PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 4 : COMBINATOIRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 14 FÉVRIER 2019

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Communs” sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Pour les exercices de géométrie, faire des figures sur des feuilles blanches séparées.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.
contact-pofm@animath.fr

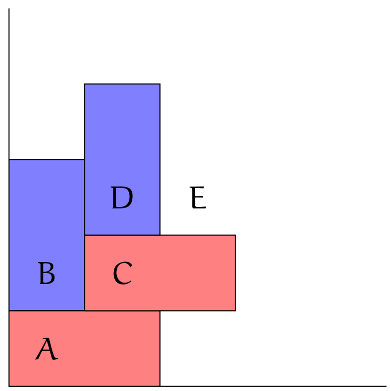
Exercices Juniors

Exercice 1. Dans chaque case d'un échiquier 8×8 il est écrit 0, 1 ou -1. Est-il possible que toutes les sommes des nombres écrits sur les lignes, les colonnes et sur les deux grandes diagonales de l'échiquier soient différentes ?

Solution de l'exercice 1 Il y a 8 colonnes, 8 lignes et 2 grandes diagonales. Pour chacun de ces ensembles on écrit la somme des nombres écrits dessus. Cela nous fait 18 sommes. Cependant, chacune des ces sommes est comprise entre -8 et 8, ce qui fait 17 possibilités. Ainsi il y a forcément deux de ces sommes qui sont égales par le principe des tiroirs.

Exercice 2. On considère une grille carrée de côté n. Pour quels entiers n est-il possible de paver cette grille avec des dominos 1×2 sans qu'aucune paire de dominos ne forme de carré 2×2 ?

Solution de l'exercice 2



Montrons qu'il n'est jamais possible de paver le carré $n \times n$ pour $n > 0$. Considérons la case A dans un des coins du carré. On peut supposer que si la carré était pavé par des dominos, le domino qui pave la case A est horizontal, quitte à effectuer une symétrie par rapport à la diagonale du carré.

Mais cela impose que le domino pavant la case B est dans la grille carrée, et est pavée par un domino vertical car s'il est horizontal il formerait un carré 2×2 avec le domino précédant.

Considérons à présent la case, C : elle doit appartenir au carré, mais ne peut être pavée que par un domino horizontal, car un domino vertical formerait un carré 2×2 avec le domino précédant.

On procède de même avec la case D, E, puis à toutes les cases sur la diagonale du carré et sur la sur-diagonale. On peut continuer à l'infini, ce qui est impossible car le carré est de taille $n \times n$. C'est une contradiction !

Ainsi il n'existe de tels pavages que si $n = 0$.

Exercice 3. Lors d'un tournois, 2019 équipes ont joué des matchs. Chaque paire d'équipes se sont affrontées au plus une fois, et pour chaque paire d'équipes qui se sont affrontées, au moins une des équipes a joué au plus 42 matchs. Quel est le nombre maximum de matchs qui ont pu être joués ?

Solution de l'exercice 3
On obtient $42 \times (2019 - 42)$ avec un graphe bipartite avec une partie de taille 42.

On considère A l'ensemble des sommets de degré strictement supérieur à 42. Si $|A| > 42$, alors puisqu'il n'y pas pas d'arête entre les éléments de A : il y a au plus $(2019 - |A|) \times 42$ arrêtes.
Si $|A| \leqslant 42$, on peut supposer que chaque sommet du complémentaire de A est relié à tous les éléments de A, car si il a exactement 42 voisins on peut remplacer une de ses arrêtes le reliant à un élément du complémentaire par une arrête le reliant à un élément de A, sans diminuer l'ensemble A.

Ainsi il y a au plus :

$$(2019-|A|)\times|A|+\frac{1}{2}(2019-|A|)\times(42-|A|)=\frac{(2019-|A|)(42+|A|)}{2}$$

arrêtes, ce qui est inférieur à $(2019-|A|)\times 42$.

