrer que  $\widehat{CKM} = 90^\circ$ .

## Exercices Communs

*Exercice 4.* Soit  $ABC$  un triangle isocèle en  $A$  mais pas rectangle. Soit  $D$  le point de  $(BC)$  tel que  $(AD)$  soit perpendiculaire à  $(AB)$ , et soit  $E$  le projeté orthogonal de  $D$  sur  $(AC)$ . Soit enfin  $H$  le milieu de  $[BC]$ .

Montrer que  $AHE$  est isocèle en  $H$ .

*Exercice 5.* Soit  $n \geq 2$  et soient  $x_1, x_2, \dots, x_n$  des nombres réels tels que  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0$  et  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$ .

Montrer qu'il existe  $i$  tel que  $x_i \geq \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$ .

*Exercice 6.* Trouver tous les triplets  $(a, b, c)$  d'entiers strictement positifs tels que

$$3^a - 5^b = c^2.$$

## Exercices Seniors

*Exercice 7.* Soit  $(a_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels. On suppose que  $a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$  pour tout entier naturel  $n$ . De plus,  $a_0$  et  $a_1$  sont strictement positifs et distincts. Montrer que la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  n'est pas bornée.

*Exercice 8.* Soit  $ABCD$  un trapèze avec  $(AB)$  parallèle à  $(CD)$ . On suppose qu'il y a deux cercles  $\omega_1$  et  $\omega_2$  à l'intérieur du trapèze tels que  $\omega_1$  est tangent aux côtés  $[DA]$ ,  $[AB]$  et  $[BC]$  et  $\omega_2$  est tangent aux côtés  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[DA]$ . Soit  $(d_1)$  la seconde tangente (après  $(AD)$ ) à  $\omega_2$  passant par  $A$ , et soit  $(d_2)$  la seconde tangente (après  $(BC)$ ) à  $\omega_1$  passant par  $C$ .

Montrer que  $(d_1)$  et  $(d_2)$  sont parallèles.

*Exercice 9.* Soit  $S = \{1, \dots, n\}$ , avec  $n \geq 3$  un entier, et soit  $k$  un entier strictement positif. On note  $S^k$  l'ensemble des  $k$ -uplets d'éléments de  $S$ . Soit  $f : S^k \rightarrow S$  telle que, si  $x = (x_1, \dots, x_k) \in S^k$  et  $y = (y_1, \dots, y_k) \in S^k$  avec  $x_i \neq y_i$  pour tout  $1 \leq i \leq k$ , alors  $f(x) \neq f(y)$ .

Montrer qu'il existe  $\ell$  avec  $1 \leq \ell \leq k$  et une fonction  $g : S \rightarrow S$  vérifiant, pour tous  $x_1, \dots, x_k \in S$ ,  $f(x_1, \dots, x_k) = g(x_\ell)$ .