PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 2 : ARITHMÉTIQUE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 14 DÉCEMBRE 2018

Exercices Juniors

Exercice 1. Trouver le nombre de solutions de $n^2m^6 = 180t + 2$ pour n,m et t des entiers positifs.

Solution de l'exercice 1 On considère l'expression modulo 4. La gauche est un carré et est donc congru à 0 ou 1. 180 est congru à 0 modulo 4 donc $180t+2$ est congru à $0*t+2 = 2$. L'équation n'a pas de solutions modulo 4, elle n'en a donc pas non plus dans $\mathbb{N}$

Exercice 2. Trouver la somme des n tels que $n^2 + 8n + 44$ soit un carré parfait.

Solution de l'exercice 2 Soit f la fonction étudiée, une idée dans ce genre d'exercice est de coincer $f(n)$ entre 2 carrés d'entiers consécutifs $k^2 < f(n) < (k+1)^2$ et de dire par l'absurde que si $f(n) = i^2$ alors $k < i < k+1$ ce qui est impossible car on a des entiers.
Ici les calculs peuvent s'abréger en remarquant que f a même parité que $n+4$, ainsi si $(n+4)^2 = n^2+8n+16 < f(n) < n^2+12n+36 = (n+6)^2$ ce qui est vrai dès que $n > 2$, $f(n)$ n'est pas un carré. Pour les petits cas 2 est solution et 1 non.

Exercice 3. Un entier n est *parfait* si la somme de ses diviseurs est $2n$. Soit n un entier parfait et p son plus petit diviseur premier. Montrer que l'exposant de p dans la décomposition en produit de puissances de nombres premiers de n est pair.

Solution de l'exercice 3 Soit $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ avec les p_i premiers distincts. La somme des diviseurs de n est $\sigma(n) = \prod_{i=1}^{k}(1 + \cdots + p_i^{a_i})$ (cf. la page 14 du cours d'arithmétique complet disponible sur maths-olympiques.fr).
Supposons par l'absurde que a_1 soit impair, alors $1+\cdots+p_1^{a_1} = (1+p_1)+p_1^2(1+p_1)+\cdots+p_1^{a_1-1}(1+p_1)$. Alors p_1+1 divise $1+\cdots+p_1^{a_1}$, donc aussi $2n = \prod_{i=1}^{k}(1+\cdots+p_i^{a_i})$. Si p_1+1 n'est pas premier : il a un plus grand diviseur premier $q < p_1$ qui vérifie $q|2n$; alors comme q est premier avec n, $q = 2$; mais alors $q^2|p_1+1|2n$ et donc $q|n$, contradiction.
Donc p_1+1 est premier et alors nécessairement $p_1 = 2$ et $p_1+1 = p_2 = 3$. Alors n, $\frac{n}{2}$, $\frac{n}{3}$ et $\frac{n}{6}$ sont entiers et divisent de n. Comme $n > 6$, ils sont différents de 1. Ainsi $2n = \sigma(n) \geqslant n + \frac{n}{2} + \frac{n}{3} + \frac{n}{6} + 1 = 2n + 1$, contradiction. Donc a_1 est pair.

Exercices Communs

Exercice 4. Soit n un entier strictement positif. Montrer qu'il existe n entiers 2 à 2 distincts $r_1, \ldots, r_n$ tels que chaque r_i divise $r_1 + \cdots + r_n$.

Solution de l'exercice 4 La solution s'inspire des fractions égyptiennes, une fraction égyptienne est uplet d'entiers distincts $a_1, \ldots, a_n$ vérifiant $1/a_1 + \cdots + 1/a_n = 1$, par exemple

$1/2 + 1/3 + 1/6 = 1$.
Alors en posant $r_i := \prod_{j \neq i} a_j = \frac{a_1 \cdots a_n}{a_i} \in \mathbb{Z}$, ils seront distinct et leur somme fera $a_1 \cdots a_n$, que chaque r_i divise.
On montre par récurrence qu'une fraction égyptienne existe pour chaque $n \geqslant 3$. L'exemple fait l'initialisation.
Hérédité : supposons prouvé pour n prouvons pour $n+1$, on écrit les coefficients triés dans l'ordre croissant, puis on écrit $a'_n = 1 + a_n$ et $a'_{n+1} = a_n(1 + a_n)$ On remarque $1/a'_n + 1/a'_{n+1} = 1/a_n$. En posant $a'_i = a_i$ pour $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, on dispose d'une fraction égyptienne de longueur $n+1$, ce qui conclut la récurrence (depuis l'exemple on a $1/7 + 1/42 = 1/6$ et cela donne : $1/2 + 1/3 + 1/7 + 1/42 = 1$).

