PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

TEST DU 9 JANVIER 2019
DURÉE : 4H

Instructions

- Le groupe Junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après.
  Le groupe Senior est constitué des élèves nés en 2003 ou avant.
- Les exercices 1 à 3 ne concernent que les élèves du groupe Junior.
  L'exercice 4 concerne tous les élèves, quel que soit leur groupe.
  Les exercices 5 et 6 ne concernent que les élèves du groupe Senior.
- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- On demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie. Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème. Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  Les calculatrices sont interdites, ainsi que tous les instruments électroniques.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie,
75005 Paris.

copies.ofm@gmail.com

Exercices du groupe Junior

Exercice 1. Soit x et y deux entiers tels que $5x + 6y$ et $6x + 5y$ soient des carrés parfaits. Montrer que x et y sont tous deux divisibles par 11.

Note : on dit qu'un entier n est un carré parfait si c'est le carré d'un entier.

Solution de l'exercice 1 Soit a et b deux entiers tels que $5x + 6y = a^2$ et $6x + 5y = b^2$. On note que $a^2 + b^2 = 11(x + y)$ est divisible par 11. Or, modulo 11, les carrés sont 0, 1, 3, 4, 5 et 9 : ainsi, la somme de deux carrés est nulle (mod. 11) si et seulement si les deux carrés en question sont nuls (mod. 11) eux aussi.

Dans notre cas, cela signifie que a et b sont divisibles par 11. Il existe donc des entiers A et B tels que $a = 11\,A$ et $b = 11\,B$. Mais alors

$$11x = (6 \times 6 - 5 \times 5)x = 6(b^2 - 5y^2) - 5(a^2 - 6y) = 6b^2 - 5a^2 = 11^2(6B^2 - 5A^2),$$

de sorte que $x = 11(6B^2 - 5A^2)$ est bien divisible par 11. De même, on montre que $y = 11(6A^2 - 5B^2)$ est lui aussi divisible par 11.

Exercice 2. Soit Γ un cercle de centre O et de rayon r et ℓ une droite qui ne coupe pas Γ. On note E le point d'intersection entre ℓ et la droite perpendiculaire à ℓ passant par O.

Soit M un point de ℓ différent de E. Les tangentes au cercle Γ et passant par M touchent Γ en A et B. Enfin, soit H le point d'intersection des droites (AB) et (OE).

Montrer que $OH = r^2/OE$.

Solution de l'exercice 2 Tout d'abord, les triangles OAM, OBM et OEM sont respectivement rectangles en A, B et E, de sorte que les points A, O, B, E, M appartiennent tous à un même cercle de diamètre $[OM]$.

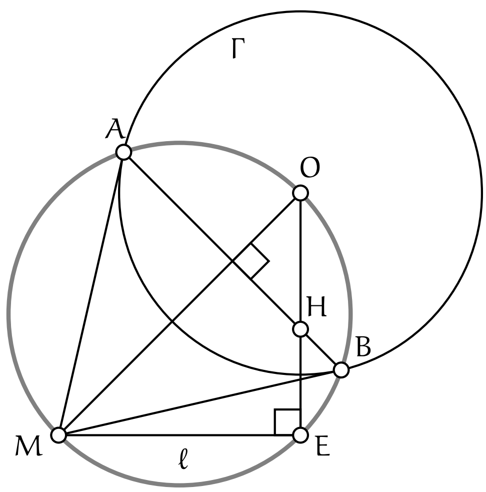
Or, d'après la loi des sinus dans les triangles OBH et OEA, on sait que

$$\frac{OH \times OE}{r^2} = \frac{OH}{OB} \times \frac{OE}{OA} = \frac{\sin(\widehat{OBA})}{\sin(\widehat{OHB})} \times \frac{\sin(\widehat{OAE})}{\sin(\widehat{OEA})}.$$

Les points O, B, E et A étant cocycliques, on sait que $\widehat{OBA} = \widehat{OEA}$. D'autre part, puisque les droites (AH) et (HO) sont respectivement perpendiculaires à (OM) et (ME), on sait également que

$$\widehat{OHB} = 180° - \widehat{AHO} = 180° - \widehat{OME} = 180° - \widehat{OAE}.$$

Cela montre que $\sin(\widehat{OBA}) = \sin(\widehat{OEA})$ et que $\sin(\widehat{OHB}) = \sin(\widehat{OAE})$, ce qui conclut.



Exercice 3. Soit n un entier naturel. Un escalier de taille n est constitué de petits carrés 1×1, avec 1 carré pour la première marche, 2 carrés pour la deuxième marche, et ainsi de suite, jusqu'à n carrés pour la $n^{\text{ème}}$ marche.

On dispose de pierres carrées (de coté entier) de toutes les tailles pour construire cet escalier et on note $f(n)$ le nombre minimum de pierres que l'on doit utiliser pour un escalier de taille n. Par exemple, $f(2) = 3$ et $f(4) = 7$, comme illustré ci-dessous.

