PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI NUMÉRO 3

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 14 JANVIER

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe Senior est constitué des élèves nés en 2003 ou avant.
- Le groupe Junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après.
- Les exercices classés “Groupe Junior” ne sont à chercher que par les élèves du groupe Junior.
- Les exercices classés “communs” sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés “Groupe Senior” ne sont à chercher que par les élèves du groupe Senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris.

copies.ofm@gmail.com

Exercices du groupe Junior

Exercice 1. Montrer que pour tous réels $a, b, c \geqslant 0$, on a

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geqslant 6abc.$$

Solution de l'exercice 1 Par IAG, $a^2(1+b^2) \geqslant 2a^2b$, $b^2(1+c^2) \geqslant 2b^2c$, $c^2(1+a^2) \geqslant 2c^2a$ et $a^2b+b^2c+b^2c \geqslant 3(a^2bb^2cc^2a)^{1/3} = 3abc$. Donc

$$a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geqslant 2(a^2b+b^2c+c^2a) \geqslant 2*3abc = 6abc.$$

Exercice 2. Soient $x_1, \dots x_n \geqslant 0$. Montrer que

$$\frac{x_1(2x_1-x_2-x_3)}{x_2+x_3}+\frac{x_2(2x_2-x_3-x_4)}{x_3+x_4}+\dots+\frac{x_n(2x_n-x_1-x_2)}{x_1+x_2} \geqslant 0.$$

Solution de l'exercice 2 Par l'inégalité dite des "mauvais élèves", on a

$$\begin{aligned}
\frac{2x_1^2}{x_2+x_3}+\frac{2x_2^2}{x_3+x_4}+\dots+\frac{2x_{n-1}^2}{x_n+x_1}+\frac{2x_n^2}{x_1+x_2} &\geqslant 2\frac{(x_1+\dots+x_n)^2}{x_2+x_3+x_3+x_4+\dots+x_n+x_1+x_1+x_2} \\
&= 2\frac{(x_1+\dots+x_n)^2}{2(x_1+\dots+x_n)} \\
&= x_1+\dots+x_n \\
&= \frac{x_1(x_2+x_3)}{x_2+x_3}+\frac{x_2(x_3+x_4)}{x_3+x_4}+\dots\frac{x_n(x_1+x_2)}{x_1+x_2}
\end{aligned}$$

On regroupe alors les termes qui sont sous le même dénominateur.

Exercice 3. Soit P un polynôme unitaire à coefficients réels, c'est-à-dire que $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$ pour des réels $a_0, \dots, a_{n-1}$, avec $n \geqslant 1$ un entier. On suppose que $a_0 < 0$ et que $a_1, \dots a_{n-1} \leqslant 0$. Montrer qu'il existe au plus un réel $y \geqslant 0$ tel que $P(y) = 0$.

On ne demande pas de montrer l'existence d'un tel y.

Solution de l'exercice 3 Supposons qu'il existe deux réels distincts $y, z \geqslant 0$ avec $P(y) = P(z) = 0$. Clairement, $yz > 0$, et on peut supposer par exemple $y = rz$ pour un $r > 1$. Notons $b_k = -a_k \geqslant 0$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant n-1$. Alors, on a

$$\begin{aligned}
r^nz^n = y^n = y^n - P(y) &= \sum_{k=0}^{n-1} b_k y^k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} b_k r^k z^k \\
&\leqslant r^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} b_k z^k \\
&= r^{n-1}(z^n - P(z)) = r^{n-1}z^n.
\end{aligned}$$

Par conséquent $r \leqslant 1$, c'est absurde. Donc il existe au plus un réel $y \geqslant 0$ tel que $P(y) = 0$.

En fait, un théorème dit qu'il va en exister un : en effet, on voit que si x est très grand, $P(x) \approx x^n > 0$, et que $P(0) < 0$: on "voit bien", par exemple en traçant le graphe de la fonction, qu'il va y avoir un moment où celui-ci coupera l'axe des abscisses, et donc la fonction s'annulera.