Exercices Communs

Exercice 4. Un certains nombre de participants participent À un stage. On dit que deux participants A, B sont des amis indirects si il existe $n \leqslant 2$ et $A = C_0, C_1, C_2, \cdots, C_n = B$ tels que C_i et C_{i+1} soient amis pour $0 \leqslant i < n$, et si A et B sont des participants différents.
Avant le stage, certaines paires de participants sont amis. Après le stage, les anciens amis le restent, et de nouvelles paires d'amis se créent, de sorte que chaque participant ait au moins un ami après le stage. Un participant est dit *spécial* si son nombre d'amis indirects a doublé entre le début et la fin du stage.
Montrer que la proportion de participants spéciaux est d'au plus $\frac{2}{3}$.

Solution de l'exercice 4
On considère un participant spécial A. Si il dispose de k amis indirects avant le stage, il en a exactement $2k$ après. Mais alors un des k participants qui deviennent son ami pendant le stage B avait au plus $k-1$ amis indirects avant le stage, en effet s'ils avaient k amis indirects avant le stage, A aurait au moins $k+1$ amis en plus (les k amis de B et B), ce qui est impossible.

Mais B a $2k$ amis après le stage : ils c'est pas spécial. Ainsi, si on regroupe les amis indirects après le stage, la proportion de participants spéciaux dans chaque groupe est 0 ou bien, si au moins un participant du groupe est spécial a $2k$ amis $\frac{k+1}{2k+1} \leqslant \frac{2}{3}$, avec $k > 0$ car tout le monde a au moins un ami après le stage. Ainsi la proportion globale de participants spéciaux est d'au plus $\frac{2}{3}$.

Exercice 5. Alice et Bob jouent à un jeu : n pièces dont les faces sont blanches et noires sont disposées en ligne, la première et la dernière sont sur leur face blanche, et les autres sur leur face noire. À chaque tour, la pièce la plus à gauche est déplacée à l'extrémité droite de la ligne de pièces et :

— Si elle est sur sa face blanche, alors Alice décide sur quelle face elle la repose.
— Si elle est sur sa face noire, alors Bob décide sur quelle face il la repose.

Alice gagne si à un instant toutes les pièces sont sur leur face noire. En supposant que Bob joue parfaitement, pour quels entiers n dispose-t-elle d'une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 5
Alice a une stratégie gagnante pour tout entier n.

On notera la première pièce en partant de la gauche A. Pour i de 1 à n, on pose $a_i = 1$ si la pièce qui était initialement en position i est sur sa face blanche, et $a_i = 0$ si elle est sur sa face noire.

Alice peut employer la stratégie suivante : elle ne touche pas à la pièce A, puis elle retourne toutes les pièces blanches jusqu'à ce que Bob retourne une pièce noire. Lorsque Bob retourne une pièce noire, Alice ne retourne plus aucune pièce, jusqu'à ce que la pièce A passe de nouveau à l'extrémité droite de la ligne. Elle continue ainsi jusqu'à ce que qu'elle ait retourné la pièce A, ce qui signifie que toutes les pièces sont sur leur face noire.

Cela arrive en un nombre fini de coups. En effet si on considère le nombre dont l'écriture décimale (ou en base 2) est $a_n a_{n-1} a_{n-2} \cdots a_3 a_2$ aux moments où la pièce A est tout à gauche, cette quantité augmente strictement tant que la pièce A n'est pas retournée. En effet, entre deux moments où la pièce A est à gauche, Alice a supprimé des pièces blanches, jusqu'à ce que Bob en ait ajouté une, puis les positions restent inchangées.

Ainsi Alice a une stratégie qui lui permet de gagner de manière sûre en un nombre fini de coups.

Exercice 6. Lors d'une fête, n personnes posent leur chapeau en cercle. Chaque personne se place devant un chapeau, le met, puis le repose, et chacun se place sur le chapeau situé À droite, et cela recommence jusqu'À ce que chacun ait mis tous les chapeaux. Pour quels entiers n existe-t-il un placement initial des personnes tel que À chaque instant il y ait au moins une personne ayant son propre chapeau sur le tête ?