1. Trouver tous les entiers $n \geqslant 0$ tels que $f(n) = n$.
2. Trouver tous les entiers $n \geqslant 0$ tels que $f(n) = n + 1$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Commençons par quelques définitions et observations générales. Dans la suite, on note (i, j) le petit carré 1×1 situé au $j^{\text{ème}}$ étage de la $i^{\text{ème}}$ marche. On appellera *carré supérieur* chaque petit carré (k, k), c'est-à-dire chaque carré situé tout en haut d'une marche.

On considère une construction de l'escalier de taille n à partir de $f(n)$ pierres carrées. Deux carrés supérieurs distincts ne peuvent appartenir à la même pierre. Puisqu'il y a exactement n carrés supérieurs dans un escalier de taille n, on en déduit que $f(n) \geqslant n$ pour tout $n \geqslant 0$.

On traite maintenant les questions 1 et 2.

1. Tout d'abord, il est clair que $f(0) = 0$. Soit maintenant $n \geqslant 1$ un entier tel que $f(n) = n$. Au vu de l'observation ci-dessus, chaque pierre contient un unique carré supérieur. C'est en particulier le cas de la pierre contenant le carré $(n, 1)$. Mais alors cette pierre sépare l'escalier en 2 parties symétriques. Ainsi, chaque partie forme un escalier de taille $(n-1)/2$, tel que $f((n-1)/2) = (n-1)/2$. Par conséquent, une récurrence immédiate montre qu'il existe un entier $k \geqslant 0$ tel que $n = 2^k - 1$.

   Réciproquement, et en suivant cette construction dans l'autre sens, une récurrence immédiate montre que $f(2^k - 1) = 2^k - 1$ pour tout entier $k \geqslant 0$.

   Les entiers n recherchés sont donc bien les entiers de la forme $n = 2^k - 1$ avec $k \geqslant 0$.

2. Cette fois-ci, on sait que $n \geqslant 2$. D'autre part, la pierre contenant le carré $(n, 1)$ ne saurait contenir de carré supérieur; en effet, si c'était le cas, elle couperait l'escalier en 2 parties symétriques, formant chacune un escalier de taille $(n-1)/2$, de sorte que $f(n) - n$ devrait être pair.

   Il s'agit donc de la seule la seule pierre qui ne contient pas de carré supérieur. Soit $\ell \times \ell$ les dimensions de cette pierre. Une fois ℓ et n fixés, chaque autre pierre doit contenir un carré supérieur, et les dimensions des pierres sont donc prescrites. En particulier, une récurrence immédiate sur $n+i-j$ montre que les pierres contenant les carrés (i, j) et $(n+1-j, n+1-i)$ occupent en fait des positions symétriques.

   Afin de se ramener à ne traiter que des escaliers où chaque pierre contient un carré supérieur, on s'intéresse donc spécifiquement aux pierres contenant les carrés $(n, 1)$, $(n-\ell, 1)$, $(n, \ell+1)$ et $(n-\ell, \ell+1)$; cette dernière pierre n'existe que si $n \neq 2\ell$.

   On suppose tout d'abord que $n \neq 2\ell$. Dans ce cas, nos quatre pierres sont deux à deux disjointes, de tailles respectives $\ell \times \ell$, $(n+1-\ell)/2$, $(n+1-\ell)/2$ et $(n+1-2\ell)/2$, et elles coupent l'escalier en quatre petits escaliers : deux escaliers de taille $(n-1-\ell)/2$ et deux escaliers de taille $(n-1-2\ell)/2$. Au vu des résultats de la première question, il existe donc deux entiers naturels non nuls k et k' tels que $n = 2^k + \ell - 1 = 2^{k'} + 2\ell - 1$.

Cela signifie que $\ell = 2^k - 2^{k'}$, donc que $k \geqslant k'$ et que $n = 2^{k+1} - 2^{k'} - 1$. Réciproquement, s'il existe des entiers $k \geqslant k' \geqslant 1$ tels que $n = 2^{k+1} - 2^{k'} - 1$, il suffit en effet de choisir $\ell = 2^k - 2^{k'}$ pour que notre construction fonctionne.

De même, si $n = 2\ell$, on a en fait trois pierres, qui coupent l'escalier en quatre petits escaliers de taille $(n - 1 - \ell)/2 = (\ell - 1)/2$, donc il existe un entier naturel non nul k tel que $\ell = 2^k - 1$ et $n = 2^{k+1} - 2$. Réciproquement, s'il existe un entier $k \geqslant 1$ tel que $n = 2^{k+1} - 2$, il suffit en effet de choisir $\ell = n/2$ pour que notre construction fonctionne.

Les entiers n recherchés sont donc bien les entiers de la forme $n = 2^{k+1} - 2^{k'} - 1$ avec $k \geqslant k' \geqslant 0$.

Exercice commun aux groupes Junior et Senior

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que

$$xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x^2 + y^2)$$

pour tous les entiers naturels x et y.

Note : on rappelle que $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels, c'est-à-dire $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Solution de l'exercice 4 Dans la suite, on notera $\mathbf{E}_{x,y}$ l'équation de l'énoncé.