Exercices communs

Exercice 4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x + y \geqslant 0$. Montrer que

$$(x^2+y^2)^3 \geqslant 32(x^3+y^3)(xy-x-y).$$

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Si $x + y \leqslant xy$, l'inégalité est vraie car le membre gauche est positif et pas le membre droit.

Comme on ne peut pas avoir $x < 0$ et $y < 0$ (sinon $x + y < 0$), si x ou y est négatif, on a $xy \leqslant 0 \leqslant x + y$ donc l'inégalité est vraie.

Donc il reste à traiter le cas $x, y \geqslant 0$. On cherche donc à montrer que $32(x^3 + y^3)xy \leqslant 32(x^3 + y^3)(x + y) + (x^2 + y^2)^3$. Par IAG,

$$x^6 + 3x^4y^2 = x^6 + x^4y^2 + x^4y^2 + x^4y^2 \geqslant 4x^{(6+4+4+4)/4}y^{(2+2+2)/4} = 4x^{9/2}y^{3/2},$$

et $32x^4 + 32x^3y \geqslant 64x^{7/2}y^{1/2}$. On a donc

$$x^6+3y^2x^4+32x^4+32x^3y \geqslant 4x^{9/2}y^{3/2}+64x^{7/2}y^{1/2} \geqslant 2*(4*64)^{1/2}(x^{9/2}x^{7/2}y^{3/2}y^{1/2})^{1/2} = 32x^4y.$$

Symétriquement (en échangeant les rôles de x et y) on a

$$y^6 + 3y^4x^2 + 32y^4 + 32y^3x \geqslant 32y^4x.$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned} 32(x^3+y^3)(x+y)+(x^2+y^2)^3 &= x^6+3y^2x^4+32x^4+32x^3y+y^6+3y^4x^2+32y^4+32y^3x \\ &\geqslant 32x^4y+32y^4x = 32xy(x^3+y^3). \end{aligned}$$

Exercice 5. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ telles que pour tous x, y, $f(x)^2f(2y) + f(y)^2f(2x) = 2f(x)f(y)f(x+y)$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> On va montrer que les solutions sont exactement les $x \longmapsto ca^x$, pour des $c \in \mathbb{R}^*$, $a > 0$. On observe que toutes ces fonctions sont bien des solutions.

Réciproquement, soit f_1 une solution. On observe que f_1 ne s'annule pas, donc $f = \frac{f_1}{f_1(0)}$ ne s'annule pas non plus et vérifie l'équation fonctionnelle ; de plus $f(0) = 1$.

On prend $x = 0$, alors $f(2y)f(0)^2 + f(0)f(y)^2 = 2f(0)f(y)^2$, donc $f(2y) = f(y)^2 > 0$ pour tout rationnel y.

Soient maintenant x, y rationnels. En remplaçant dans l'équation fonctionnelle, on trouve que s'ensuit $2f(x)f(y)f(x+y) = f(x)^2f(2y) + f(y)^2f(2x) = f(x)^2f(y)^2 + f(y)^2f(x)^2 = 2f(x)^2f(y)^2$. Comme f ne s'annule pas, on en déduit que $f(x + y) = f(x)f(y)$.

Pour en déduire la forme de f, on va procéder exactement comme on le fait pour déterminer les solutions de l'équation de Cauchy (en fait, on peut s'y ramener exactement en considérant le logarithme de f, parce que f est strictement positive).

On pose $a = f(1)$, et on montre par récurrence sur $n \geqslant 0$ que $f(n) = a^n$. En effet, soit S l'ensemble des n tels que $f(n) \neq a^n$ (en particulier $n \geqslant 2$). Si S est non vide, il possède un plus petit élément, qu'on note n. Comme $n \geqslant 2$, $f(n) = f(n-1)f(1) = a^{n-1}a = a^n$, c'est absurde. Donc S est vide et pour tout entier $n \geqslant 0$, $f(n) = a^n$.