Solution de l'exercice 6 La réponse est n impair. On numérote les chapeaux de 0 à $n-1$ modulo n.
Si n est impair, le propriétaire du chapeau i se place en face du chapeau $n-i$. Ainsi il portera son chapeau lorsqu'il mettra un chapeau pour la $n-2i[n]$-ème fois, et les valeurs de $n-2i$ sont bien distinctes modulo n si n est impair, donc tous les restes sont atteints.

Si n est pair, alors soit $d(j)$ l'instant où le chapeau j est porté par son propriétaire, alors

$$d(0)+d(1)+\cdots+d(n-1)\equiv\frac{n}{2}[n]$$

Mais cependant, $d(i)\equiv f(i)-i[n]$, où $f(i)$ est la position initiale du propriétaire du chapeau i. Ainsi la somme précédante devrait être nulle modulo n.

Exercices Seniors

Exercice 7. Soit n un entier, on considère un liste de n points du plan, et on s'autorise la transformation suivante : prendre deux points et les remplacer tous les deux par leur milieu. On dit qu'un entier est "grégaire" si, pour toute liste initiale de n points, on peut obtenir en un nombre fini d'étape une liste de n points identiques. Montrer que n est grégaire si et seulement si c'est une puissance de 2.

Solution de l'exercice 7 Montrons que les puissances de 2 sont grégaires. Il est clair que 1 l'est. Supposons que 2^n est grégaire. Alors si on dispose de 2^{n+1} points, on rassemble par récurrence les 2^n premiers en un point A, puis les 2^n derniers en un point B, et enfin avec 2^n opérations on rassemble tous les points sur le milieu de A et B, et on conclut par récurrence.

Si n n'est pas une puissance de 2, on remarque que le barycentre des n points est préservé. On place le i-ème point en $(2^i,0)$ pour $2\leqslant i\leqslant n$, et on place le premier point en 2. Ainsi, les positions des points ne peut être que de la forme $(\frac{a}{2^m},0)$ avec a,m entiers, ce qui n'est pas le cas du barycentre des n points $(\frac{2^{n+1}}{n},0)$, car n a un diviseur impair différend de $1,-1$. Ainsi n n'est pas grégaire.

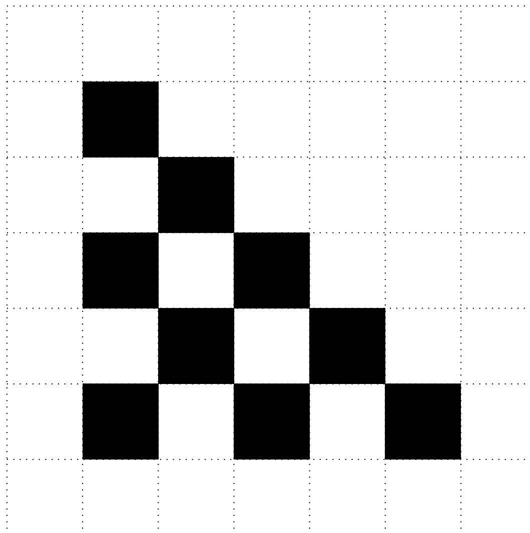
Exercice 8. On considère une grille infinie. On appelle la croix d'une case l'ensemble des cases sur sa ligne et sa colonne. Soit k un entier, N cases sont initialement coloriées et on s'autorise À colorier une case si sa croix contient au moins k cases coloriées. Quel est le plus petit entier N tel qu'il est possible, pour un certain ensemble de N cases coloriées initialement, de colorier chaque case de la grille ?

Solution de l'exercice 8
Montrons que la réponse est $\ell(\ell+1)$ si $k=2\ell$, $(\ell+1)^2$ si $k=2\ell+1$.

En effet, supposons que c'est possible. Nous allons effectuer des marquages. Un marquage consiste à choisir une case et décorer les cases de sa croix.
On effectue un premier marquage sur la première case coloriée, puis dès qu'une case non décorée est coloriée on effectue un marquage en cette croix. Si toutes les cases sont coloriées, alors toutes les cases ont été décorées.

