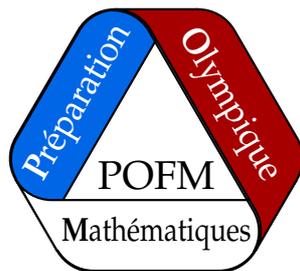


# PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES



## ENVOI NUMÉRO 3

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 14 JANVIER

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe Senior est constitué des élèves nés en 2003 ou avant.
- Le groupe Junior est constitué des élèves nés en 2004 ou après.
- Les exercices classés “Groupe Junior” ne sont à chercher que par les élèves du groupe Junior.
- Les exercices classés “communs” sont à chercher par tout le monde.
- Les exercices classés “Groupe Senior” ne sont à chercher que par les élèves du groupe Senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Animath, Préparation Olympique Française de Mathématiques,  
11-13 rue Pierre et Marie Curie, 75005 Paris.

[copies.ofm@gmail.com](mailto:copies.ofm@gmail.com)

## Exercices du groupe Junior

*Exercice 1.* Montrer que pour tous réels  $a, b, c \geq 0$ , on a

$$a^2(1 + b^2) + b^2(1 + c^2) + c^2(1 + a^2) \geq 6abc.$$

*Exercice 2.* Soient  $x_1, \dots, x_n \geq 0$ . Montrer que

$$\frac{x_1(2x_1 - x_2 - x_3)}{x_2 + x_3} + \frac{x_2(2x_2 - x_3 - x_4)}{x_3 + x_4} + \dots + \frac{x_n(2x_n - x_1 - x_2)}{x_1 + x_2} \geq 0.$$

*Exercice 3.* Soit  $P$  un polynôme unitaire à coefficients réels, c'est-à-dire que

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$$

pour des réels  $a_0, \dots, a_{n-1}$ , avec  $n \geq 1$  un entier. On suppose que  $a_0 < 0$  et que  $a_1, \dots, a_{n-1} \leq 0$ . Montrer qu'il existe au plus un réel  $y \geq 0$  tel que  $P(y) = 0$ .

*On ne demande pas de montrer l'existence d'un tel  $y$ .*

## Exercices communs

*Exercice 4.* Soient  $x, y \in \mathbb{R}$  avec  $x + y \geq 0$ . Montrer que

$$(x^2 + y^2)^3 \geq 32(x^3 + y^3)(xy - x - y).$$

*Exercice 5.* Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$  telles que

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, f(x)^2 f(2y) + f(y)^2 f(2x) = 2f(x)f(y)f(x + y).$$

*Exercice 6.* On considère la suite  $a$  donnée par  $a_1 = 2$ , et  $a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1$ . Montrer que

$$1 - \frac{1}{2018^{2018}} < \sum_{i=1}^{2018} \frac{1}{a_i} < 1.$$

## Exercices du groupe Senior

*Exercice 7.* Soit  $n \geq 2$  un entier fixé. On regarde  $x_1, \dots, x_n \in [0, n]$  tels que

$$x_1 \dots x_n = (n - x_1) \dots (n - x_n).$$

Déterminer la plus grande valeur prise par  $y = x_1 + \dots + x_n$ .

*Exercice 8.* Trouver toutes les fonctions  $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}^{+*}$  telles que

$$\forall x, y > 0, f(1 + xf(y)) = yf(x + y).$$

*Exercice 9.* Un polynôme réel unitaire est dit *délicieux* si tous ses coefficients sont dans  $[-1, 1]$ . Un polynôme unitaire réel dont aucun multiple n'est délicieux est dit *non comestible*. Déterminer l'ensemble des réels  $\rho \geq 0$  pour lesquels il existe un polynôme non comestible dont  $\rho$  est le module maximal des racines complexes.