Si $n \leqslant 0$ est entier, $1 = f(0) = f(|n| + n) = f(|n|)f(n) = a^{|n|}f(n) = a^{-n}f(n)$ donc $f(n) = a^n$.
Enfin, si $q \in \mathbb{Q}$, il existe un entier $p \geqslant 1$ tel que $n = pq$ soit entier. Alors $a^n = f(n) = f(q + (p-1)q) = f(q)f((p-2)q + q) = f(q)^2 f((p-3)q + q) = \ldots = f(q)^p$, donc $f(q) = (a^n)^{1/p} = a^{n/p} = a^q$.
Ainsi, $f_1(q) = ca^q$ pour tout rationnel q, avec $c = f_1(0)$.

Exercice 6. On considère la suite a donnée par $a_1 = 2$, et $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Montrer que

$$1 - \frac{1}{2018^{2018}} < \sum_{i=1}^{2018} \frac{1}{a_i} < 1.$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u> A première vue, on peut ne pas trop savoir comment aborder l'exercice, parce qu'il semble difficile de calculer les valeurs de a jusqu'à 2018 avant de calculer la somme des inverses et de déterminer avec autant de précision sa position par rapport à 1. Donc on va calculer des petites valeurs de a et essayer de comprendre comment la somme des inverses se comporte.
On calcule sans difficulté $a_2 = 3, a_3 = 7, a_4 = 43$. On observe que $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{5}{6} = 1 - 6^{-1}$, puis $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} = 1 - \frac{1}{42}$: il semble qu'à chaque fois a_{n+1} est choisi pour que la somme des inverses soit la plus proche possible de 1 sans l'atteindre.
On va montrer que c'est ce qui se produit systématiquement, c'est-à-dire que si $n \geqslant 1$, $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} = 1 - \frac{1}{a_{n+1}-1}$.
C'est évident lorsque $n = 1$. Soit $n \geqslant 1$ tel que le résultat soit vrai au rang n et montrons-le au rang $n+1$. On a

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{a_i} &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} + \frac{1}{a_{n+1}} \\
&= 1 - \frac{1}{a_{n+1} - 1} + \frac{1}{a_{n+1}} \\
&= 1 - \frac{1}{(a_{n+1} - 1)_{n+1}} a = 1 - \frac{1}{a_{(n+1)+1} - 1}
\end{aligned}$$

En appliquant ceci à $n = 2018$, il reste à prouver que $a_{2019} > 2018^{2018}$. Pour ce faire, on va montrer que pour tout $n \geqslant 4$, $a_n \geqslant 2^{2^{n-2}+1}$. On procède encore une fois par récurrence. C'est vrai pour $n = 4$. Soit $n \geqslant 4$ tel qu'on ait $a_n \geqslant 2^{2^{n-2}+1}$. Alors $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \geqslant 2^{2(2^{n-2}+1)} - 2^{2^{n-2}+1} + 1 = 2^{2^{(n+1)-2}+1} + (1 + 2^{2^{n-1}+1} - 2^{2^{n-2}+1}) \geqslant 2^{2^{(n+1)-2}+1}$, ce qui clôt la récurrence. En fin de compte, $a_{2019} \geqslant 2^{2^{2017}+1} \geqslant 2^{20*2018} = (2^{20})^{2018} > 2018^{2018}$.
Juste une remarque : d'où vient l'estimation que nous avons établie sur a_n ? Nous en donnons une heuristique, pour deviner le genre de formules qu'on pouvait chercher : on voit que a_n devient grand assez vite (a_5 est de l'ordre de 2000, etc). Lorsque a_n est très grand, $a_n - 1$ est extrêmement petit devant a_n^2. Donc quand n est assez grand, on a la "relation" suivante : $a_{n+1} \approx a_n^2$. Or, les suites qui satisfont la version exacte de cette relation sont des $\alpha^{2^{n-p}}$. Il paraît donc raisonnable de chercher à trouver des $\alpha > 1$, $C > 0$, $p \geqslant 1$ tels que $a_n \geqslant C\alpha^{2^{n-p}}$ pour tout n assez grand.

Exercices du groupe A

Exercice 7. On se donne $n \geqslant 2$, et on considère $x_1, \ldots, x_n \in [0, n]$ tels que

$$x_1 \ldots x_n = (n - x_1) \ldots (n - x_n).$$

Déterminer la plus grande valeur prise par $y = x_1 + \ldots + x_n$.