Au premier marquage on a décoré au moins k cases parmis les cases initiales, puis u second on a décoré au moins $k-i$ cases parmi les cases initiales avec i le nombre de cases qui ont déjà été décorées. Cependant, le second marquage a eu lieu en un point qui n'était pas décoré, dont sa croix et la croix du premier point marqué ont au plus 2 points en commun. Ainsi i vaut au plus 2.

À l'étape suivante on décore au moins $k-4$, parmis les cases initialement colorée de même, et ainsi de suite pour les étapes suivantes. Ainsi il y avait au moins $k+(k-2)+(k-4)+\cdots$ cases initialement, ce qui est le résultat attendu.



Pour construire un tel ensemble de cases initialement coloriées qui convient, on considère la diagonale d'un carré $k \times k$, puis une sous-diagonale sur deux. On colorie les sous-diagonales en partant du coin inférieur gauche : chaque case aura exactement k cases dans sa croix à chaque étape.

Ensuite on peut colorier tous les points de la partie supérieure du carré $k \times k$ en commençant la la première sur-diagonale, et en coloriant ensuite les diagonales supérieures une à une. Là aussi à chaque étape la croix contient exactement k cases. Enfin on peut colorier une bande infinie de largeur k, et enfin tous les points du plan.

Exercice 9. Soit n un entier. Un tableau $n \times n$ d'entiers positifs ou nuls est dit *auto-descriptif* si l'entier sur la ligne i et la colonne j correspond au nombre de fois que le nombre i apparaît À la colonne j, où les lignes et colonnes sont numérotées de 0 À $n-1$. Par exemple, le tableau suivant est auto-descriptif.

1	0	3	3	4
1	3	2	1	1
0	1	0	1	0
2	1	0	0	0
1	0	0	0	0

Montrer qu'il n'existe pas de tableaux auto-descriptifs arbitrairement grands.

Solution de l'exercice 9 On note $a_{i,j}$ l'entier écrit à la ligne i et la colonne j, et on note x_i le nombre d'occurrences du nombre i dans le tableau pour $1 \leqslant i \leqslant n$.
Le nombre de cases dans le tableau est égal à n^2. De plus pour $1 \leqslant i \leqslant n$, une occurrence du nombre de k en ligne i et colonne j dans le tableau correspond à k chiffres du tableau : les k occurrences de i en ligne j. Ainsi :

$$n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} kx_k$$

Or tous les nombres apparaissent, car si i n'apparaît pas, alors la ligne i contient n zéros donc $a_{0,i} = n > n-1$ ce qui est impossible. Donc pour tout i, $x_i > 1$.
Soit A le nombre de nombres i tels que $x_i > 20$ (Le choix de 20 ici n'est pas optimal, mais suffit), alors on a deux cas :

Si $A \geqslant \frac{n}{3}$, alors pour $n \geqslant 3$:

$$n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} kx_k \geqslant \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} k20 \geqslant 20(\frac{n}{3}-1)\frac{n}{6} = \frac{20}{18}n^2 - \frac{20n}{6}$$

Et pour n assez grand cela est impossible, contradiction.

Si $A < \frac{n}{3}$, alors à chacune des $n - A$ lignes correspondant aux indices i tels que $x_i < 20$ la somme des entrées vaut au plus 20, donc on a au moins $n-20$ fois le nombre 0. Ainsi, on a au moins $n-A$ nombres sur la ligne numéro 0 qui sont supérieurs à $n-20$, et on en déduit que :

$$\sum_{i=n-20}^{n-1} x_i \geqslant n - A$$

et, sachant que pour tout i on a $x_i > 0$, on en déduit l'inégalité suivante :

$$n^2 = \sum_{k=0}^{n-1} kx_k \geqslant \sum_{k=0}^{n-21} k + \sum_{k=20}^{n-1} (n-20)x_k \geqslant \frac{1}{2}(n-21)(n-20) + \frac{2}{3}n(n-20)$$

D'où $n^2 \geqslant \frac{7}{6}n^2 - \frac{163}{6}n + 420$, ce qui est impossible également pour n assez grand.