Exercice 5. Soit n un entier positif. Montrer qu'il existe un entier positif m tel que $n! = \varphi(m)$, où φ est la fonction indicatrice d'Euler. (On rappelle que si $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ avec $p_1, \ldots, p_k$ des nombres premiers 2 à 2 distincts, $\varphi(m) = m\big((1 - \frac{1}{p_1}) \cdots (1 - \frac{1}{p_k})\big)$)

Solution de l'exercice 5 On procède par construction en partant des plus grands nombres premiers au plus petit.
L'idée est de contraindre la valeur de $\phi(m)$. La construction peut paraître un peu lourde mais il ne faut pas se laisser et impressionner et comprendre l'idée qui est derrière.
Soit $p_1, p_2 \ldots$ les nombres premiers $p_k \leqslant n < p_{k+1}$
On montre par récurrence descendante que pour tout i il existe m_i tel que
- m_i est un produit de p_j avec $k \geqslant j \geqslant i$
- Pour tout $j \geqslant i$, p_j a le même exposant dans m_i et $n!$
- $\phi(m_i) | n!$

L'initialisation se fait pour i=k+1 avec $m_{k+1} = 1$.
Pour l'hérédité on multiplie m_{i+1} par p_i jusqu'à avoir autant de p_i dans $\phi(m_i)$ que dans $n!$ pour obtenir m_i on respecte ainsi les 2 premières hypothèses sur m_i.
Vérifions que la dernière est aussi vérifiée, pour $j \geqslant i$ on sait que l'on n'a pas de problème, le risque est une trop grosse valuation pour un p_l où l petit or vu la construction si $p_l^{\alpha} | \phi(m_i)$, $p_l^{\alpha} | (p_i - 1)(p_{i+1} - 1) \cdots (p_k - 1) | n!$ on est donc assuré que la récurrence marche. Avec $m = m_1$, on obtient une solution à l'exercice.

Exercice 6. Soit $n \geqslant 3$ un entier, montrer qu'il existe deux entier x et y tels que $7x^2 + y^2 = 2^n$.

Solution de l'exercice 6 Encore une solution par récurrence ! Initialisation : $x_3 = y_3 = 1$.
Hérédité : On suppose prouvé par récurrence pour n, $(X = (x_n + y_n)/2, Y = |7x_n - y_n|/2)$ $(X = |x_n - y_n|/2, Y = (7x_n + y_n)/2)$ les 2 couples vérifient $7X^2 + Y^2 = 2^{n+1}$. Le premier couple est solution si x_n et y_n on même congruence modulo 4 (X et Y impairs) sinon le second convient, ce qui conclut.

Exercices Seniors

Exercice 7. Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier. Montrer qu'il existe un entier n tel que pour tout $x \in \{n-1, n, n+1\}$, $p^2 \nmid x^{p-1} - 1$ et $p \nmid x$.

Solution de l'exercice 7 Lemme : entre 0 et p^2 il y a exactement $p-1$ éléments dont la puissance $(p-1)$-ième est congrue à 1 modulo p^2.
preuve : On prend ω une racine primitive modulo p^2 (pour rappel ω une racine primitive modulo m signifie que les puissances de ω correspondent à tout les inversibles modulo m, ce qui existe dès que m est 1,2,4 ou une puissance de premier impair ou 2 fois une puissance de premier impair, lire les polycopiés pour plus de détail), les éléments d'ordre divisant

$p-1$, sont alors ce dont le logarithme discret (log vérifie que $\log(x) < \phi(m)$ et $\omega^{(\log(x))} = x(\mathrm{mod}\ m)$) est divisible par p, ce qui donne bien $p-1$ possibilités.
On utilise un principe des tiroirs : les chaussettes sont les x entre 0 et p^2 d'ordre divisant $p-1$, il y en a $p-1$ par le lemme, les p tiroirs sont les intervalles $kp+1;(k+1)p$, il y donc un tiroir vide d'où l'on peut tirer le n voulu en prenant par exemple $kp+2$.