Solution de l'exercice 7 On suppose que tous les x_i sont strictement inférieurs à n.
On prend $x_i' = x_i/(n-x_i)$, et on calcule que $x_i = n - \frac{n}{x_i'}$, donc $y = n^2 - n\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i'+1}$ sachant que $x_1' \ldots x_n' = 1$ (donc les x_i' sont strictement positifs).
On va montrer que si $z_1, \ldots, z_n > 0$ sont tels que $z_1 \ldots z_n = 1$, alors $\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+z_i} > 1$. Observons qu'on peut écrire $z_i = \frac{a_i}{a_{i+1}}$ où les a_i sont des réels strictement positifs et $a_{n+1} = a_1$. Il s'agit donc de montrer que si $a_1, \ldots, a_n > 0$, alors avec $a_{n+1} = a_1$, $\sum_{cyc} \frac{a_i}{a_i+a_{i+1}} \geqslant 1$ avec égalité ssi $n = 2$. On procède par récurrence sur $n \geqslant 2$.
Si $n = 2$, c'est bon.
Soit $n \geqslant 3$ tel que le résultat soit vrai en toute généralité au rang $n-1$. On se donne donc $a_1, \ldots a_n, a_{n+1} = a_1 > 0$. S'il existe deux indices $i \leqslant n$ (notés k et l) avec $a_i \geqslant a_{i+1}$, alors $\sum_{cyc} \frac{a_i}{a_i+a_{i+1}} > \frac{a_k}{a_k+a_{k+1}} + \frac{a_l}{a_l+a_{l+1}} \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, le résultat est vrai. Donc quitte à faire une permutation circulaire, on peut supposer $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. On pose, pour $i < n$, $a_i' = a_i$, et $a_n' = a_1'$.

$$\begin{aligned}
\sum_{cyc} \frac{a_i}{a_i + a_{i+1}} &= \sum_{cyc} \frac{a_i'}{a_i' + a_{i+1}'} + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+a_n} + \frac{a_n}{a_n+a_1} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+a_1} \\
&\geqslant 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+a_n} + \left(\frac{a_n}{a_n+a_1} - \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+a_1}\right) \\
&\geqslant 1 + \frac{a_{n-1}}{a_{n-1}+a_n} + 0 > 1
\end{aligned}$$

Ainsi, lorsque tous les x_i sont strictement inférieurs à n, $y < n^2 - n$.
Supposons que l'un des x_i vaille n. Alors le produit des $n - x_i$, donc celui des x_i est nul et donc l'un des x_i est nul. Chaque autre x_i est majoré par n donc leur somme est au plus $n(n-1)$. Réciproquement, avec $x_n = 0$, $x_i = n$ pour $1 \leqslant i < n$, $y = n(n-1)$ donc $n(n-1)$ est bien le maximum de y.

Exercice 8. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telles que

$$\forall x, y > 0,\ f(1 + xf(y)) = yf(x+y).$$

Solution de l'exercice 8 La fonction inverse fonctionne, on veut montrer que c'est la seule.
On se donne $y > 0$ différent de 1. Par l'équation fonctionnelle, il n'existe pas de $x > 0$ tel que $1 + xf(y) = x + y$, c'est-à-dire que $f(y)$ et y ne sont pas strictement du même côté de 1.
En particulier, pour tous $x, y > 0$, $yf(x+y) = f(1 + xf(y)) \leqslant 1$, et donc $f(x+y) \leqslant \frac{x+y}{y}\frac{1}{x+y}$. On prend $z > 0$, $0 < y < z$, alors $f(z) \leqslant \frac{z}{y}\frac{1}{z}$, et en faisant tendre y vers z on trouve que $f(z) \leqslant z^{-1}$.
Avec $y > 0, x = f(y)^{-1}$, on a

$$f(2) = f(1 + xf(y)) \leqslant yf(x+y) \leqslant \frac{y}{y + \frac{1}{f(y)}},$$

donc $f(2) < 1$ et $f(y) \geqslant \frac{f(2)}{1-f(2)} y^{-1}$.
A l'aide ce cet encadrement sur f, on peut montrer que f est injective. Soient $0 < \alpha \leqslant \beta$ avec $f(\alpha) = f(\beta)$. Alors on a pour tout $x > 0$, $\alpha f(x+\alpha) = f(1 + xf(\alpha)) = f(1 + xf(\beta)) = \beta f(x+\beta)$. Par récurrence, on en déduit que $f(n\beta) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n f(n\alpha)$. Or, $f(n\alpha) \leqslant \frac{1}{n\alpha}$ et $f(n\beta) \geqslant \frac{C}{n\beta}$. On en

déduit que la suite $\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n\right)_n$ est minorée par une constante strictement positive donc $\alpha = \beta$ et f est bien injective.