Tout d'abord, l'équation $\mathbf{E}_{x,0}$ indique que $x\,f(0) = x\,f(x^2)$, ce qui montre que $f(x^2) = f(0)$ pour tout entier $x \geqslant 1$. Par conséquent, pour tout entier $y \geqslant 1$, l'équation $\mathbf{E}_{x,y^2}$ indique que $x + y^2$ divise $x(f(0) - f(x))$. Cette relation de divisibilité étant valide même quand y est arbitrairement grand, on en déduit que $f(x) = f(0)$ quel que soit x.

Réciproquement, on vérifie aisément que les fonctions constantes sont bien des solutions de l'équation.

Exercices du groupe Senior

Exercice 5. Soit n un entier impair, et soit S un ensemble de n points du plan à coordonnées entières. On considère une permutation $f : S \to S$ qui satisfait la propriété suivante :

Pour toute paire de points A et B appartenant à S, la distance entre $f(A)$ et $f(B)$ est supérieure ou égale à la distance entre A et B.

Montrer qu'il existe un point X, appartenant à S, tel que $f(X) = X$.

Solution de l'exercice 5 Puisque S est de cardinal impair, f admet une orbite de cardinal impair. Sans perte de généralité, on peut donc supposer que S est égal à cette orbite, et même que $S = \{P_1, \ldots, P_n\}$ avec $f(P_i) = P_{i+1}$ pour tout $i \leqslant n$, en posant $P_1 = n + 1$.

Si f n'a aucun point fixe, c'est donc que $n \geqslant 3$. Montrons que ce cas est en fait impossible.

En effet, dans ces conditions, l'énoncé montre que $P_1P_2 \leqslant P_2P_3 \leqslant \ldots \leqslant P_nP_1$, de sorte que toutes ces inégalités sont en fait des égalités. En outre, toujours sans perte de généralité, quitte à considérer un point P_i plutôt que P_1 et quitte à effectuer des translations à coordonnées entières et à diviser toutes nos coordonnées par 2, on peut supposer que les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$ ne sont pas toutes les deux paires. Maintenant, on va noter x_i et y_i les coordonnées du point P_i.

Puisque les carrés modulo 4 sont 0 et 1, on en déduit que $P_iP_{i+1}^2 = P_1P_2^2 = (x_i - x_{i+1})^2 + (y_i - y_{i+1})^2$ est congru à 1 ou 2 modulo 4.

Dans le premier cas, c'est donc que la somme $\Delta_i = x_i + y_i + x_{i+1} + y_{i+1} \equiv 1 \pmod 2$. On en déduit que

$$n \equiv \sum_{i=1}^{n} \Delta_i \equiv 2 \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i) \equiv 0 \pmod 2.$$

Dans le deuxième cas, on a directement $\Delta_i^x = x_i + x_{i+1} \equiv 1 \pmod 2$ et $\Delta_i^y = y_i + y_{i+1} \equiv 1 \pmod 2$, de sorte que

$$n \equiv \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^x \equiv 2 \sum_{i=1}^{n} x_i \equiv 0 \pmod 2.$$

Puisque n est impair, aucun de ces deux cas n'est possible, ce qui conclut.

Exercice 6. Soit ABC un triangle, et soit E et F deux points appartenant respectivement aux droites (AB) et (AC), distincts de A, B et C. Soit également Ω le cercle circoncscrit à ABC, soit O le centre de Ω, et soit Γ le cercle circonscrit à AEF. Enfin, soit P le point d'intersection de Γ et Ω autre que A, et soit Q le symétrique de P par rapport à la droite (EF).

Montrer que Q appartient à la droite (BC) si et seulement si O appartient au cercle Γ.

Solution de l'exercice 6 Puisque (BC) et (EF) sont deux droites d'intérêt notoire, on note T leur point d'intersection, éventuellement rejeté à l'infini. Alors Q appartient à la droite (BC) si et seulement si, en angles de droites, on a $(BT, ET) = (ET, PT)$.

Or, toujours en angles de droites, on sait déjà que

$$\begin{aligned}(PB, PE) &= (PB, PA) + (PA, PE) = (CB, CA) + (FA, FE)\\ &= (CT, CF) + (CF, FT) = (CT, FT) = (TB, TE),\end{aligned}$$

ce qui signifie que les points P, E, B et T sont cocycliques. Par conséquent, on sait que $(BT, ET) = (BP, EP)$ et $(ET, PT) = (EB, PB) = (AB, PB)$.

On sait aussi que $2(BA, BP) = (OA, OP)$ et que $(EA, EP) = (BA, BP) + (BP, EP)$. Ainsi,

$$\begin{aligned}Q \text{ appartient à la droite } (BC) &\Leftrightarrow (BP, EP) = (AB, PB)\\ &\Leftrightarrow (EA, EP) = 2(BA, BP) = (OA, OP)\\ &\Leftrightarrow O \text{ appartient au cercle } \Gamma.\end{aligned}$$