Exercice 8. Soit P un polynôme à coefficients rationnels de degré supérieur ou égal à 2, et $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels tels que pour tout $n \geqslant 0$, $q_n = P(q_{n+1})$. Montrer que la suite q_n est périodique à partir d'un certain rang.

Solution de l'exercice 8 Soit u entier tel que uq_1 soit entier. Soit $\tilde{P}(X) = uP(\frac{1}{u}X)$. Soit v entier tel que $v\tilde{P}$ soit à coefficients entiers. Soit a le coefficient dominant de $v\tilde{P}$. On pose $Q(X) = a\tilde{P}(\frac{1}{a}X)$, $m = a^{deg(P)-2}v$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n = uaq_n$.
Nous avons $mQ(X)$ unitaire à coefficients entiers et pour tout n, $r_n = Q(r_{n+1})$. r_0 est entier, or comme pour tout n, r_{n+1} est racine rationnelle du polynôme $mQ(X) - mr_n$ unitaire à coefficients entiers, par récurrence, r_n est entier pour tout n.
Comme $deg(Q) > 1$, $|Q(x)/x|$ tend vers $+\infty$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$. Donc il existe $M > |r_0|$ tel que pour tout x, $|Q(x)| \leqslant M \Rightarrow |x| \leqslant M$. Par récurrence immédiate, $|r_n| \leqslant M$ pour tout n. La suite r prend donc ses valeurs dans un ensemble fini. Soit p minimal tel que $\{r_0,\dots,r_{p-1}\} = \{r_0, r_1, \dots\}$. Montrons par récurrence sur n que $r_{n+p} = r_n$ pour tout n. Par hypothèse, $r_{n+p} \in \{r_n,\dots,r_{n+p-1}\} = \{r_0,\dots,r_{p-1}\}$. Donc $r_{n+p} = r_{n+k}$ avec $k \in \{0,\dots,p-1\}$. Alors si $k > 0$, $r_{p-1} = Q^{\circ(n+1)}(r_{n+p}) = Q^{\circ(n+1)}(r_{n+k}) = r_{k-1}$ et il y a contradiction avec la minimalité de p. Donc $k = 0$ et $r_n = r_{n+p}$. Ce qui conclut la récurrence.
Nous venons de montrer que la suite est périodique de période p.

Exercice 9. Pour m entier positif, on note $d(m)$ le nombre de diviseurs positifs de m (1 et m compris). Soit k un entier strictement positif. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers positifs n tels que n ait exactement k diviseurs premiers distincts et tel que pour tout a,b entiers strictement positifs avec $n = a + b$, $d(n)$ ne divise pas $d(a^2 + b^2)$

Solution de l'exercice 9 Prouvons que chaque entier de la forme $n = m2^{p-1}$ avec p premier impair, possédant $k-1$ facteurs premiers strictement plus grand que 3 et vérifiant $(5/4)^{(p-1)/2} > m$ est solution.
Si $a + b = n$ et $d(n)|d(a^2 + b^2)$ alors $p|d(a^2 + b^2)$. Donc il existe q premier tel que q ait un exposant $cp-1$ dans $a^2 + b^2$. Si $q \geqslant 5$, $a^2 + b^2 \geqslant 5^{q-1} > n^2$, or $a^2 + b^2 = n^2 - 2ab \leqslant n^2$. Donc $q = 2$ ou 3.
Si $q = 3$ en regardant $a^2 + b^2$ modulo 3, 3 divise a et b donc n, contradiction avec l'hypothèse.
Si $q = 2$, si a et b ont des valuations 2-adiques distinctes la plus petite est $p-1$ celle de la somme des carrés $2p-2$, absurde.
S'ils ont même valuation 2-adique $a = 2^t a_0$ $b = 2^t b_0$ avec a_0 et b_0 impaire $a_0^2 + b_0^2 = x2^{cp-1-2t}$ la gauche fait 1 modulo 4, donc $cp-1-2t = 1$ or $t < p-1$, donc $c = 1$ est la seule solution, on a un problème de parité absurde, ce qui conclut.