Enfin, on a $yf(x+y) = f(1+xf(y)) = (xf(y))^{-1}(xf(y))f(1+(xf(y))) = (xf(y))^{-1}f(1+1*f(xf(y)))$. Alors, avec $x = yf(y)^{-1}$, l'injectivité de f donne

$$y + \frac{1}{yf(y)} = 1 + f\left(\frac{1}{y}\right) \leqslant 1 + y,$$

donc $yf(y) \geqslant 1$ et $f(y) \geqslant y^{-1}$, et finalement $f(y) = y^{-1}$.

Exercice 9. Un polynôme réel unitaire est dit délicieux si tous ses coefficients sont dans $[-1,1]$. Un polynôme unitaire réel dont aucun multiple n'est délicieux est dit non comestible. Déterminer l'ensemble des $\rho \geqslant 0$ pour lesquels il existe un polynôme non comestible dont ρ est le module maximal des racines complexes.

Solution de l'exercice 9 On va montrer que c'est exactement $]1; +\infty[$. En effet, soit $\rho > 1$, soit $N > 0$ tel que $a = \rho^N > 2$. On considère un multiple délicieux de degré d de $X^N - a$. On vérifie alors qu'en ne prenant que les coefficients de rang congru à d mod N, et en divisant par la puissance appropriée de X, on a un polynôme délicieux en X^N annulant ρ, donc un polynôme délicieux annulant a. Or, on a, pour tout $p \geqslant 0$, $\sum_{k=0}^{p} a^k < a^{p+1}$, donc c'est impossible, donc $X^N - a$ est non comestible.

Réciproquement, on se donne un polynôme unitaire P non comestible. Soit λ une racine réelle de P de module au plus 1. Supposons que $\frac{P}{X-\lambda}$ possède un multiple délicieux Q de degré N. Alors $(X^{N+1} - \lambda^{N+1})Q$ est un multiple délicieux de P, absurde. Donc on peut supposer que les modules des éventuelles racines réelles de P sont strictement plus grands que 1.

Si λ est une racine complexe de P de module strictement moins de 1, on fait pareil : si $\frac{P}{(X-\lambda)(X-\eta)}$ (η est le conjugué complexe de λ) possède un multiple délicieux Q de degré d, on choisit un $N > d+1$ tel que $(X^N - \lambda^N)(X^N - \eta^N)$ soit à coefficients non dominants strictement inférieurs à 1 en module : alors $(X^N - \lambda^N)(X^N - \eta^N)Q$ est un multiple délicieux de P, c'est absurde. Donc on peut supposer que les racines complexes de P ont pour module au moins 1.

Ainsi, si $\rho \leqslant 1$ est possible, il existe un polynôme non comestible P de degré minimal pour lequel $\rho \leqslant 1$: alors $\rho = 1$ et P n'a que des racines complexes non réelles de module 1. On se donne une racine λ de P et η son conjugué. Par minimalité du degré de P, il existe un multiple délicieux Q_1 de degré n_0 de $\frac{P}{(X-\lambda)(X-\eta)}$. Soit $\theta \in [0,\pi]$ la classe modulo π d'un argument de θ. Il n'est pas difficile de voir qu'il existe $N > n_0 + 1$ tels que $N\theta$ mod π soit entre $\pi/3$ et $2\pi/3$: alors $Q_1 = (X^N - \lambda^N)(X^N - \eta^N)$ ainsi que QQ_1 sont délicieux avec $P|QQ_1$, c'est absurde. Donc on a toujours $\rho > 1$.