PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI NUMÉRO 3

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 14 JANVIER

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe Senior est constitué des élèves nés en 2003 ou avant.
- Le groupe Junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après.
- Les exercices classés “Groupe Junior” ne sont à chercher que par les élèves du groupe Junior.
- Les exercices classés “communs” sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés “Groupe Senior” ne sont à chercher que par les élèves du groupe Senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques,
11-13 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris.

copies.ofm@gmail.com

Exercices du groupe Junior

Exercice 1. Montrer que pour tous réels $a, b, c \geqslant 0$, on a

$$a^2(1+b^2) + b^2(1+c^2) + c^2(1+a^2) \geqslant 6abc.$$

Exercice 2. Soient $x_1, \dots x_n \geqslant 0$. Montrer que

$$\frac{x_1(2x_1 - x_2 - x_3)}{x_2 + x_3} + \frac{x_2(2x_2 - x_3 - x_4)}{x_3 + x_4} + \dots + \frac{x_n(2x_n - x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} \geqslant 0.$$

Exercice 3. Soit P un polynôme unitaire à coefficients réels, c'est-à-dire que

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

pour des réels $a_0, \dots, a_{n-1}$, avec $n \geqslant 1$ un entier. On suppose que $a_0 < 0$ et que $a_1, \dots a_{n-1} \leqslant 0$. Montrer qu'il existe au plus un réel $y \geqslant 0$ tel que $P(y) = 0$.

On ne demande pas de montrer l'existence d'un tel y.

Exercices communs

Exercice 4. Soient $x, y \in \mathbb{R}$ avec $x + y \geqslant 0$. Montrer que

$$(x^2 + y^2)^3 \geqslant 32(x^3 + y^3)(xy - x - y).$$

Exercice 5. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} \backslash \{0\}$ telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x)^2 f(2y) + f(y)^2 f(2x) = 2f(x)f(y)f(x+y).$$

Exercice 6. On considère la suite a donnée par $a_1 = 2$, et $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$. Montrer que

$$1 - \frac{1}{2018^{2018}} < \sum_{i=1}^{2018} \frac{1}{a_i} < 1.$$

Exercices du groupe Senior

Exercice 7. Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. On regarde $x_1, \ldots, x_n \in [0, n]$ tels que

$$x_1 \ldots x_n = (n - x_1) \ldots (n - x_n).$$

Déterminer la plus grande valeur prise par $y = x_1 + \ldots + x_n$.

Exercice 8. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ telles que

$$\forall x, y > 0,\ f(1 + xf(y)) = yf(x + y).$$

Exercice 9. Un polynôme réel unitaire est dit *délicieux* si tous ses coefficients sont dans $[-1, 1]$. Un polynôme unitaire réel dont aucun multiple n'est délicieux est dit *non comestible*. Déterminer l'ensemble des réels $\rho \geqslant 0$ pour lesquels il existe un polynôme non comestible dont ρ est le module maximal des racines complexes.